1800

925

I: (Beccaria, J.B.)

(J. B. Beccaria)

GRADUS TAURINENSIS.



AUGUSTAE TAURINORUM

EX TYPOGRAPHIA REGIA
MDCCLXXIV.
[1774]

REGI

Si quemadmodum opus quodque laboriosum per se est, atque arduum, et communi etiam sapientum virorum judicio illustre, et decorum, ita Principis patrocinio dignum esset existimandum, fidenter admodum prodiret in lucem noster hic de gradu Taurinensi liber, REX AUGUSTISSIME, neque quidquam ambigeremus, quin apud Ma-

iestatem Tuam gratiam iniret, quantam maximam sperare liceat, aut etiam exoptare. Etenim cum ab antiquissimis temporibus, quando res ad telluris magnitudinem inquirendam ferme unice spectabat, digna est visa mensio graduum, quae a celeberrimis cultissimarum gentium Philosophis tentaretur, tum vero nostra hac aetate, qua haec quaestio ad verissimam telluris formam perspiciendam jam proxime pertinet, et ad confirmandas earum virium leges, quibus rerum corporearum universitas omnis continetur, atque adeo etiam ad nobilissimas disciplinas Physicam, Astronomiam, Geographiam, Nauticam amplificandas, perficiendasque, certe vix ulla alia disquisitio suscipi posse videtur, quae maiorem adjunctam habeat aut dignitatem, aut utilitatem. Hinc primi illi celebrantur Norvvoodi in Anglia labores, quibus felicissime est usus magnus Nevvtonus ad diametrorum proportionem constituendam in tellure, quam ex conversione diurna, gravitateque generali compressam esse oportere, divina quadam ingenii sagacitate, collegerat; hinc illa versatur in omnium ore, atque linguis clarissimi Picarti in Gallia mensio, quae etsi minus recta, vel inde tamen est hodienum celebratissima, quod et magni Ludovici jussu, munificentiaque suscepta est, et ab homine peracta, qui primus telescopia adjunxit astronomicis instru-

mentis, et est etiam postmodum multiplici praeclarissimorum virorum cura, atque studio emendata; hinc Joannis Dominici Cassinii Astronomi nostratis opera, et studium summa cum laude memorantur, qui ex eiusdem magni Regis voluntate, liberalitateque arcum meridiani Parisiensis ad Pyrenaeos usque est quam diligentissime dimensus; hinc Jacobi Filii labor commendatur, et industria, qui eumdem illum arcum in boream ad Oceanum usque produxit. Neque vero quibus finibus eorum imperium continebatur, iisdem Galliarum Reges munificentissimi suam concluserunt bene de hac quaestione merendi voluntatem; etenim anno hujus seculi quinto supra trigesimum rerum omnium bonarum amantissimus aeque ac carissimus bonis omnibus Ludovicus XV non dubitavit geminam decernere lectissimorum Academicorum ad aequatorem, et ad boream profectionem ad arcus in meridianis metiendos maxime dissitos, atque adeo ad gravissimam quaestionem aut finiendam, aut pro difficultatum summa illustrandam. Ac certe beneficentissimae Regis voluntati abunde respondit celeberrimorum eorum hominum vivida vis, atque virtus; nam peregrinatione ipsa, ipsa operis in remotis iis regionibus identidem necessaria intermissione anxie admodum usi sunt ad scientiam undique augendam, et amplificandam. Interea vero in hac

multiplici Parisiensium Astronomorum contentione ne alii quidem Principes aut munificentiam suam desiderari, aut Geometrarum suorum studia deesse sunt passi. Itaque etiam tum potentissimus Hispaniarum Rex Philippus V Bougherio, Condaminio, Goudino binos Mathematicos studiorum comites adjunxit. Postmodum autem Benedictus XIV Pontifex rei sacrae scientia, clementiaque singulari vere summus clarissimum Geometram Boscovichium cum Mairio Roma Ariminum gradum metiri jussit. Et denique ipsa etiam Imperatrix Regina Maria Theresia, insigne sui sexus, atque imperii decus, et ornamentum, similiter ipsa, inquam, graduum, qua in Austria, qua in Hungaria dimetiendorum gravissimam provinciam Liesganighio demandavit. Atque certe admirabilis haec summorum Principum in unam hanc rem consensio, et quasi conspiratio summam, ut inquiebam, operis huius nostri dignitatem plane demonstrat: neque vero, si ad operis laudes pertinent summae eius difficultates, ideo minus laboriosa est habenda haec mensio nostra, quod in hac imperii tui parte rebus omnibus affluentissima sit a nobis exacta. Etenim commoditates Regum munificentia afferre potest ubique pares, nulla vero res in paribus studiis labores potest dispares facere. Itaque quemadmodum aliis in exteris regionibus, ita et

nobis fuit maxime, gravissimeque adlaborandum; imo vero quasi uno a laboribus solatio nos videmur caruisse, ea nempe jucunditate, quàm solet habere conjunctam, quae ad exteras regiones suscipitur peregrinatio.

Quamquam quorsum haec nos apud TE *persequimur,* REX AUGUSTISSIME, *de operis dignitate, difficultateque? Quasi vero aut harum etiam rerum scientiam in* TE *non admiretur peritissimus quisque, aut quidquam* TIBI *nos populus tuus offerre possimus, quod pro summa dignitate tua sit satis illustre, et pro tuis in nos studiis sit satis laboriosum. Ea* TU *praeditus a natura voluntate, ut velles benemereri de omnibus, iis vero etiam ab ineunte aetate ornatus, atque instructus disciplinis, unde scires optime mereri, dudum antea nedum apud felicissimas has nationes, quae tuis postmodum imperiis erant pariturae, sed et apud exteras remotissimas gentes certam hanc excitaveras, atque adeo confirmaveras de* TE *magnificentissimam opinionem:* TE *Regem regias quidem virtutes, quae in Maioribus Tuis singulis floruerunt semper plures, eximiaeque, unum omnes cumulatissime complexurum; ad clementiam autem, et humanitatem quod attinet, non modo mansuetudinem, benevolentiamque ad imperii administrationem* TE *tantam esse adhibiturum, quanta ulli unquam populorum Rectores excelluissent, sed*

et suavissimae in populos caritatis illius, qua amantissimus paterfamilias liberos ipsos suos complectatur, exemplar in TE *esse allaturum omnino singulare, atque antea inauditum. Jam vero quasi festinaret Deus O. M., properaretque ad eximium hoc divinae bonitatis in* TE *suae lumen latius effundendum, atque suis proponendum per rerum universitatem populorum administris, ideo praesertim in ea tempora videtur contulisse initia Regni tui, atque in eas per omnem ferme Europam annonae difficultates, in quibus, si minus Tua in nos caritas valuisset, provincias deseri, perire inopes, diripi fortunas divitum, et jura omnia divina, et humana turbari oportebat. Verum o providentissimam Regis, eamdemque amantissimam Patris voluntatem! Qui fatigari se maluit sollicitudinibus, ac pene frangi, quam aut angi vitam pauperum, aut divitum fortunas periclitari. Itaque administro primum in ea familia delecto, cuius fidei, et prudentiae pluries a Sabaudis Principibus est commissa curatio Reipublicae, et creditum salutare negotium res, rationesque regni componendi cum finibus vicinorum, tum adhibitis ad quotidiana consilia Proceribus Regni continuo omnes animi, atque ingenii motus conferre adorsus est ad avertendam gravissimam calamitatem. Atque non obiter, non perfunctorie, sed integras dies ad seras us-*

que noctes, per menses omnino plures perpetuo deliberare de re difficillima, decernere de frumento conquirendo, importando, distribuendoque, de inopia sublevanda, imo de publico bono (qua praesertim re Principes ad Deum proxime accedunt), et de communi felicitate ex ea publica calamitate adserenda, adaugendaque. Et certe in ea consiliorum, curarumque perpetuitate Regis nostri in suos populos amor ardentissimus aeque effulsit, ac providentissimus; nam vi illa sua perspiciendi, prospiciendique divina (etenim consultissimi ii ipsi viri, quos adhibuerat ad deliberandum, profitebantur postmodum omnes se nihil habuisse, in quo paratissimam Regis providentiam adjuvarent, habuisse vero plurimum, unde ex eius sententiis, atque decretis in arte proficerent tuendae, ampliandaeque publicae felicitatis) est id Rex noster assecutus, ut tantum bonorum nobis afferret, quantum malorum fuerat pertimescendum; atque adeo effecit, ut gravis penuria nihil praeterea valeret, nisi ad excutiendam pauperum socordiam, desidiamque, et ad excitandam divitum misericordiam; adeo ut valentibus suus ipsorum moderatus labor, infirmis, atque debilibus communes opes, in primis vero Regiae copiam afferrent, affluentiam, atque ubertatem. Praeterea ipso illo tempore, quo agebatur de alendis bonis, data est malis

venia, si olim unquam, amplissima, effectique boni plerique illorum, Rege ipso nostro amantissimo edictis adhortante, ac manu veluti sua adjuvante. In illa ipsa egestate, in qua ad populos sustentandos aerarium effundebatur, dona etiam sunt liberalissime condonata nobilibus viris, provinciis, toti Sardiniae Regno, quo pari omnes in miseros assuescerent munificentia, quam in Rege experiebantur prorsus singularem. Denique qua summa in calamitate res eximia videbatur futura, si populorum salus, atque incolumitas servaretur, tot, tantaque alia negotia aut suscepta sunt, aut feliciter etiam confecta, quot, quantaque ne felicissimis quidem temporibus concipi animo a Regibus providentissimis, atque tentari consueverunt. Etenim ad splendorem Regiae Familiae quod attinet, nubere Regis nostri Filia altera alteri Galliarum Regis Fratri; quod vero facit ad Regni totius securitatem, imponi extrema manus Fenestellis arci qua loci natura, qua ab artis ingenio munitissimae; Cunei, quae urbs, hoste semper repulso, est longe celeberrima, moenia extrui aequantia praealtos aggeres; Demontii, cuius arcis vim, atque inaccessa moenia, prout est quisque in arte muniendi intelligentissimus, ita miratur quam maxime, festinari ultimae vallorum munitiones; exscindi Dertonae mons, atque excitari inusita-

tum validissimum munimentum; Taurini deduci ad Duriam novi aggeres, armamentarium perfici; ubique autem militaris res omnis mirifice constitui, atque adaugeri. Neque vero interea earum etiam rerum aliqua posthabita est, quae aut ad commodum, aut ad ornatum pertinere posse videbatur. Coërcitus ad lacum Lemanum Rhodanus, effossae, stratae ad Regias villas viae, architecti constituti, qui de urbis ornatu decernerent, aes annuum impertitum cultoribus artium optimis, praemiis donati praestantissimi quique disciplinarum magistri. Verbo (ecquid enim contendamus hic memorare singula, quae vix prolixa oratione complecti liceret?) malorum omnium cohors, quae ex gravi inopia videbatur jamproxime imperio omni incubitura, repressa est a Regis nostri summa prudentia, sapientia singulari, paternaque caritate cohibita est, imo et longe eliminata; atque bona omnia, et vero etiam vitae commoda non solum confirmata sunt vetera, sed et nova plurima sunt divinitus constituta. Quam adeo summam Regis nostri in imperii administratione, ac pene divinam virtutem dum nos admiramur animo, ac plane oculis intuemur opere adeo vario, multiplici, difficillimoque expressam, fateamur necesse est nihil in cultus, atque obsequii testimonium afferri ad ipsum posse, nisi quod voluntate, bonitateque ipse sua effecerit se satis di-

gnum; quamobrem haec una demum consideratio, quod TU *in primis,* REX AUGUSTISSIME, *hanc Gradus Taurinensis mensionem apud invictum immortali memoria Patrem volueris commendare, quodque nos eam mensionem capessentes, perficientesque crebro audire dignatus sis, humanissimoque, et vero etiam doctissimo sermone tuo erigere, atque confirmare; ea, inquam, una consideratio tantum nobis indit animi, ut labores illos nostros Augustissimo Nomini Tuo inscribere non dubitemus Maiestati Tuae devoti quam qui maxime.*

Joannes Baptista Beccaria.
Dominicus Canonica.

GRADUS TAURINENSIS

CAPUT I.

ARTICULUS I.

Basis delectus.

1 Anno 1759 Carolus Emanuel Rex memoria immortali jussit me arcum meridiani metiri, qui maritimis ad austrum, et Graiis alpibus ad boream finiretur; atque socium roganti, Sacerdotem Dominicum Canonicam addixit, virum acrem in observando, in supputando doctum, Physices professorem extra ordinem. De opportunitate regionis verba fecerat Regi clarissimus Geometra Bosckovichius. Operis autem dignitatem facile persuaserat Victorius Amedeus magnum Patris magni incrementum.

2 Itaque continuo et opus universum moliri coepimus, et basim primo loco delegimus dimetiendam in ampla, rectaque via, quae Taurino Ripulas pertinet. Duas enim bases constituere in terminis arcus, quarum una triangula ordiretur, altera finiret, comprobaretque, res erat difficillima ob locorum asperitatem. Sed neque alibi in agro, qui inter eos terminos protenditur, rectas pro re satis longas metiri potuissemus, nisi per diverticula plura: nam urbes, oppida, pagi, villae ea sunt frequentia, ut in urbem unam coalescere videantur; ager vero, qui segetum sationi est reliquus, arboribus conseritur undique, moris praesertim; praeterea fluviis interciditur, quos emittunt ambientium alpium valles singulae, atque rivis etiam

impeditur, qui plurimi derivantur, qua ad augendam ubertatem soli, qua ad artis opera efficienda.

3 Ripulina autem via, praeter rectae lineae expeditissimae longitudinem sat magnam, positionem offerebat opportunissimam. Primo quidem quod ipsa ferme tangat parallelum loci, quae est lineae ingens utilitas ad duplicem hinc inde triangulorum seriem ordiendam; deinde vero quod constituta in ea via basis ex uno triangulo subsidiario Supergam usque protrahatur ad ingens intervallum.

4 Atque longitudo haec ingens basis productae, primo loco meliorem faciebat utramque seriem triangulorum, tum eorum, quibus ad austrum, tum aliorum, quibus ad boream eramus profecturi: nam pauciora erant suffectura, et quae minimum peccarent angulis acutis; triangulis tribus Montem Regalem sumus assecuti ad austrum, tribus Andratas ad boream; atque iis satis bona conditione omnibus: optima enim video adhuc obtigisse nemini omnia.

5 Deinde vero ea basis protractio elationem termini habebat adjunctam omnino opportunam: nam ex Supergensi tholo licebat jam prospectare stationes alias omnes, ipsasque expendere singulas; et quando par commoditas in sublimi ante Ripulinum palatium solo occurrebat, quo terminus basis Ripulinae provehi poterat quam facillime, fiebat inde, ut ex stationibus duabus possemus emendare alias omnes; imo vero etiam ut triangulis duobus duas triangulorum series complecti liceret, atque comprobare.

6 Has basis utilitates innuam hic obiter, et universe, explicaturus deinde singulas fusius, prout singulas pergam expli-

care mensionis nostrae partes. Itaque in *fig.* *XXXVII tab. III* RT designat basim jam provectam in R ad palatium Ripulinum, et constitutam in vallo Taurinensi T, quod proxime adjacet ad austrum portae Segusinae. Hinc ope trianguli subsidiarii TRB assecuti sumus latus RB, quod Ripulas R nectit cum Ballangerio B, adeoque et latus RS, quod nectit Ripulas cum tholo Supergensis templi S. Atque hoc est jam latus commune triangulorum duorum, quorum alterum RBS boream spectat, alterum RFS spectat austrum, et pertingit ad turrim palatii Sinfrediensis F. Duo alia triangula BSM, BMA per Maxadium M eunt Andratas A ad terminum arcus borealem; duo alia RFL, LFU per Sinfredium F, et Salutiensem turrim L pergunt ad terminum australem, qui est Monte Regali; sed praeterea triangulo uno RUS Montem Regalem, alio RAS Andratas assequi sumus ausi, atque eo eventu, ut quam longitudinem arcus terrestris protulerant triangula sex, eamdem duo illa confirmarint.

ARTICULUS II.

Instrumenta.

7 Hactenus de basis delectu, et utilitatibus: nunc paucis instrumenta exponam, quibus confecimus mensionem ipsius. Atque primo loco hexapedam Parisiensem, quod instrumentum erat omnino necessarium, quo mensio nostra cum alienis posset conferri, procuravit mihi clarissimus Condaminius. Regula ferrea AB ipsa est (*tab. I fig. I*) trientem pollicis alta, ses-

quipollicem lata, longa utrinque lineas undecim ultra pedes sex. In distantia a margine anteriore linearum trium recta ducitur, in qua intervalla pedum sex exiguis punctis, sed iis sat altis distinguuntur, et rectis praeterea ad marginem productis definiuntur. Extremis duobus eius rectae punctis circelli circumscribuntur. Praeterea pedis ultimi intervallum, deductis similiter rectis, tribuitur in pollices duodecim, atque horum ultimus in lineas. Sed et alia recta hexapedalis insculpta est primae parallela, ad quam sola pedum intervalla pertingunt; etiam ista puncta habet extrema circellis inscripta, et notata literis A, B. Denique, ne quid mensurae perennitati deesset, regulam hanc ferream ad normam excisam in extremis marginibus excipit regula ferrea alia exstantibus marginibus suis, ut sua etiam ipsa cavitate hexapedae mensuram proxime adaequet. In hanc etiam regulam rectas produxi, quae hexapedam finiunt in regula prima, atque in iis puncta insculpsi duo alia, queis uti olim tuto possem, si quando insculpta in alia obsolevissent. Ceterum regulam primam commendat titulus hic insculptus in facie ipsius iuxta longitudinem.

di Beccaria = met 1,94861
R + 4°,6

A. C. 1760 pridie idus martii Parisiis thermometro Reaumuriano signante gr. 13 supra congelationem longitudo huius regulae, nec non distantia inter puncta A, et B exactae sunt a C. M. de la Condamine, nec non a N. L. la Caille ad modulum hexapedae ferreae in coetu Regiae Scientiarum Academiae comprobatae ad metiendos in aequinoctiali plaga circuli meridiani gradus. Jacobus Canivet elaboravit, et divisit Parisiis.

8 Hexapedali huic regulae thermometra duo adjunxit diligens Condaminius, et circinum cum micrometro. Illa quidem,

quae ambo partitionem Reuamurianam habebant, erant necessaria, ut regulae ipsius a calore mutationes, adeoque et verae nostrarum perticarum longitudines dignoscerentur. Circinus vero iste plane usuveniebat ad capiendas longitudines ipsas tum regulae, tum perticarum.

9 Circinus cum micrometro instrumentum est notissimum: juvat tamen eum describere hic obiter, quem misit Condaminius. Neque enim, quae sunt vulgatissima instrumenta, sunt item expeditissima omnia. Itaque regula ex piro est is circinus (*fig. II tab. I*) hexapeda longior pollices octo, lata pollicem unum, lineas decem, alta lineas undecim; binis cursoribus ipsa instruitur, qui calibeos cuspides deferunt, crura nempe circini. Cursorem alterum F manu facile moveas ultro citroque laxata coclea; hac advoluta figas ubilibet. Alter E nec it, nec redit, nisi quam lentissime vi cocleae C robustioris. Etenim cocleae huius pars quaedam latior intercipitur inter laminas ex aurichalco, quarum altera est pro fundo thecae *d*, altera est pro circulo micrometri. Cocleae vero helices inseruntur matrici ex aurichalco forma parallelepipeda excurrenti intra regulam ligneam per foramen oblongum *f* forma simili; matricis autem latera nexa sunt interius cursori E a geminis cocleis *i*. Itaque coclea C, dum volvitur, aut revolvitur, matricem, adeoque et cursorem E trahit, vel trudit. Atque hic motus, quo necessariam habeat aequabilitatem, et continuationem, praeceptionibus obsequendum est non ita paucis. Primo loco latior cocleae orbis ita circuire debet in ipsa, cui insidet, cavitate, ut prorsus non nutet; deinde coclea tota recta sit oportet, diametro aequabili, helicibus aequabilibus; mox

eadem aequabilitate, et congruente capacitate sint oportet helices cavi in matrice, atque matricem recta pervadant, et in medio loco quam accuratissime. Denique et matrix cum foramine regulae, et regula cum theca cursoris debent semper congruere, et ubivis, ne ulla ullibi exsistat trepidatio. Quarum praeceptionum summa opus facit omnino arduum; obtemperandum tamen est omnibus, quo omnis a circuitione cocleae motus ad cursorem unice pertineat.

10 Profecto Condaminiani circini micrometrum erat satis accuratum. Etenim index cocleae C nexus vigesimam quintam peripheriae partem non excurrebat, quin aliquis ope microscopii in cuspide A motus cerneretur, quod satis erat ad differentias assequendas in partibus lineae centesimis: nam coclea quater circuibat quam proxime ad superandum lineae intervallum. Quamquam vero elastica spira sat valida fundo thecae *d* adnixa parallelepipedum delatorem cursoris premeret, ne hic unquam quiesceret a cocleae circuitione; nihilominus duas has leges indiximus nobis in usu micrometri; primo, ne unquam cocleam promoveremus, nisi remotam antea, et vicissim; deinde ut circa eumdem locum proxime agitaremus cursorem, ubi nempe helices cocleae cum matrice eramus experti maxime congruentes. Id autem fuit nobis facillimum, quando enim agebatur de exilibus mutationibus expendendis in longitudine hexapedali regulae ferreae, aut lignearum perticarum, defixo certo loco cursore F, imo loco ipso lineis definito ductis utrinque in regula ad thecae margines, necessario motus omnis cursoris alterius una, vel altera cocleae circuitione continebatur.

11 Dum hexapedam Parisinam praestolabamur, plura interea coepimus experimenta, quibus deliberaremus de perticarum materia, atque item forma. Forma, in quam consensimus, exhibetur in *fig. III tab. I.* Tabula ABCD sex pollices alta, pollicem unum crassa, tabulae infigitur item latae pollices sex, sed crassae lineas non amplius 10; quae compages visa est inflexioni, atque deflexioni minimum obnoxia. Ad materiam quod attinet, tabula quae jacet in horizonte, populea est tota, alia quae est ipsi recta, indusium habet utrinque populeum ad lineas duas, sed crassitie duarum linearum; meditullium autem haec habet de nuce; tabulatum, atque contignatio in pervetusta domo, quae instaurabatur, materiam suppeditarunt. Delegimus autem tabulas, et trabes minime nodosas, quae conditio in populo est obvia, nec difficilis erat obtentu in laminis e nuce, ex quibus meditullium confecimus, quod paullo ante nominabam, et quod obscurioribus lineamentis exprimitur in dorso tabulae ABCD. Non erat ipsum continuata una tabula, sed ex frustis coalescebat triangulari forma, fibris transversis; atque haec firmissimo glutine cohaerebant inter se mutuo, atque cum indusiis; praeterea colligabantur indusia cum meditullio paxillis ligneis.

12 Hae perticae (quid ni enim nomen non teneant, quando rei utilitatem habuerunt omnem?) ad filum jam exactae, steterunt sub dio ultra mensem innixae fulcris suis; tum emendatae steterunt iterum similiter ad mensem alium; steterunt et tertio post alteram emendationem. Quando autem jam vix aberrabant a filo, placuit ipsas non iterum dolare; sed errorem vix sensilem castigavimus adpositione laminarum ex aurichalco

A, B, C, D, in quibus hexapedarum limites erant definiendi: etenim singulae aequare debebant in longitudine hexapedas tres. Duae laminae mediae B, et C sunt forma rectangulari; forma extremarum A, D est ex rectangulo adjuncto semicirculo. Omnes recta bifariam dividuntur juxta longitudinem, quae adeo in extremis limites duos designat hexapedarum extremarum. Sed in duabus laminis mediis B, et C limites communes hexapedis extremis, et mediae, punctis definiuntur tenuibus, rotundis, atque alte insculptis. Francalancia, qui tum organopeus erat in Regio nostro Lyceo, explevit conditiones has omnes; primo quidem, ut extremae laminae facie sua jacerent in plano dorsi; mediae vero tanta prominerent particula, quanta erat necesse, ut summa omnium facies iaceret in plano uno; praeterea ut puncta omnium, quae erant limites hexapedarum, essent in eadem recta; denique ut bini quique limites hexapedam aequarent intervallo suo. Horum ultimum circino micrometrico, reliqua tenso filo providit quam patientissime: nam haec etiam problemata, quae sunt expeditissima Geometrae ingenio, operosa esse solent manui artificis.

13 Dicam paullo post quid praestiterint hae perticae ita directae, quemadmodum narravi, instructae, atque partitae; nunc, quando tacendum omnino nihil, exponam etiam genus fulcrorum, queis sumus usi ad eas deferendas. Equidem sentiebam, basis mensionem expeditiorem futuram fuisse, si ipsam absolvere potuissemus perticis in ipso solo impositis. Verum nec eo ego eram corporis habitu, qui possem humi repere ad milliaria; et hoc interea accepi a Physica vitii, ut, quam-

quam

quam et de me ipso diffidam plurimum, nemini tamen fidam magis, quam ipsi mihi. Praeterea etiamsi constituissem perticas in solo ponere, attamen ferme semper fulcro saltem uno uti debuissem ad unum sustentandum perticae cuiusque caput, quo omnes in solo inclinato exigerentur ad libellam. Itaque restabat, ut fulcris uterer, quorum firmitati possem tuto credere. Horum autem unum designat *fig. IV tab. I.* Tabulae tres, latae singulae pollices tres cum dimidio, et forma rectangulari in prisma triangulare, angulis tamen apte excisis, compactae truncum fulcri faciunt firmissimum. Nam praeterquamquod tres tabulae sunt inter se validissime colligatae, paxillis etiam admodum densis solidis prismatibus adfiguntur, quae sunt meditullii loco in ima, in media, in summa trunci parte; solidissimae tres e nuce tabulae, pollicem crassae cum quadrante, altae vero pollices quatuor cum semisse tripedem faciunt, ex quo exstat truncus; scilicet tabulae hae singulae, qua duro glutine, qua paxillis transversis, qua ferreis etiam clavis, singulis trunci tabulis, insitoque meditullio firmissime compinguntur. Quo autem tripes solo haereat immotus, crus quodque instruitur robusto ferreo cuspide; et quo truncus in solo inaequabili rectus insistat, crus quodque nexum defert funiculo cuneum pro opportunitate supponendum. Denique mensula etiam est tota ex nuce, et nexam habet solidam massam, ut altitudo compagis sit pollices quatuor cum semisse. Haec compages prismatico foramine pertusa est, quicum apte congruit prismaticus truncus sua parte quavis; robusta vero, quae a tergo adest ex buxo coclea, vel hilum appressa continet omnino mensulam ne nutet. Praeterea, ne quod superesset agi-

tationis periculum, id cavimus fere semper, ne altius sesquipede a tripede mensula efferretur.

14 Fiebat inde, ut identidem pertica sequens efferri deberet; atque tum pendulum usuveniebat, quod perticae aptatum cernitur in *fig. III tab. I.* Ne huius quidem formam negleximus. Constat ex duplici cono, altiore uno, alio, qui est imus, depressiore. Vertex summi coni desinit in sphaerulam pertusam foraminulo juxta diametrum verticalem, in quod immittitur duplex filum prodiens dispertitum ad latera; ex vertice coni imi prodit acuta acus. Tota autem massa est ex solido aurichalco, atque ita librata, ut apex acus evolutione fili inhaereat puncto uni.

15 Prope caput A perticae cylindrus ligneus exhibetur assurgens in conum. Is imponebatur semicirculo laminae ultimae in pertica quaque ultimo constituta. Atque apex coni erat dioptrae loco ad dirigendam perticam. Conus hic erat dimidia parte niger ad prospectandum contra loca illuminata, albebat parte alia, quo cerni posset, cum referebatur ad loca umbrosa.

16 Restaret dicendum de virgis, quibus rectam definiebamus, juxta quam progrederemur, de telescopio nocturno, quo virgas ipsas dirigebamus, de duplici norma, qua Francalancia providebat, ut primum punctum perticae sequentis recte caderet in ultimum praecedentis: sed haec narratione ipsa erunt satis manifesta. Interea vero subvereor, ne molestior sim, dum singula minutius fortasse persequor, quam par est.

ARTICULUS III.

Basis mensio.

17 Anno 1760 ultimis maii diebus Francalancia conduxit operarios quatuor, collatisque instrumentis omnibus, convenit cum iis in viridarium Regium, ubi quid quisque praestare deberet in mensione *basis* fuit constitutum, et mensuras adponendo, dirigendo, atque etiam examinando adsuevimus singuli, atque *universi*, muneri obeundo quisque suo.

18 Cumque jam in re omni essemus exercitatissimi, die altera junii rem ipsam sumus adgressi in via Ripulina. Atque principio, ubi ordiuntur procerae arbores, quae viam juxta longitudinem omnem pulcherrime sepiunt utrinque, ibi marmor infossum est ferme cubicum altum pedes duos. In medio summae faciei eius marmoris lamina ex aurichalco fuerat alte infixa. Francalancia circellum in hac insculpserat, et centrum, quod erat futurum initium basis. Qui marmor hoc inquirat, tellurem effodiat oportet in distantia pedum septem et viginti ab arbore prima boreali: *nam latus australe viae alicubi inflectitur aliquantisper introrsum.* Quare, ut possemus recta progredi, necesse fuit terminos basis constituere, qui a mediis in via punctis, declinarent ad boream.

19 Porro planum, quod a puncto insculpto in marmore latus viae australe inflexum introrsum proxime stringebat, fenestram bisecabat, quae est maxime borealis in facie anteriore Regii palatii Ripulini. Itaque eo semper directa est positio virgarum, juxta quas perticas disponebamus in seriem continuam.

20 Virgae hae etiam exstabant ex tripede. Graciles erant, sed rectae; atque ne inflecterentur a vento, lamina ferrea convestiebantur ad semialtitudinem. Telescopio nocturno ipsas dirigebam tutissime (quod etiam instrumentum usuvenit mihi ad considerandum caelum, praesertim ad captandos cometas, qui jam ea sunt multitudine, ut sol hic, quem dicimus nostrum, ad cometas primo loco pertinere videatur). Itaque virga altior saxo imponebatur, ut axis ipsius insculpto in lamina puncto immineret. Deinde ego discedebam ortum versus, quamdiu fenestram Ripulinam spectanti mihi imago aliqua confusa eius virgae exhiberetur. Interea Francalancia virgam deferebat ad occasum in eam distantiam, ut ego telescopio virgam cernerem distincte, ipse vero me videret manu monentem, ubi virga esset constituenda. Etenim tum mihi virga erat recte posita, cum imago ipsius distincta bisecabat imaginem confusam propioris, et ambae imagines cadebant in imaginem fenestrae Ripulinae. Sed etiam Francalancia dioptrae genus habebat in virga mihi propiore per ipsam prospectans ad punctum aliquod, quod a tholo Supergensis templi Regii declinat ad turrim ipsius australem: eo enim spectabat ducenda recta. Qua ratione altera virga, eadem constituebantur omnes; sed duabus constitutis jam non erat necesse intueri fenestram; etsi vero telescopium nocturnum campum habet amplissimum, quae est ingens falsi ceteroquin instrumenti utilitas; quandoque tamen in ordienda virgarum serie, prae solo parum acclivi, aut etiam declivi, virgas, et fenestram Ripulinam nequibam eo complecti, ne humi quidem procumbens; atque tum rem oculo nudo exigebam transpiciens per filum penduli, quod dextra regebam.

21 Virgarum positio erat prima operis pars, a qua mane, et a prandio ordiebamur: trabes enim erigere ad ingentem distantiam cum voluissemus, atque ita rectam totam a principio designare, disturbabantur ipsae passim a viatoribus, qui in ea via sunt frequentissimi, atque ex omni ordine pedites, equites, rhedarii, muliones.

22 Itaque virgis in directum dispositis haerebamus adhuc paullo diutius in locanda pertica prima. Etenim a primo eius puncto demittendum erat pendulum, ut apice punctum attingeret definitum; quod principio erat punctum illud insculptum in marmore, alias autem erat simile in laterculo punctum: nam quoties intermittebamus mensionem, laterculum puncto distinctum infodiebamus, quod recta subesset apici penduli demissi ab ultimo puncto perticae ultimae. Is laterculus nos monebat, unde esset ordiendum, cum ad mensionem redibamus, edocebatque, num recte regrederemur, cum instaurabamus mensionem totam.

23 Redibat vero etiam eadem molestia penduli demittendi, quoties ob soli acclivitates, declivitatesque sequens pertica efferenda erat, aut deprimenda. Id autem exsequebamur attente admodum, ne pendulum a motu aëris oscillaretur, atque ut filo appresso puncto ultimo perticae ultimae acus recta caderet in primum adponendae perticae punctum; qua in re ne errorem quidem negligebamus, qui a crassitie fili potuisset exsistere.

24 Sed neque tum festinanter admodum progrediebamur, cum unice protendebatur series perticarum, sequentis caput imponendo mensulae praecedentis. Etsi enim, dum exigebatur

adamussim positio perticae ultimae, jam operarius unus et novum fulcrum diducto a fulcro ultimo funiculo proxime suo imposuisset loco, et jam mensulam oculo respiciens adduxisset quoquo modo ad libellam cum mensulis constitutis, imo et essent jam in promtu operarii alii duo perticam novam delaturi, reliqua tamen omnia non nisi caute admodum exsequebamur, adeoque et lente. Francalancia aderat fulcro ultimo, aderat novo senior operarius versatus in arte multiplici, et manu minus rudi, quam pro conditione. Hi perticam ulnis exceptam suis mensulae cunctanter imponebant. Tum ego prospectans juxta tres perticas per conum impositum jam perticae ultimae, monere de motu in latera, quo directio castigaretur; mox Canonica libellam expendens motum docere mensulae in novo fulcro, qui fieri deberet sursum deorsum. Atque hi motus singuli dum absolvebantur, Francalancia homo minimum verbosus, sed maxime sollers caput perticae sustentabat semper, ne quid intremerent perticae jam constitutae; atque interea curabat quam diligentissime, ut principium novae perticae ultimae termino responderet. Hanc in rem utebatur norma quadam duplici ex chalybe: etenim ad evitandam illisionem occidua perticarum capita ortivis depressiora feceramus lineas quatuor. Itaque imponebat normulae crus medium in laminam novae perticae, efficiebatque, ut, dum crus inferius interiore latere apprimebatur laminae illi eidem, crus superius latêre exteriore attingeret similiter punctum ultimum perticae ultimae: nam latus illud interius cruris inferioris consentiebat in unam rectam cum latere hoc exteriore cruris superioris.

25 His rebus actis, conveniebam ego ad normam videndam appositam a Francalancia, et excurrebam etiam ad considerandam libellam; contra Canonica veniebat ad videndam normam, et ad expendendam directionem perticae. Quin et ipse Francalancia invisebat studiose omnia, neque annuebat (vocem enim intra diem persaepe edebat nullam), nisi vidisset recte acta omnia.

26 Quam multiplicem diligentiam qui attendant, jam non mirabuntur continuam nos, atque admodum laboriosam novendecim dierum operam debuisse impendere, quo alterum basis terminum assequeremur. Selegimus terminum hunc ad sextam ante ultimam ad Ripulas borealem arborem, unde prospectus aderat, quemadmodum dicam, ad basim protrahendam. Itaque vigesima junii hic itidem marmor infodimus instructum ipsum etiam lamina ex aurichalco, in qua et circulus erat descriptus, et centrum insculptum. Porro distantia omnis duorum terminorum, pensitatis erroribus omnibus, uti dicam postmodum, exstitit hexap. Parisinas 6051, 01.

27 Vigesima prima junii redire coepimus Taurinum, atque basim remetiri sollertia eadem omni, quam eundo interposueramus. Praeter laterculos, quos eundo abdideramus, exciderамus etiam literas ex cortice arborum, quae adstabant proximae; quo monumento ipsae essent ad quaerendos laterculos. Verum diligentia ea omnis obvenit supervacanea: nam demisso post debitum hexapedarum numerum pendulo, laterculus quamproxime suberat, ut vulgus hominum, qui quandoque aderant, cum laterculum aliquem effodiebamus, nos magica, nescio qua, arte abusos putaret. Ita enim ad nostri ingenii

existimationem sumus comparati docti indoctique, ut naturam ipsam mancam malimus, quam scientiam nostram.

28 Itaque quarta julii aestuantes jam a calore, et labore fracti pendulum iterum demisimus ad centrum marmoris Taurinensis. Atque haec mensio defecit a prima partibus hexapedae 0, 21; scilicet pedem unum, pollicem unum, lineas tres, et si placet, semissem lineae secundae quamproxime.

ARTICULUS IV.

Emendatio basis.

29 Omnis, qui in basim irrepere potuit error, pendet ab hexapedarum metientium longitudine, et positione. Longitudo autem hexapedarum (etenim de positione dicam postmodum) quas perticae continebant, referebatur ad longitudinem regulae Parisinae. Neque haec longitudo constat eadem, uti vulgo notissimum, sed augescit a calore, et frigore minuitur. Quare, ut prospiceretur, quid valerent hexapedae in perticis, cognoscendum erat primo loco, quid valeret hexapeda in regula ferrea. Porro, uti titulus insculptus testatur, ipsa collata erat cum modulo Parisino *thermometro signante gr.* 13. Itaque cum perticas referebamus ad regulam calidiorem, hexapeda quaeque, quae numerabatur, erat mulctanda ea longitudinis particula, quae accedebat ex calore redundante, et vicissim cum referebamus perticas ad regulam gr. illo 13 frigidiorem, hexapedae in mensione numeratae erant augendae ea longitudinis particula, quae deerat in regula ex calore deficiente.

30

30 Sed haec incrementa, et decrementa subvereor, ne adhuc satis certo definita non sint, quanta adamussim debeantur cuique gradui caloris accedenti, aut abeunti. Equidem est perpulcrum in hanc rem Condaminii experimentum, qui hexapeda utens pro pendulo, a numero oscillationum, quas ipsa tempore aequali absolvebat mox in aëre temperato ad gradum illum decimum tertium Reaumurii, mox in aëre excalefacto ad gradum quinquagesimum quintum, depressionem petivit centri oscillationis, et productionem hexapedae, atque conclusit, produci ipsam unam octuagesimam septimam lineae partem a quoquo caloris gradu. Verum hexapeda suspensa tenet ne eamdem longitudinem ac deposita? eamdem ne tenet oscillans, ac suspensa? calor pervadit ne aequaliter oscillantem ac quiescentem? Subierunt mihi in animum hae dubitationes ab experimento Smeatonii, qui in volumine XLVIII Trans. Angl. productionem tradit Condaminiana maiorem. Praeterea Smeatonius id mihi videtur male sumere cum Condaminio, productionem ferri numero graduum caloris respondere in magnitudine. De-Luc inter liquida unum mercurium vidit expandi aequabiliter, et haec aequabilitas in solidis longe minorem probabilitatem habet.

31 Itaque tentavi experimentum. Vectes ferreos duos *tu*, *rs* (*fig. IX tab. I*) pollicem crassos infixi parietibus oppositis sublimis in tecto conclavis, atque ita composui, ut alter *rs*, qui exstabat a muro pollices 49, 08, recta urgeret laminam CB quadrantis cardine suo volubilis in horizonte; contra vero longior *ut*, qui a muro opposito exporrigebatur ad pollices 118, 75 urgeret telescopium mobile parallelum fixo. Itaque a discessio-

ne telescopiorum videnda vel eminus in objecto palatio, vel cominus in limbo quadrantis, prona erat supputatio ad agnoscendam vectum productionem. Verum, quae didici, quaestionem non finiunt: nam nec suspicio abfuit omnis minimulae alicuius trepidationis in fulcro quadrantis; et certe cum productione ferri aliqua se componebat expansio conclavis totius. Unum agnovisse videor, qui caloris gradus per patentes undique fenestras ferrum jam occuparent, quin adhuc pervasissent muros natura sua minus pervios, eos produxisse magis ferrum, prout erant initio graduum propiores. Sic die 3 februarii, dum thermometrum a gradu tertio efferebatur ad sextum, telescopia discesserunt intervallo maiore, quam die 23 maii, dum thermometrum a decimo attigit ad gradum decimumsextum.

32 Verum quid ni interea Condaminianam emendationem usurpemus, quamdiu accuratior non suppetit, quam adhibuerunt omnes, praesertim cum ad exiguam magnitudinem pertineat? Itaque numerum hexapedarum inter geminas quasque thermometri observationes numeratarum duximus et in numerum graduum, queis thermometrum superaverat gradum decimumtertium (etenim non plus vice una thermometrum defecit ab eo gradu) et in Condaminianam fractionem $\frac{1}{87}$; atque demta summa horum factorum omnium, magnitudine nempe exigua, a summa hexapedarum omnium positarum in basi tota, habuimus magnitudinem huius correctam ab errore, quem calor intulerat in hexapedam ferream.

33 Idem praestitimus pro corrigenda longitudine hexapedarum in perticis: nam crus circini adducebamus ad longitudinem hexapedae cuiusque AB, BC, CD etc., et pro

hexapeda quaque scribebamus in commentario centesimas lineae, quibus ipsa deficiebat a longitudine regulae ferreae, aut ipsam (quod raro evenit) superabat; atque centesimarum in hexapedis contractis summa minuta summa centesimarum in hexapedis productis errorem protulit, seu magnitudinem addendam basi toti, quo numeratae in ipsa hexapedae haberent jam debitam longitudinem.

34 Porro primum, quod inter metiendum fiebat regulae ferreae a thermometro examen, erat admodum expeditum: satis enim erat notare in commentario gradum caloris. Atque hic ut idem caperetur a thermometro, qui regulae ferreae contingebat, thermometrum regulae ferreae adposueramus in lectica conclusa undique tela cerata, in qua et supellectilem aliam basis mensioni necessariam deferebant baiuli duo.

35 Verum qui consideret, quanta esset opus patientia, ut, expedita a telis lectica, circini micrometrici crura adducerentur ad puncta A, et B in regula ferrea insculpta, deinde ut illa adducerentur ad puncta, quae in perticis limites sunt hexapedarum singularum (qua in re pro hexapeda quaque indicem micrometri reducebamus semper, ut jam dixi, ultra gradum regulae ferreae debitum) is certe jam non mirabitur, nos, nisi itinere adeo longo, non esse assecutos intervallum adeo breve, quantum distant Taurino Ripulae. Adde, neglexisse nos nihil, quod aut necessarium quoquomodo videbatur, aut etiam utile. Cum crura circini punctis A, et B jam insederant ambo, circinum elevabamus; tum suo puncto immittebat iterum crus sibi proximum Canonica, atque videbam ego, num puncto alio aliud crus recta insideret. Iterum elati circini crus

unum immittebam ego primus, mox monebat Canonica num consentiret et crus suum cum puncto suo. Quid quod et illud cavimus, ut qua positione fuerat lignea regula circini admoti ad regulam ferream, eamdem teneremus, cum ad perticarum hexapedas deferebatur?

36 Sed praeterea quoties longitudinem, toties examinavimus mutuam hexapedarum in perticis positionem: etenim, ubi hexapedae singulae habuissent debitam longitudinem, debebant praeterea esse positae in directum; atqui, utut perticae nostrae, qua forma, qua etiam insitis transversis e nuce laminis essent firmissimae, ut minimulam passae sint inflexionem, atque deflexionem, passae tamen sunt aliquam.

37 Itaque reposito in lecticam circino, Francalancia, et operarius aderant in promtu cum filo serico robustiore, atque cerato, ipsumque distendebant inter extrema perticae puncta; ego vero, et Canonica, supposito, adpositoque filo ipsi cultro, quem *fig. V tab. I* exponit, errores scribebamus ab inflexione, deflexioneque exsistentes.

38 Sed de cultro hoc distinctius primo loco dicam oportet: est enim Boscovichiano ad calculum paratior; rectus est in B, cathetus BC est lineas 10, BA 100; atque hae partes 100 a catheto AB recta translatae sunt in hypotenusam AC, insculptaeque ibi in uno margine, et numeris descriptae ad denarios quosque, imo et ad quinarios. Contra in margine alio insculpti sunt numeri istorum quadrati.

39 Igitur primo in B (*fig. VI tab. I*), deinde in C cultrum filo recta supponebam, ut ipsum attingeret; et scribebamus in commentario pro inflexionibus numeros quadratos, ad quos

pertingebat in cultro filum; quo in examine cultrum, inquam, haexapedae ita imponebam, ut catheto AB perticam tangeret, et plano suo ABC secaret ad normam longitudinem hexapedae; sed mox observaturus deflexionem, cultri planum ABC apprimebam hexapedae, atque ita constituebam, ut catheto AB subesset filo, et hypothenusa AC attingeret punctum, idest limitem hexapedae in lamina ex aurichalco; et numerum quadratum proximum *illi* limiti exscribebam ex cultro in commentario.

En typum adnotationis, quae refertur ad figuras VI, et VII tab. I.

		Inflexiones	*Deflexiones*
	AB	. . quad. *b*E	. . . . . quad. EB
Perticarum	DC	. . quad. *c*F	. . . . . quad. CF
	BC	. . quad. *b*E $\mp$ *c*F	. . quad. EB $\mp$ *c*F

40 Videlicet in iis figuris recta A*bc*D filum tensum exhibet; puncta B, et C loca, ad quae aberrant limites hexapedarum. Porro ex ipsis figuris liquet: I. Si inflexiones fiant ambae deorsum, et si deflexiones fiant ambae in idem latus, inflexionem hexapedae mediae fore solam *i*E differentiam duarum inflexionum, et deflexionem item perticae mediae fore solam *h*B differentiam duarum deflexionum: II. At si inflexiones fiant altera deorsum, altera sursum (id nobis nunquam accidit) inflexionem mediae fore summam duarum. Similiter si deflexiones extremarum fiant in latera opposita (quod nobis accidit, sed raro) deflexionem mediae esse aequalem summae

deflexionum pro extremis, scilicet aequalem summae ipsarum EB, et FC, seu toti E*h* (*fig. VII. tab. I.*).

41 Sed nunc id est planius dicendum, quare errores non simplos, sed quadratos usurpaverimus. Porro id praestitimus inter observandum, quando res nullam facessebat in nostro cultro difficultatem, ne efficeremus deinde in supputatione ipsa, quae res molestissima fuisset futura: etenim ad supputandum defectum hexapedae ex errore quoque necesse demum est defectum ipsum quadratum partiri per hexapedae longitudinem duplam.

42 Nam si centro A (*fig. VI tab. I.*), et intervallo AE hexapedae inflexae describatur circulus E*m*; segmentum diametri *bm* erit tertia in proportione continua post segmentum aliud diametri (scilicet post 2 AE quamproxime), et post ordinatam *b*E, nempe *bm* defectus rectae *ab* ab inflexa AE aequatur quadrato *b*E diviso per hexapedam duplam. Similiter defectus *i*F rectae ab inflexa EF aequatur quadrato *i*E diviso per hexapedas duas.

43 Sed et idem manifeste obtinet pro deflexione EB. Jam vero quadratorum *b*E, et EB summa dat quadratum B*b*, scilicet aberrationem integram quadratam, pro qua redit ille ipse aestimationis modus. Itaque si inflexiones, deflexionesque omnes quadratas notatas inter observandum pro hexapedis novem, quas continent perticae tres, agas in summam, atque hanc partiare per duplum hexapedae; qui exsistet quotiens, prodet defectum omnium; atque satis jam erit illum ducere in numerum 40, ut defectus totus emergat, qui exsistit ponendo in basi perticas centum viginti; quibus positis solebamus,

uti dixi, iterum regulam corrigere ex thermometro, et perticas ad filum iterum exigere, et ad cultrum.

44 Atque hoc omni inflexionum, atque deflexionum examine id postremo sumus assecuti, ut emendationem colligeremus { in itu pollic. 1 lin. 5, 35
in reditu pollic. 1 lin. 4, 08, quae erroris totius exilitas demonstrat ipsum negligi tuto potuisse, multoque etiam magis negligi potuisse errorem similem, qui exstiterit aliquis ex mutua integrarum perticarum inflexione, et deflexione. Nam numerus errorum singularium, ex quibus potuit coalescere hic totus, est triens errorum singularium, ex quibus coaluit totus error ex inflexione, et deflexione mutua singularum in pertica quaque hexapedarum; magnitudo vero illorum ob interpositam in perticis recta, et ad libellam componendis diligentiam, horum magnitudinem assequi non videtur; praesertim cum quadrata earum inflexionum, et deflexionum per numerum iterum triplo maiorem debeat dividi, idest per hexapedas sex.

ARTICULUS V.

Basis productio.

45 Mensionem basis in itu habitam, quae est hex. 6051, 01, sumere constituimus, non quod terrestrem arcum protrahere studeamus: nam modicum est huius incrementum, quod ab hexapedae partibus 0, 21 advenit; sed quod in reditu, etsi impenderimus dies decem, quo tempore vix longius insumserunt alii basium mensores, visi tamen simus pro adhibita in itu di-

ligentia venire paullo festinantius. Adde duobus ultimis diebus perdurasse nos in opere absolvendo affecta jam valetudine; praeterea aequabiliore in itu caelo usi sumus. His, inquam, de causis basim in itu dimensam delegimus; caeterum qui amet mensionem aliam, aut malit sumere magnitudinem mediam, poterit quam facillime et basim, et arcum totum mulctare modica magnitudine pro mensionum differentia omnino modica.

46 Jam vero, etsi hexapedarum numerus 6051, 01 bases dimensas ab aliis aut proxime attingit, aut etiam superat, nequivimus tamen in ea acquiescere. Nam recta haec dimensa (*fig. VIII tab. I*) *rt* jacet tota in solo depresso, impeditoque hinc inde ab ordinibus arborum tum earum, quae viae adstant perpetuae utrinque, et ad aequa intervalla, tum aliarum, quibus ager omnis est consitus; praesertim vero ad metam Ripulinam plagam borealem occupat clivulus, quem a *gaudiis* nominant villici Ripulini: vere enim est vineis laetissimus.

47 His ex incommodis cogitavi, quod sapientes faciendum monent, num utilitas capi posset aliqua. Atque statim cognovi, capi posse non mediocrem, si, dum basis evehebatur in loca apertiora, produceretur adhuc ad longitudinem maiorem, eaque interea diligentia produceretur, ut pars adjicienda parti auctae nihil longitudinis suae certitudine concederet. Dumtaxat die tertia Iulii anni 1762 hoc fecimus primum basi dimensae *rt* additamentum *r*R, quo conscendimus in elatum, ipsumque patentissimum solum ante Regium Ripulinum palatium: etenim structurae, atque examini quadrantis, ac sectoris vacare debueramus, et stationum delectui.

48 Itaque primo marmor deteximus, quod in *r* infoderamus;

mus; deinde partem basis *r b* remensi sumus (vetuit soli declivitas ne maiorem remetiremur, nam clivum *c* praeterea non cernebamus) ad hexapedas 173, 40. Tum virgam ereximus in R, nempe in elato ante Ripulinum palatium solo, quae esset in directum posita cum basi *r a*; et virgam similiter constituimus in clivo *Gaudiorum c*; postmodum quadrante coepimus et singulos in duobus triangulis *brc*, *rc*R angulos, et depressiones, altitudinesque mutuas loci cuiusque ex loco alio quoque.

49 Atque hoc etiam ex experimento cognovimus quadrantis nostri veracem mensuram: nam in utroque triangulo summa captorum angulorum vix sex secundis superabat rectos duos. Duplicem autem adhibebamus in his angulis capiendis diligentiam. Primo quidem ut centrum quadrantis in vertice ipso inesset anguli capiendi: nolebamus enim correctione indigere praesertim in minoribus his triangulis, quam, patientia adhibita, evitare poteramus.

50 Deinde vero capto angulo quoque, telescopium mobile semper adduximus ad virgam illam, ad quam tendebat telescopium fixum; atque angulum minimulum, qui, telescopiis ita collineantibus, exstitit semper aliquis, et is pro maiore distantia minor, semper subduximus ex toto angulo capto, atque ita captum correximus. Porro exilis hic reliquus angulus prodibat a distantia telescopiorum alterius ab altero, quae ad latera exiguorum huiusmodi triangulorum proportionem habebat non contemnendam.

51 Re, inquam, ita acta, summa angulorum trium in triangulo *r b c*, itemque in alio R*rc* exstitit inter perpauca secunda aequalis 180°:

itaque ex latere *br* hex. 173, 40,
ex angulo *brc* 89°. 48′. 30″,
et ex angulo *rbc* 71. 6. 5,
assecuti sumus latus *rc* . . hex. 501, 60.

In triangulo *rc*R ex dato latere *rc* hex. 501, 60,
et ex dato angulo *cr*R 90°. 20′. 0″,
et angulo *rc*R 53. 52. 10,
obtinuimus latus R*r* . . . . hex. 363, 26.

52 Verum hoc latus ad basim nondum pertinebat longitudine sua omni. Quod, dum explico rationem basis dimensae, necesse est me hic persequi paullo distinctius. Scilicet si solum *rt* fuisset dispositum aequabiliter, ceu est aqua in facie maris, plane circuli arcum perticis nostris dimensi fuissemus: nam, uti dixi, basis nostra est quamproxime in parallelo; sive autem figuram telluris ponas elatam ad aequatorem, sive malis productam ad polos, sectiones parallelae aequatori circuli semper sunt. Praeterea et sectio ipsa aequatori normalis, uti innuam suo loco, vix, ac ne vix quidem a circulo osculatore aberrat per intervallum gradus unius integri.

53 Itaque in ea hypothesi soli aequabilis perticae singulae a nobis positae totidem tangentes fuissent arcuum infinite parvorum; adeoque illarum summa arcus totius longitudinem totam exaequasset. Sed id debuit obvenire in basi nostra ob modicam ipsius inaequabilitatem: nam terminus Ripulinus *r* basis dimensae, de qua agimus, non est elatior termino Taurinensi *t* hexapedis 54, 24, atque arcus circiter, 6′ 50″, quot est nostra basis, vix augeretur sensili parte hexapedae,

si totus ad radium pertineret auctum ea tota altitudinum differentia.

54 Itaque hexapedae in basi *tr* numeratae aequant arcum, imo vero aequant et chordam arcus ipsius: nam arcus minutorum 6′ 50″ chordam non superat $\frac{1}{10000000}$. Quare ut R*r* pars adjicienda consentiret cum parte dimensa, et poneretur ipsi in directum, ex inclinata R*r* elicienda erat *rs*, sive *ux*, quae inesset in horizonte. Atque haec quidem erit recta arcum basis tangens in extremo puncto *x*, seu chordae, si mavis, adjecta; neque summa tota ex *tx*, et *ux* ab arcu toto *tu* differt, aut a tota corda totum ipsum arcum subtendente.

55 Igitur ex capto angulo R*rs* altitudinis virgae Ripulinae supra punctum *r*, eoque emendato ex angulo depressionis, redactoque adeo ad . . . . 5°. 15′. 45″,
et ex cognita hypotenusa R*r* hex. . . . 363, 26
in triangulo rectangulo R*ur* inventum est latus *ur* 361, 72,
quo adjecto ipsi *tx* basi dimensae hex. 6051, 01,

exsistit jam basis producta *tu*, et jacens in horiz. hex. 6412, 73.

56 *Sed* etiam in termino alio Taurinensi *t* producere debuimus basim, imo et dimovere in latus, quo terminum haberemus in loco longe patente, in vallo nempe, quod portae Segusinae huius urbis proxime adjacet ad austrum. Principio quidem institueram recta solum ipsam basim producere urbem versus in locum ab impedimento omni expeditum, quod arbores objiciebant adstantes; itaque erexeramus in *a*

Porta Susina.
elle n'existe plus, les remparts étant démolis.

trabem altam hexapedas tres, atque vertici ipsius affixeramus laminam ferream stamno imbutam, pedes quatuor latam, quam laminam erat Taurini homo admodum diligens, qui recta stationibus objiceret, ad quas pergebamus. Sed cum ad collem *Timonis* prope Ballangerium, plane ad stationes deligendas, venissemus, illinc signum huiusmodi cernere nullo modo potuimus; quare aeque altae trabi linteum aptari jussimus, et signum constituimus in vallo. Jam vero hanc basis translationem nemo, arbitror, dubitabit, ne errore aliquo inficiat arcum nostrum terrestrem, nisi qui ignoret, quam tuto res possit exigi nullo erroris sensilis periculo.

il colle del Timone

57 Certe nos diligentiam adhibuimus omnem. Dimensi sumus primo loco partem *ta* basis protractae in *a*, quae exstitit hexap. 76, 29 (transversus rivus, mox solum declive, et fossae ad moenia vetuerunt, ne longius intervallum metiremur); deinde in triangulo T*at* angulos coepimus, atque correximus similiter, similique successu, ac feceramus in duobus ad occasum triangulis. Jamque fuit in proclivi

	latere *ta*	. 76, 29,
ex datis	angulo *t*T*a*	42°. 8′. 23″,
	angulo T*ta*	38°. 8′. 1″,

invenire latus *a*T . . . . 70, 21.

58 Hinc Canonicae placuit ex datis lateribus *a*T, *ta*, et angulo T*at* . . . . 99°. 43′. 36″.
invenire latus *t*T = hexap. . . . . 112, 07.
Placuit mihi ex datis T*aq* complemento adjacentis ad duos rectos, *q*T*a* complemento huius ad 90°, invenire *q*T, et *qa*, hanc adjiciendam basi, illam basi normalem, ad assequendam

in triangulo rectangulo *uq*T ex data basi *qu* progrediente per viam, et latere *q*T jam supputato, hypotenusam T*u*, seu basim translatam. Sed Canonica recta in triangulo obliquangulo *ut*T ex latere *ut* 6412, 73,

alio *t*T 112, 07,

et angulo *ut*T 141°. 51'. 59",

recta, inquam, ad eamdem intra easdem centesimas venit, quam ego, basis translatae longitudinem hexap. . 6501, 26 RT

59 Dicere non mittam productionem, elationemque basis ad Ripulas nos iterum expendisse die 14 octobris anno 1763, partem basis esse iterum remensos parte *rb* paullo maiorem; iterum positis virgis coepisse angulos singulos, et singulas depressiones, altitudinesque mutuas, atque prodiisse iterum *r*R longitudine eadem.

CAPUT II.

QUADRANS.

ARTICULUS I.

Quadrantis compages ferrea.

60 Quadrantem perfecit nobis Francalancia firmitate singulari, et mobilitate ad angulos capiendos expeditissima. In compage ferrea dimensiones Boscovichii tenuit. Itaque regulae ferreae omnes, atque item limbus sunt in crassitie lineas quinque; sed amplitudo duarum regularum AB, CD (*fig. IX tab. I*) est lineas triginta; regula media HK est lineas triginta sex ampla: duae vero, quae a tergo recta ipsi affiguntur, conficiuntque firmissimum canalem (*fig. XIII tab. II*) altae sunt lineas septendecim.

61 Duae regulae AB, CD (*fig. IX tab. I*), sunt ex unica ferrea massa; limbus EFG, atque regula canalis HK coëunt cum illis in compagem unam firmissimam transversis clavis pluribus vi repercussis; regulae, quae faciunt latera canalis, coëunt cum ipso fundo HK insertione mutua exstantium dentium in aptas cavitates. Praeterea adfixae sunt canali interius laminae binae bis singulae reflexae ad normam, ut cum lateribus, atque cum fundo cohaereant. Verum quadrantis limbo adjungendum adhuc fuit firmamentum, ne distorqueretur ullo modo in extremis suis partibus a pondere suo, aut ab illata pressione, vel etiam agitatione.

62 Nam ubi primum hoc, quod hactenus descripsi quadrantis rudimentum, absolutum fuit, imposui ipsum mensae, ut jaceret in horizonte, et lateribus canalis incumberet, tum distendi argenteum tenuissimum filum inter extrema limbi puncta; mox a lamina quadrantis centro imposita, quae ad limbi planum assurgebat, diduxi filum aliud simile, atque observavi: si limbus in terminis suis illis a suppositis cuneis suffulciretur, circumductum a centro filum lambere ubique filum aliud, et limbum (fuerat enim hic diligentissime exactus ad planum unum); sin cunei semoverentur, filum a centro, dum apprimebatur ad limbum in G, minimulo intervallo aliquo distare a filo inter puncta limbi extrema E, et G tenso. Quare intellexi partes limbi FE, FG inflecti aliquatenuus a pondere suo; impositis vero in E, et in G massis, quae penderent libras duas, certius evasit mihi illud filorum intervallum, atque inflexionem limbi agnovi quam certissime. Quae res fecit, ut ferrum in quadrante Boscovichii rigidius supponerem, atque ut nostro ex materia molliore fulcrum adjungerem, vectem scilicet, qui literis distinguitur RSSTTU (*fig. XIII tab. II*). Is in R, et U complanatus est in rotundam formam, et robustis cocleis duabus adstringitur limbo; ab R, et U accedendo ad canalem altitudine est usque, et usque maiore, ceu sunt brachia in bilance; in S et S, in T et T discedit in laminas duas, quibus canali nectitur exterius; prope has laminas excisus est ipse in semialtitudine sua tota, atque ibi excisa sunt similiter in semialtitudine sua latera canalis. Quare iis incisionibus mutuo excipiunt se semialtitudines reliquae canalis, et vectis. Huius autem pars crassior, et rotundata

fundo canalis affigitur coclea robustissima, interea dum lateribus annectuntur cocleis ipsis etiam firmitate ingenti laminae S, S, T, T, quae ex vecte exstant veluti alae quatuor. Adjuncto hoc vecte, experimentum iteravimus argenteis filis; neque praeterea ullam ab impositis ponderibus percepimus in limbo flexionem.

63 Itaque fulcrum perfici curavimus, et compagem omnem machinularum, quibus quadrantis motus omnes fiunt, et continentur (*fig. XIV tab. II*). Fulcri columna est ex piro, diametro minima pollices sex. Pedes roborei annectuntur imo columnae scapo; primo quidem singuli cocleis singulis trans scapum actis, appressisque a matricibus robustissimis; deinde coclea singuli alia firmantur, quae pedem quemque pertundit deorsum, initque in foramen laminae ferreae, quae exsistit ex anulo ferreo ambiente scapum imum columnae. Haec ad firmitatem. Ad elationem autem fulcri, aut etiam ad inclinationem ipsius faciunt cocleae aliae tres, quae per pedes extremos incumbunt ligneis discis tribus.

64 Etiam summus fulcri scapus anulo ferreo robusto, et ad summam levitatem tornato circumvincitur. Reliqua, quae restant describenda, inserviunt omnia motibus quadrantis tribus, queis potest et circuire in horizonte, et rotari in plano ad verticem, et inclinari ad planum aliud quodlibet. Delineantur autem omnia grandiori modulo in *fig. XIV tab. II*, atque maiusculis ibi characteribus distinguuntur seorsim, quae aptantur simul in *XIII*, et innuuntur literis iisdem, at minusculis.

65 Itaque I. A est cylindrus cavus metallicus cum nexo disco metallico: hic torno etiam exaequatus est, et cocleis

tribus

tribus summo fulcri scapo affigitur. II B est cylindrus solidus metallicus, qui immissus in cylindrum cavum A facit cardinem verticis (verticem enim spectat); sed eius conversione quadrans circuit in horizonte. III Ex summo eo cardine B exsistit robustissima lamina ferrea CD inflexa utrinque ad normam in CE, et in DF, quibus cum exstantibus partibus CE, DF coëuntes ad latera laminae duae G, H forcipem conflant robustissimam, qua excipitur cardo horizontis LK. IV Etenim duae laminae G, H converti possunt quadantenus ambae circa robustos clavos, quibus et ipsae transfodiuntur juxta longitudinem in ima parte; et trajiciuntur interea etiam rectangulares massae prominentes ex facie superiore laminae CD. Praeterea illae eaedem laminae G, et H cavatae sunt interius in formam cylindricam, qua cum cavitate aptissime congruit cardo horizontis LK: est enim intra eas cavitates smiride expolitus. Quare, dum laminas G, H vel hilum premis coclea I, adstringunt ipsae cardinem quam firmissime, ne praeterea nutet. At si cocleam vel minimum laxes, continuo cardo horizontis convertitur quam facillime, et motu admodum aequabili; scilicet quadrans convertitur interea in circulo verticis. Atque polituræ huius cardinis, et forcipis firmitati singulari, intereaque etiam mobilitati illius quantulaecumque hoc acceptum refero bonum in usu nostri huius quadrantis, quod ipsum, proposito quoque motu minimulo, adduceremus quam facillime ad positionem quamvis propositam.

66 V Sed restat explicandus motus inclinationis. Iste fit circa verticulas L laminarum U, et X, quarum altera U cohaeret cum cardine LK, altera X adfigitur fundo canalis;

absolvitur vero partim tractione vectis Q, qui summam quadrantis partem potest deprimere quantumlibet ad cardinem LK. Scilicet cardo LK jam districtus a forcipe parte sua quadrata K subit intra quadratum foramen massae ferreae KMN, atque in eo continetur a coclea. Intra auriculas vero M, N converti potest circa adpositos axes ingens matrix ex aurichalco O, quae excipit ingentem cocleam P. Cavata est haec ingens coclea quadrato foramine, per quod foramen ingreditur vectis ferreus Q, atque hic cohiberi potest ubilibet a minore coclea pervadente per cocleam maiorem P. Denique pars summa vectis Q rotundata a transverso clavulo continetur intra foramen massae R volubilis circa axes infixos lateribus canalis.

67 Itaque trahendo vectem *q* (*fig. XIII tab. II*), quadrans jam proxime inclinatur ad propositum planum; tum appressa vecti coclea maiore, inclinatio quadrantis exigitur adamussim rotatione vectis, scilicet rotatione cocleae maioris *p* jam cohaerentis cum vecte intra matricem *o*. Similiter laxatis cocleis *i*, et *y* quadrantis circuitio, et rotatio promoventur, quatenus est necesse, intervallo minimulo quantulocumque, atque iis appressis cohibentur. Incredibile vero est dictu, compages haec omnis quantam nobis pararit in angulis capiendis facilitatem; vix circuitione, et rotatione quadrantem adduxeramus ad plagam propositis objectis oppositam, continuo tractione vectis inclinationem habebamus jam proxime definitam; tum vero adstantes nos telescopiis quadrantem agere quam blandissime circa levissimos cardines duos, et edicere Francalanciae, quantum, et quam in partem rotare debebat vectem; verbo: citius angulos capiebamus, quam captos consideratione definiremus, atque scrip-

tione referremus in commentaria. Verum quid festino hic ego dicere de angulis, quadrante nec dum gradibus distincto, aut dioptris instructo?

ARTICULUS II.

Lamina limbi, partitio quadrantis, partitionis examen primum.

68 Compage omni sejuncta, de qua hactenus dixi, Francalancia ferreo limbo apte, amplissimeque excalefacto adjunxit laminam ex aurichalco ductili planam, et minime squammosam, stamno ubique interfuso. Etenim juncturae genus, quod fit frequentibus aeneis clavulis, non laudabamus, quod ea non videretur futura satis aequabilis, et vereremur, ne clavulorum perimetri turbarent alicubi lineas partitionum. Adjunxit similiter laminam ex aurichalco crassiorem angulo quadrantis, quo designatum centrum assurgeret jam propius ad planum limbi; atque tum omnia non tam limabat, quam dolabat, exigebatque accurate ad unum planum amplis, planissimisque scobinis ad id opus tenuiter incisis. Profecto planitiem est assecutus adeo absolutam, ut cum ad examen filorum deveniremus, organopeo gratularemur, gauderemusque ipsis nobis, qui in spem jam erigeremur assequendi instrumenti optimi.

69 Lamina centri, quam mox memorabam, immittebat solidum cylindrum suum in laminas quadrantis apte perforatas. In hoc cylindro post longum, et multiplex tentamen perfecit denique Francalancia foramen quadantenus conicum, cetera

leve, rotundum, rectum plano quadrantis. Conus truncatus item ex aurichalco, sed basi summa chalybea tornatus quam diligentissime, ut cum foramine congrueret ad unguem, dedit centrum quadrantis in puncto insculpto in summae suae basis centro.

70 Itaque partitionem jam moliri Francalancia, nos ipsi exhibere in centesimis lineae, quanta esse deberent intervalla circulorum, posito pedum trium radio circuli extimi. Etenim dato radio CD (*fig. XV tab. I*), datur arcus DE contingens angulo minutorum decem BCE: datis vero praeterea lateribus adjacentibus BC, CE, radiis scilicet circulorum intimi, et extimi, invenitur angulus CBE. Hoc autem dato, assumtoque alio BC*d* unius minuti, mox BC*f* minutorum duorum, singulis analogiis inveniuntur singuli pro circulis mediis radii. Intervalla haec in quadrante nostro etiam minora inter circulos interiores sunt satis magna, ut secunda aestimari possint quamproxime: totum enim intervallum inter circulum intimum, et extimum aequat pollices duos, lineas quatuor.

71 Profecto descripsit hos circulos, vel potius arcus Francalancia tenuitate singulari, aequabilitate summa; quod partim effectum est a perfecta laminae ductilitate, qua convestiverat limbum, partim arte, et industria assecutus est sua: nam ipsi vectis ferreus erat pro radio circini micrometrici; cruri autem annexuerat robustam, acutam, perbrevem ex chalybe aciem, quae ultra altitudinem minimulam pervadere praeterea non poterat laminam.

72 Simili accuratione perrexit deinde describere radiorum segmenta pro gradibus singulis; et ne in transversarum qui-

dem earum subtilitate ubique simillima quidquam habuimus, quod desideraremus, quibus dena quaeque minuta inter arcus extremos comprehenduntur, et minuta singula distinguuntur inter arcus proximos. Quod si aberrasset omnino nullatenus in harum transversarum positione, partitionem confecisset omnino optimam. Ipsi finem fecit Francalancia, numerum graduum inscribendo a laeva ad dexteram juxta circulum intimum, et ductu contrario a dextera ad laevam juxta circulum extimum. Nos his ultimis numeris usi sumus in capiendis polygoni angulis; nempe initium graduum constituimus, uti decebat, prope telescopii fixi locum, atque hinc perreximus numerare gradus usque ad nonagesimum in parte alia extrema quadrantis: etenim axis telescopii fixi erat terminus communis angulorum omnium. Quare in numerando debuissemus interponere subtractionem, si telescopio fixo adposuissemus gradum nonagesimum; maluimus autem subtractionem adhibere in angulis altitudinum, atque depressionum, qui ad perfectam polygoni dimensionem non adeo proxime pertinent.

73 Interea vero, antea quam telescopia quadranti adponerentur, nos partitionem primo examine expendimus, quo, nisi metiremur ad unguem admissos errores, quanti essent singuli, ipsos tamen pervideremus omnes, quales essent, et quam in partem, et quantum mali ab ipsis esset pertimescendum, agnosceremus, atque deliberaremus de examine alio accuratiore, et de errorum eorumdem emendatione absolutissima.

74 Itaque primo loco expendimus positionem centri ad arcum in limbo extimum. Immisimus in centrum quadrantis cylindrum illum ipsum, seu conum truncatum, quo usus erat

Francalancia; tum crure uno circini micrometrici immisso in insculptum centrum, crure alio attigimus arcum in limbo extimum, atque primo perspeximus huius cruris alterius apicem insidere ubique similiter in tenui eius extimi arcus sulco.

75 Deinde iteravimus idem examen, cono illo truncato converso triente gyri, atque denuo triente alio; et vidimus constare semper idem circuli extimi a centro intervallum.

76 Tertio loco perreximus expendere similiter arcus alios singulos, atque exscribere pro singulis magnitudinem radii, quam observabamus. In hac autem errores non invenimus nisi incertos (maximus enim non assurgebat ultra centesimas lineae partes tres); qui adeo erat dubitandum, inessentne in illis quadrantis radiis, an a circino ipso nostro micrometrico proficiscerentur, qui utut accuratus esset in se, et per adpositas lentes diligentissime consideraretur, evidentiam tamen non adferebat in illa exilitate particularum, et numero omnino modico. Praeterea in nostro quadrante duorum arcuum intervallum in magnitudine mediocri est lineas 2, 80, quod si minuas, vel augeas centesimis tribus, aestimatio secundorum, quae consistere deberet in eo intervallo 2, 80, protendetur ad 2, 83, vel contrahetur ad 2, 77; quare si angulum capias in limite illo ipso, in quo intervallum vel ampliatur, vel arctatur, et in quem adeo limitem coit error totus, non peccabis ad minuti tertii trientes duos.

77 Venimus quarto loco ad consideranda radiorum segmenta, num ipsa scilicet ad centrum quadrantis recta pertinerent. Itaque Canonica argenteum filum trahebat ultra centrum, ut per centri punctum transiret, trahebam (ego ultra limbum, et

lente acuta admodum perspiciebam, num puncto uno tenuissimi illius fili transeunte per punctum segmenti extremum, juxta segmentum totum excurreret aequabiliter; atque ne in hac quidem parte invenimus, quod reprehenderemus: etsi enim filo uteremur omnino tenuissimo, per modulos tracto supra modum angustos, illa tamen segmenta radiorum invenimus omnia ita tenuia, atque ita ad centrum recte posita, ut, consentiente puncto uno fili cum puncto uno segmenti, operiretur hoc a filo totum, et filo minimum dimoto in latus unum, limes sulci, quo segmentum ipsum erat descriptum, exstaret aequabiliter ex latere alio.

78 Itaque processimus ad consideranda in circulo extimo intervalla eorum segmentorum, quibus gradus continentur: quam rem exegimus similiter, ac si ipsi nos quadrantis partitionem conficere vellemus. Circino micrometrico coepimus iterum distantiam circuli extimi a centro; tum crure uno apposito in ipso graduum initio, vidimus apicem cruris alterius cadere in punctum gradus sexagesimi, atque ipsi plane insidere: puncta autem erant eadem, qua lineae radiorum, atque arcuum, tenuitate; altitudinem habebant in loco suo medio paullo maiorem, erantque ibi acutiora. Adduximus ergo circinum ad intervallum primorum graduum triginta; atque vidimus eodem intervallo insidere iterum a trigesimo in sexagesimum, et a sexagesimo assequi ad unguem nonagesimum. Orsi iterum a graduum initio adduximus crus mobile circini ad gradum decimum quintum; atque inde progressi ad trigesimum, ad quadragesimum quintum, ad sexagesimum, septua-

gesimum quintum, sumus denique assecuti iterum gradum nonagesimum intervallo constanter eodem.

79 Atque haec, quae paucis hic ego narro, et festinanter, non nisi lente admodum, et plurium horarum opera peragebamus. Nam non ita subito verissima intervalla constituebamus graduum triginta, et deinde quindecim (intervallum enim graduum sexaginta radius ipsum dabat certius), atque error minimulus, quem admitteremus in capiendo intervallo primo fiebat a progressione multiplex; quae res in multas agebat nos anxietates. Difficultatem autem constituendi intervalli primi faciebat paullo maior latitudo, et limes non certissimus puncti eius, quod est initium graduum; scilicet multiplex eius puncti disquisitio, et examen, in quo haerere debuerat artifex, amplitudinem auxerat, et laeserat rotunditatem in ipsa tenuitate necessariam. Hinc ergo fiebat, ut posteaquam multum temporis impenderamus in eo intervallo divinando, etiamsi reliqua evenirent postmodum aequalia, dubitaremus tamen adhuc de primo, et examen iterum, atque iterum ordiremur; quamdiu tandem certum hoc intelleximus praesto esse testimonium intervalli bene capti: videlicet, quoties intervallum debitum coepissemus, toties crus circini micrometrici paullisper elatum a puncto primo radio primo acuto cuspide suo respondere; atque idipsum evenire, quoties ex intervallo aliquo sequente redibamus ad primum.

80 Sed multo adhuc longius, atque operosius fuit deinde examen reliquum intervallorum minorum, ad quae capienda usuvenire praeterea non poterat circinus micrometricus. Itaque circino communi usi sumus, cuspidibus extrema parte acutissimis;

simis, ceterum firmis, ne tremerent; atque trito hoc, sed si apte adhibeatur, ingenuo admodum instrumento denorum, quinorum, ternorum, ac denique etiam singulorum graduum examen hoc primum absolvimus; atque, quoad acutae lentis praesidio cernere potuimus, unum invenimus male positum radii segmentum, illud nempe, quod est limes gradus sexagesimi secundi. Hoc erat, uti postmodum definivimus, secunda viginti circiter propius initio graduum, quam quod oporteret. Verum is error non protendebatur ultra gradum sexagesimum tertium: nam quo spatio ampliabatur gradus praecedens, eodem hic contrahebatur. Alibi autem intervalla invenimus ad unguem aequalia omnia.

81 A gradibus venimus ad transversas considerandas, in quarum inclinatione vel a principio vitium subesse aliquod perspexeramus, tenue ipsum quidem, sed una re minus molestum, quod constaret ubique idem. Nam intervallum quodque graduum proximorum partitus Francalancia in extimo circulo pro minutis denis in intervalla aequalia sex, missam fecit partitionem similem in intimo, adblanditus sibi, posse se ipsam supplere inclinatione regulae, qua erat ducturus transversas.

82 Videlicet ferratae regulae, quam ad describenda segmenta radiorum circumduxerat circa axem chalybeum rectissime exstantem e centro quadrantis, breviorem, et omnino aptissimam regulam chalybeam annectere studuit ea, quae transversis debebatur obliquitate; verum inclinavit paullo minus. Atque hinc factum est, ut cum transversa in gradu quoque prima attingeret radium in circulo extimo, ultima in circulo intimo a sequentis radii segmento intervallo distaret minimulo.

quidem, sed quod ob sulcorum tenuitatem nudis etiam oculis cerneretur, ubi praesertim ad vitium illud minuendum vitium non intulerat aliud, distractionem nempe regulae eius inclinatae a centro punctorum in circulo extimo.

83 Quare, dum in hac re artifex studuit laboris sui compendio, laborem nostrum exaggeravit, et vero etiam suum. Nam per sesquimensem debuit deinde consectari in centesimis lineae partibus magnitudinem chordarum, quae in quadrante contingebant arcubus omnibus 5°. 10′; 5°. 20′; 5°. 30′; 5°. 40′; 5°. 50′; 5°. 60′. Etenim, quamquam et levissimus esset, et perbrevis circinus micrometricus, quo rem conficiebat, nequibat tamen ipso capere intervalla minora, praesertim quod tubos adjunxisset cum lentibus. Itaque primo a graduum initio chordas coepit ad dena quaeque minuta in gradu sexto; mox perrexit capere a primo gradu ad dena minuta in gradu septimo; atque ita deinceps usque ad quintum, qui etiam in quadrante describebatur supra nonagesimum. Ad primos quinque gradus, quod attinet, eos expendit ordine retrogrado; atque eorum errorum omnium tabulam ubi exhibuit nobis, vidimus ipsum nos experientem in locis pluribus; et cum tabula perbelle consenserunt, quae ab his ipsis experimentis obvenerunt longitudines chordarum.

84 Tum vero nos eas ex tabula chordas contulimus cum veris; atque prona jam inde fuit errorum correctio: nam, si in *fig. XX tab. I*, AB sit chorda vera, ceu 5°. 10′, AC sit falsa; BD differentia earumdem erit latus minimuli trianguli BDC in D recti; atque angulus DCB erit 87°. 25′: est enim complementum ad 90° anguli DBC, cuius mensura semiarcus

ACB, nempe 2°. 35′; itaque emergit analogia admodum ingenua: uti sinus DCB ad DB, ita sinus totus ad BC; error autem arcus in centesimis lineae scitur, quot secundorum errorem inferat.

85 Atque in hac ipsa calculi facilitate compendia praeterea plura sunt obvia, tum quod pro chordis quibusque veris, et aequalibus constet idem angulus BCD, tum quod pro iisdem eadem saepe redeat differentia BD; tum vero etiam, quod ferme subito internoscatur, quae debetur tenuium errorum differentia iis differentiarum differentiis. Quapropter erroribus exploratis ad dena quaeque minuta, unum fuit reliquum, ut ipsos in minuta singula distribuiremus, quod inter scribendum confecimus: ipsa enim falsa inclinatio constabat, uti dixi, ubique eadem.

ARTICULUS III.

Pendulum, telescopium fixum.

86 Axem telescopii fixi posituri parallelum radio primo debuimus ordiri a penduli suspensura. Trochlea ex aurichalco D (*fig. XII tab. I*) habet sibi rectum a tergo conum truncatum penitus congruentem cum cavitate in centro quadrantis; in facie vero defert adnexam cochleis regulam ex aurichalco quater inflexam ad normam, ut parte sua media promineat; atque haec pertusa est foramine, per quod acus chalybea cuspidem suam recta immittit in acutissimum punctum alte insculptum in centro trochleae. Haec omnia ita ad unguem confor-

mata sunt, atque posita, ut axis coni truncati, et axis acus consentiant in unam lineam per centrum quadrantis rectam plano ipsius. Praeterea acus prope labrum foraminis, cui cuspide sua inhaeret, tornata est ad rotundam levissimam cavitatem, cui advolutum laxiore nodo filum penduli argenteum consentit cum radio quovis quadrantis rotati in plano ad verticem. Consueto id examine vidimus: etenim dum acus blande convertebatur in suo loculamento, filum penduli a proposito quovis radio, quicum congrueret, non discedebat, aut ad eumdem sponte redibat, et brevi. Etenim pendulum stagnanti mergebatur in poculo U, et canaliculus CC laminis RE, RE poculo annexus ventum defendebat a filo tota ea longitudine, qua a centro D exporrigebatur ad limbum; interea vero haec omnia anulo AA suspensa volubili circa trochleam D motui penduli obsecundabant.

87 Parato pendulo in id incubuimus, ut directo ad verticem primo quadrantis radio *ap* (*fig. IX tab. I*) axem tuborum telescopii fixi NO filo penduli parallelum constitueremus; quod erat obventurum, si filum penduli alterius in ea quadrantis positione consensisset cum axe tuborum.

88 Tubus micrometri, qui grandiori modulo exhibetur in *fig. X tab. I*, constat ex partibus geminis A, B annexis utrinque thecae *t* micrometri *t*Q. Faciunt hanc thecam crassiores laminae duae ex aurichalco penitus excisae iuxta cavitatem tuborum. Praeterea ipsarum una interius, et ad latera cavata est sulcis rectis parallelis deferentibus cursorem; perimetro tubi unius paullulum exstanti ad cursorem annexa sunt, atque lamellis apte distenta fila argentea duo, quae in centro de-

cussant se ad normam, ut eorum unum sit postmodum parallelum, alterum vero quadrantis plano rectum; proxima his filis cursor defert fila argentea tria parallela uni illorum omnia, adeoque parallela etiam inter sese. Est autem cursor compages trium chalybearum regularum; ex loco medio regulae mediae exstat ad normam cochlea item chalybea helicibus tenuibus, et maxima aequabilitate. Cochleam hanc excipit matrix ex aurichalco, quae indicem circumfert supra laminam Q, et ampliore sua parte insidet in rotunda cavitate laminae Q; haec ideo est gemina. Itaque a circuitione matricis cursor movetur.

89 Haec erant jam affabre constructa omnia. Partes tubi A, B habebant a torno axem positum in recta eadem, et rectum plano thecae; cursor obtemperabat aequabiliter motui cuivis minimulo matricis; praeterea partes geminae A, B jam insidebant anulis *n*, *n* prominentibus ex amplo mutulo M. Itaque radio primo quadrantis ad verticem, uti inquiebam, directo, mutulus M (ipsum hic, quo cerni possit situ inverso exhibemus) ita fuit adfixus lateri, atque faciei posteriori regulae ferreae CD (*fig. IX tab. I*), ut axis tubi AB (*fig. X tab. I*) ipse etiam verticem quam rectissime spectaret, quod non nisi longo tentamine perfectum est. Nam ostiis A, et B (*fig. X tab. I*) impositi sunt circuli ex aurichalco gemini pertusi in centro: filum argenteum trajiciens per ea centra trahebatur a pendulo librato in stagnante; igitur mutulus adfixus est in positione huiusmodi, quam commonstrabat filum argenteum trajiciens per foraminulum circuli inferioris, quin ullibi incumberet perimetro eius.

90 Fuit adhuc fastidiosior appositio tubi alterius, in quo lens ad objecta debebat denique insidere: nam filum argenteum demissum similiter debebat libere descendere per centra circulorum duorum, alterius, qui erat inferior in eo tubo, alterius, qui unus erat reliquus in ostio B tubi AB.

91 Sed positione demum recte constituta, certissimeque designata eorum tuborum, tum vero restituta sunt in micrometro fila, quae inter experiendum debuerant semoveri, tum inserti sunt minores tubi aptissime congruentes, alius cum lente ad objecta, alius cum ocularia (istae vero sponte venerunt ad debitas a micrometro distantias, quae principio fuerant ex observatione decretae); tum levissimus tubus aptis anulis interjectus est, qui opacaret omnia.

ARTICULUS IV.

Expenditur telescopium fixum.

92 Etiam mobile telescopium erat in promtu. Sed ne rerum ordinem abrumpam, pergo hic dicere de experimentis, quibus fixum expendimus. Quam rem, et examen praeterea quadrantis totius, observationesque alias plures, quae mensionem, imo et constitutionem polygoni videbantur debere praeire, exegimus Supergae, utpote aedito in loco porrecto ad stationes omnes, quas eramus delecturi, praetereaque percommodo nobis ad operis labores tolerandos, qui fuerunt certe immodici. Scilicet contubernio illic fruebamur nobilium eorum Sacerdotum, qui sacra faciunt in Regio illo templo, nec frue-

bamur solum subsecivis horis consuetudine eorum humanissima, sed et opera eorumdem utebamur, quam prae ceteris praestitit plurimam Joseph Incisa, qui nunc Plubii est Archiepiscopus.

93 Itaque quadrantem constituimus in monticulo, qui tum exstabat pedes quatuordecim supra templi pavimentum in distantia hexapedarum 83 praeter propter ab axe ipsius ad Notum; nunc solum aequatum est. Atque primo loco curavimus, ut fila micrometri recte ponerentur ad planum quadrantis. Scilicet hoc ad pendulum composito, micrometrum movimus in loculamentis quoad erat necesse, ut, dum filum unum congruebat cum latere recto remotissimi palatii, aliud consentiret cum corona ipsius; mox amplam tabulam convestitam charta, in qua rectae duae atramento pictae apta crassitie, ut cernerentur, ad normam se decussabant, ita objeci quadranti in vestibulo templi, ut altera verticem spectaret, adeoque altera jaceret in horizonte; atque centro micrometri directo in punctum binis iis rectis commune, vidi, fila ambo convenire ad unguem cum rectis ambabus. Atque in ea plane micrometri positione puncta conveniebant, quae insculpserat organopeus in tubo micrometri, et in continente loculamento ad rectam, prout ipse providerat, micrometri positionem designandam.

94 Venimus deinde ad consideranda in micrometro fila mobilia. Videramus jam antea, si punctum ipsorum unum congrueret cum puncto uno fili ad horizontem immoti, congruere ambo longitudine sua tota; videramus, distantium objectorum species cadere in fila ipsa micrometri, nec trepidare ullatenus utlibet oculum ad latera distraheremus; duo ferme restabant,

quae inquireremus, quos scilicet angulos subtenderet a revolutione quaque micrometrum, et num esset recte posita linea fiduciae, linea scilicet, quae centrum refractionis in lente jungit cum centro micrometri. Orsi sumus a disquisitione eorum angulorum, utpote qui usuvenire nobis poterant ad observandam hanc positionem.

95 Quamobrem quadrantem locavimus in declivitate monticuli, ut axis telescopii jacentis in horizonte libellam vestibuli pedibus octo superaret; tum a micrometro ad vestibulum dimensi sumus quam diligentissime hexapedas septuaginta. Hac in distantia quadranti recta objecimus tigillum octo pedum, alba charta convestitum. Rectam descripserat in facie eius Francalancia, atque in hac transversis paullo crassioribus, sed quae in appulsu ad eam rectam apte gracilescebant, tangentes distinxerat min. 1; 5; 10; 15, etc. Consuluimus appositum thermometrum, et tangentem minutorum triginta captam ex tigillo expendimus in hexapeda ferrea. Tum ego e tentorio directo centro micrometri ad initium tangentium in tigillo ad verticem erecto, qua in positione, uti monui, axis telescopii debebat esse in horizonte, coepi filum mobile distrahere ad intervalla tangentium; atque interea Canonica gyros indicis, et partes recensebat pro intervallo quoque. Ubi appuli ad tangentem minutorum viginti, filum mobile, quod hactenus depresseram, retraxi ad centrum, et coepi efferre e centro intuens in tigillum inversum ea cautione, ut initium tangentium pergeret congruere ipsi sibi. Re absoluta, Canonica, me gyros numerante, et partes, experimenta eadem coepit ea consensione, quae in re huiusmodi desiderari potest maxima. Nam

tan-

gentes reliquae supputatae ex tangente quaque observata sat bene conveniebant. Itaque distributis modicis differentiis quaesivimus, quaenam tangentes contingerent gyris uni, quinque, decem, etc.; tum eas a radio hexapedarum septuaginta traduximus ad radium tabularem, atque vidimus

gyris 1 deberi tangentes	1'.	13",	6.
5	6.	8,	3.
10	12.	16,	6.
15	18.	25,	0.

96 Neque mittam hic dicere, nos postmodum hanc tabulam expendisse ex stella polari. Scilicet centro micrometri excipiebamus ipsam appellentem ad meridianum, qua in re ob tarditatem stellae vix ullum subest errandi periculum; atque tempora notabamus, quibus ipsa filum mobile assequebatur distractum gyro uno indicis, dein duobus etc.: tunc enim ex datis in triangulo sphaerico PU*s* (*fig. XVI tab. I*) latere PU distantia poli a vertice, latere P*s* distantia poli a stella, atque angulo intercepto UP*s* eliciebamus latus U*s*, nempe stellae appellentis ad filum datis gyris distractum distantiam a vertice; atque huius lateris U*s* differentia a distantia US stellae transeuntis per meridianum in S proferebat arcum MS, seu mensuram anguli subtensi a micrometro. Porro haec est huius supputationis praestantia; errorem unius secundi in tempore, ex quo constituitur angulus horarius, non inferre errorem semisecundi in angulum micrometricum MS, quod differentiae lateris US rationem habeant omnino modicam ad differentias socias eius anguli.

97 Neque tamen hos angulos micrometricos ea sedulitate aestimatos adhibuimus deinde, quemadmodum a principio constitueramus, in definiendis angulis polygoni, tum quod experti deinde sumus obvenire ipsos veris intra secunda perpauca proximos ex partitione quadrantis considerata, emendataque; tum vero etiam, quod nobis lente quidem, ut aiunt, at vere tamen esset festinandum. Nam in hac nostra coeli inconstantia paullo maior cunctatio definitionem angulorum protrahebat ad dies plures, eorum praesertim, quos habebamus aliquos, ad stationes valde remotas.

98 Ad declinationen lineae fiduciae ab axe telescopii inquirendam, castigandamque, quae res festinationem nullam postulabat, usi sumus micrometro. Verum cautionem hic memorabo, quam in hoc experimento tenuimus, et quam adhibueramus in experimentis proxime superioribus, in quibus etiam objectae res erant positae ad distantiam hexapedarum septuaginta; videlicet tubum lentis ad objecta accurate tornatum ad capacitatem tubi fixi eo minimulo intervallo removimus a micrometro, quo erat necesse, ne prorsus a distractione oculi trepidarent rerum species. Retenta, inquam, hac cautione, et quadrantis plano ad pendulum semper composito, dreximus centrum micrometri ad tenuem, nigram, rotundam maculam pictam in charta proposita ad eam distantiam hexapedarum septuaginta; intereaque cochleas ad duos quadrantis cardines appressimus vi maiore, ne telescopium nutaret. Francalancia coepit deinde convertere quam lentissime tubum lentis ad objecta; atque species maculae a conversione integra descripsit circellum integrum M*c d a b*M (*fig. XXII tab. II*). Ego

filo mobili cepi tria intervalla; primo intervallum *ec*, quo macula a centro M maxime descendit, deinde intervallum *ch*, quo macula ascendit absolvens semigyrum M*cdm* (hunc cognoscebamus a semigyro tubi); tertio denique intervallum *ha*, quo macula perrexit ascendere post semigyrum. Summa horum trium intervallorum dedit diametrum totius circelli descripti a macula; atque intervallum ultimum *ha* dedit sinum versum anguli *mfa*, quo praeter semigyrum M*cdm* converti debebat macula, ut ipsa assequeretur punctum *a* in circello suo summum, atque adeo, ut axis refractionis in micrometro HUOI appelleret in A ad filum verticis UMI.

99 Etenim axis refractionis, linea nempe illa, quae jungit centra superficierum lentis ad objecta, ipsa est, quae, dum lens rotatur, speciem maculae abripit secum motu simili, et aequali in constanti a se ipsa distantia. Quare dum videmus maculam absolvere semigyrum M*cdm*, intelligimus axem refractionis puncto, quo ipsa appellit ad micrometrum, describere semigyrum FCD*f*; ubi quo arcu *ma* macula *m* distat a puncto summo *a* gyri sui, aequali *f*A punctum *f* axis refractionis post eum semigyrum distat a puncto A fili ad verticem UI.

100 Atque hac quidem ratione declinationem lineae fiduciae ab axe telescopii non abolevimus, sed ad planum compulimus, in quo esset omnino innoxia, ad planum scilicet, quod studueramus componere cum plano quadrantis. Nam inter adfigendos tubos telescopii contenderamus axem ipsius ponere parallelum radio primo; atque in hoc ultimo experimento

filum verticis, ad quod adducebamus axem refractionis, erat parallelum radio ultimo.

101 Atqui declinatio lineae fiduciae a plano quadrantis ipsa una est, a qua errores possunt irrepere in angulos polygoni. AcB (*fig. XVII tab. I*) esto planum quadrantis; B*b* linea fiduciae telescopii fixi declinet ab ipso angulo CB*c*; quoniam cum illa communi certissimo experimento componi consuevit AC linea fiduciae telescopii mobilis; etiam ista declinabit aequali angulo CA*c* a plano quadrantis A*c*B; atque ii bini aequales anguli *c*BC, *c*AC habebunt communem sinum *c*C in perpendiculo excitato e centro quadrantis: nam ponimus cetera recte constituta. Itaque ACB erit angulus verus aequalis opposito *b*C*a* comprehenso inter objecta *b*, et *a*; sed interea nos exscribemus ex quadrante falsum. Est autem obvia horum angulorum comparatio, si capiantur radii C*a*\`, C*b*\` aequales radiis *c*A, *c*B: nam tum ob manifestam similitudinem triangulorum *a*\`C*b*\`, ACB, erit AB chorda A*c*B ad *a*\`*b*\` chordam ACB, adeoque semis illius ad semissem huius, scilicet sinus semianguli A*c*B ad sinum semianguli ACB uti AC ad *a*\`C, seu A*c*. Itaque *uti radius ad cosinum anguli declinationis; ita sinus semianguli falsi ad sinum semianguli veri.*

102 Nisi vero plane turpiter peccet quadrans in ea declinatione, facillime error aestimatur. Nam dividendo erit uti radius ad differentiam radii a cosinu, idest ad sinum versum; ita sinus semianguli falsi ad differentiam inter sinum semianguli falsi, et sinum semianguli veri. Videlicet si in *fig. XIX tab. I* *b*CE sit semiangulus falsus, et BCE verus, erit uti radius ad sinum illum versum, ita *ab*, seu ita proxime AB ad

bi. Atqui EH ad AB, CE ad CA, BC ad BG, B*b* ad *bi* sunt rationes manifeste aequales. Itaque uti radius ad sinum illum versum, ita AB ad factum ex AB in B*b* divisum per EH; nempe ita EH ad B*b*. Unde demum habetur: *uti radius ad duplum illum sinum versum; ita tangens semianguli ad errorem totum.* Nam *b*B error in semiangulo est semis erroris contingentis angulo toti.

103 Declinatio lineae fiduciae ab axe telescopii, seu a radio primo in plano quadrantis, uti mox dicam, errorem nullum infert in angulos polygoni, si linea fiduciae telescopii mobilis adpositi ad radium primum, seu ad initium graduum angulo alterno aequali inclinetur ad radium ipsum primum. Ad angulos autem quod attinet, quibus stationum altitudines, atque depressiones quadrantis plano ad verticem composito definiuntur, ipsi quidem obveniunt falsi ab ipsa etiam declinatione lineae fiduciae redacta ad planum quadrantis; sed error est constans, certissime exploratur, atque adeo perinde est, ac si sit nullus.

104 Ceterum non negleximus deinde aliis etiam experimentis inquirere et in positionem filorum micrometri, et in lineae fiduciae, si quae superesset, declinationem a plano quadrantis. Ferme quotidie limbum solis trajicientis per meridianum (meridianam enim jam duxeramus, et habebamus horologium, quo punctum meridiei definiremus) adducebamus ad filum horizontis in micrometro, neque ille ab hoc discedebat; quare filum horizontis erat rectum plano quadrantis, adeoque filum verticis erat huic parallelum.

105 Praeterea quadrantem intulimus etiam in mesaulam Supergensis collegii, ut aeque distaret a terminis ipsius; atque composuimus haec omnia: primo quidem, ut filum descendens e centro, et limbum stringens (semoto canali figurae XII) pendulum sustentaret in scypho humi subjecto; deinde, ut filum aliud demissum a puncto radii primi ultimo sustentaret pendulum aliud in scypho alio; tertio, ut centrum micrometri telescopii fixi jacentis in horizonte exciperet speciem maculae nigrae adfixae muro extremo mesaulae. Atque his ita, ut inquiebam, comparatis, tum telescopium nocturnum in alio mesaulae termino illic locavimus, unde visae in ipso duorum filorum species conveniebant; atque id unum deinceps fuit reliquum, ut quaereremus ad quod a linea nigra intervallum referretur in objecta charta species coalita ex congruentibus duorum filorum speciebus: sumta enim pro radio distantia micrometri a macula nigra in muro, quae fuit hexapedarum sexdecim, illud intervallum erat sinus anguli, quo linea fiduciae inclinabatur ad planum quadrantis.

106 Experimentum hoc aërem, uti liquet, tranquillum postulat, cuiusmodi est nunquam in loco non clauso; praeterea noctu obtingit melius, quam interdiu, objectis lucernis ad fila, et ad murum; incommodum ipsum habet unum praesertim, quod fila pendulorum, qua parte videri debent in muro, vel potius in adfixa charta, non solum nigra esse debeant, sed et paullo crassiora, quo cerni possint. Nos ex hoc experimento declinationem lineae fiduciae a plano quadrantis invenimus reliquam non maiorem minutis tribus. Atque

adeo non adlaboravimus praeterea in ipsa minuenda, veriti ne errorem innocentissimum noxium faceremus.

ARTICULUS V.

Telescopium mobile. Examen aliud partitionis.

107 Telescopium mobile MN (*fig. XI tab. I*), uti dixi, jam erat in promtu. In ipso etiam tubi duo praecipui N, N anulis insidebant admodum firmis axe unico; tubo alteri congruebat tubus minor cum lente ad objecta; in centro alterius fila argentea duo decussabant se ad normam ad constituendam lineam fiduciae. Praeterea tubus ipsi aptabatur cum lente ocularia.

108 Anuli illi late, et firmiter annectebantur regulae LQ ex aurichalco; sed haec ne flecteretur, coiverat stamno interfuso cum regula ferrea reflexa sursum juxta latus *r*Q ad altitudinem ordinatim maiorem in maiore a terminis distantia.

109 Ex lamina LQ exsistit in L discus *di* ex aurichalco solidissimus, et latius patens sub lamina, quam quod schema significet; ipse est, qui telescopium defert circa centrum quadrantis: nam ex tergo eius exstat conus truncatus, tornatus quam rectissime ad planum ipsius, et quam aptissime ad capacitatem foraminis in centro illo; is conus desinit in cochleam, cuius extrema pars exhibetur in *l*. Haec matrice *am* blande apprimitur tergo quadrantis, interjecto disco *no*. Ultima vero haec schematis pars, quo omnia cerni possent, exhibet omnia distorta a vera positione.

110 Ex eadem lamina LQ prodit in Q fenestella P, quae similiter ac lamina, ne inter circumeundum limbum laedat, induitur in margine inferiore aluta mollissima, tenuissimaque. Fenestellae congruit mundissima crystallus, ut limbum quamproxime attingat ad arcendam parallaxim. Ne vero ipsa trepidet, et a margine suo inclinato, atque ad unguem congruente cum lateribus fenestellae, et a quadro praeterea continetur adfixo cochleis in ambitu.

111 Itaque telescopium hoc mobile ibi locavimus in quadrante composito ad horizontem, ubi radius primus proxime bisecabat fenestellam in *fg*, atque interea linea fiduciae in telescopio utroque spectabat ad idem remotissimae turris latus. Ad lineam vero fiduciae adducendam ad idem in illo latere punctum potuimus uti aberratione centri refractionis in lente ad objecta. Scilicet rotantes eius lentis tubum potuimus efferre lineam fiduciae modico, quo oportuit, intervallo, ut lineam fiduciae jam constitutam in telescopio fixo assequeretur. Quo vero illa ad punctum idem rediret, ad quod haec appellebat, quoniam jam ambae inerant in eodem quadrantis plano, satis fuit paullulum dimovere telescopium mobile totum; atque tum blande urgentes hinc inde in gyrum tubum filorum, centrum eorumdem, et fila eadem tota eo adduximus, ubi cum filis in fixo telescopio antea constitutis, et cum eorum centro omnino consentiebant.

112 Quare unum erat reliquum, ut recta duceretur in crystallo, quae in ea telescopii mobilis positione congrueret cum radio primo. Quod quando erat paullo difficilius, crystallos plures habebat in promtu Francalancia omnia similes, et simi-

similiter excisas ad capacitatem fenestellae. Verum re spem vicit nostram, imo et suam: nam ex punctis designatis in facie superiore, et ad inferiorem traductis, lineam duxit in crystallo prima rectam, tenuem, et congruentem cum radio primo, dum interea telescopia congruebant ambo centro singula suo cum specie puncti eiusdem remotissimi.

113 Quare instructo jam demum quadrante supellectile sua omni, graduum examen instauravimus ipsa angulorum mensione. In infinita autem rerum ex porrecto eo loco aspectabilium varietate facile fuit certissimorum punctorum binaria deligere, quorum alia triginta, alia quindecim, alia decem, et iterum alia quinque etc. gradus absolutissime comprehenderent. Quamobrem singulis iis angulis comprehendimus quadrantis partes omnes eodem illo ordine, quo circino, qua micrometrico comprehenderamus, qua etiam communi. Uno autem pro quoque angulo utebamur telescopio mobili; dumtaxat quoties in partitione quadrantis, quae fiebat per angulum quemque, telescopium mobile componebatur cum radio primo, videbamus, num fixum consentiret ipsum etiam in idem punctum. Atque ne in hac quidem veraciore vestigatione quidquam praeterea habuimus, quod aut reprehenderemus, aut valde desideraremus.

114 Igitur venimus ad dena quaeque minuta gradus cuiusque conferenda cum tangentibus descriptis, uti dixi superius, in tigillo octopedali ita locato in vestibulo templi, ut et jaceret in horizonte, et in ipso tangentium initio constitueret angulum rectum cum linea fiduciae telescopii mobilis adducti in quadrante ad initium dati gradus, et interea distaret hexa-

pedas septuaginta a micrometro telescopii ipsius, quadrante constituto, uti superius, in declivitate monticuli.

115 Rectam hanc tigilli positionem ut definiremus, quadrantem asportaveramus in vestibulum templi, atque ita ibi composueramus cum horizonte planum ipsius, ut centro suo illi puncto recta immineret, cui subesse debebat in tigillo initium tangentium. Tum directo centro telescopii fixi ad apicem hastae ibi solo defixae in monticulo, ubi postmodum imminere debebat centrum quadrantis, tigillum eo direximus, quo spectabat in oppositis Peninis alpibus telescopium mobile telescopio fixo rectum. Denique redeuntes ad monticulum, quadrantem compositum ad horizontem, et initio, et postmodum semper, quoties ad minuta novi gradus expendenda progrediebamur, ita locavimus, ut centro suo hastae apici recta immineret.

116 Atqui micrometro carebat telescopium nostrum mobile. Sed nec valde desideravimus. Nam ipsum longioris circini micrometrum C (*fig. II tab. I*), et cursorem E aptaverat Francalancia regulae breviori longae non ultra pedem, ipsique dolatae quam diligentissime ad officium micrometri. Huic vero regulae adjunxerat ansas ferreas duas, quarum ope affigi ipsa poterat ubilibet dorso tigilli; atque interea cuspidi cursoris E alium suffecerat longiorem, qui obliquabatur ad faciem tigilli, ut ipsam quamproxime attingeret.

117 Quare, dum ego telescopium mobile cum initio graduum (ut exemplum ponam) componebam in quadrante, atque una simul ad initium tangentium in tigillo dirigebam, Francalancia jam micrometrum aptaverat in tigillo, ut cuspis

obliqua cursoris tangenti adesset decem minutorum. Tum ego telescopio eodem mobili adducto ad transversam in quadrante minutorum decem, si videbam centrum telescopii distare a linea in tigillo, nutu significabam; atque Francalancia quam lentissime cochleam urgebat, consistebatque statim a nutu alio meo, quo monebam cuspidem cursoris consentire cum centro telescopii: Canonica partes e micrometro exscribebat. Tum quadrante immoto telescopium ego adducebam ad transversam in circulo intimo minutorum viginti, triginta etc., et Francalancia adducebat cuspidem micrometri ad consentaneas in tigillo tangentes; atque peragebamus agere omnia similiter, quadrante, ut inquiebam, immoto, quamdiu ordiebamur transversas expendere gradus alterius. Tum enim centrum quadrantis, fulcro toto apte dimoto, constituebamus ad apicem hastae.

118 Bene mane orsi haec experimenta expendimus gradus duos adjacentes initio, et duos adjacentes termino graduum nonaginta, et praeterea intermedios aliquot, in quorum transversis vitia annotaveramus non omnino tenuissima. Pomeridiana pluvia obtulit otium, ut deprehensos a tangentibus in tigillo visis errores cum iis conferremus, quos exhibuerant captae in quadrante chordae; atque quando vidimus perbelle convenire singulos cum singulis, abstinuimus ab ulteriore hac inquisitione, non equidem quod experti essemus laboriosissimam, sed quod plane supervacaneam cognovissemus.

119 Itaque castigato jam quadrante ab erroribus tenuibus eorum angulorum, qui capiendi erant pro polygono telescopiis duobus, venimus ad errorem considerandum, qui certo exstitisset longe gravior in capiendis altitudinibus, aut depres-

sionibus stationum telescopio fixo, et pendulo: nam adducentes, quemadmodum monui, lineam fiduciae istius ad planum quadrantis, ipsam distraxeramus a radio primo. Quare necesse erat altitudines obvenire veris maiores, depressiones contra minores.

120 Quamobrem praestolati aërem tranquillum, et quadrante praeterea illato in angulum, in quem templum coit cum turri dextra, altitudines alpium Peninarum cepimus plures singulas directa, et iterum singulas luce reflexa a stagnante objecta in catino; atque binae quaeque observationes huiusmodi convenerunt ad punctum idem medium decernendum in limbo quadrantis pro puncto horizontis. Nam quo angulo species puncti a luce directa horizontem superat, eodem deficit species eiusdem a luce reflexa.

121 Experimentum idem cepimus item die alia; praeterea e monticulo rite cepimus altitudinem templi. Mox ablato vecte *q* (*fig. XIII tab. II*), et verticulis *l* adfixis fundo canalis quadrantem invertimus susdeque, et rotavimus circa fulcrum, ut telescopium ON tenens imum in quadrante locum spectaret ad idem templi culmen; notavimus in limbo punctum, in quo filum penduli secabat circulum extimum in observatione prima; pro altera vero observatione notavimus punctum aliud in circulo eodem, in quo pendulum a limbo elatiore demissum ad centrum depressius, et suspensura denudatum illud secabat. Atque angulus interceptus inter ea duo puncta exstitit plane aequalis duplo angulo erroris jam antea detecti. In prima enim observatione partem fulcri infoderamus humi, ex-

tuleramus in altera, quoad oportebat, ut telescopium rediret ad eamdem lineam in utroque.

122 Atque huius erroris disquisitio erat plane necessaria, ut quadrantem gyro horizontis expenderemus. Loci enim ratio non patiebatur, ut eum angulis absolveremus, nisi admodum inclinatis; imo qua inclinatio haec ipsa, qua punctorum positio, quae essent satis certa, in caussa fuerunt, ut vix quinque angulis redire potuerimus ad idem in horizonte punctum. Itaque et punctorum singulorum, queis anguli singuli comprehendebantur, altitudines fuerunt capiendae, aut depressiones, et inclinati anguli singuli, calculo explorandum fuit, quid valerent in horizonte. Dicam paullo post quomodo ea supputatio ineatur; hic unum innuam, summam eorum quinque angulorum, ubi fuit maxima, superasse gradus 360 minutis duobus. Itaque, si distributio fieret aequabilis, angulo cuique error contingeret secundorum vigintiquatuor, quo maiorem video habuisse plerosque Geometras in quadrante.

CAPUT

POLYGONUM,

ART.

Polygoni

AD

	Stationes. I	Anguli obfervati, et correcti. II	Latera inclinata oppofita. III
Supergue	Superga . . .	S 1763 4 julii . . 91. 31. 28.	RF 21700, 44.
Sanfré	Sinfredium .	F 1762 24 octob. . 28. 34. 13.	RS 10381, 61.
Rivoli	Ripulae . . .	R 1763 15 octob. . 59. 54. 19.	SF 18781, 82.
	Sinfredium .	F 1762 24 octob. . 83. 49. 47.	LR 24767, 71.
	Ripulae . . .	R 1762 8 julii . . 35. 35. 8.	LF 14496, 76.
Saluces	Salutiae . . .	L 1762 2 novemb. . 60. 35. 5.	RF 21700, 44.
	Sinfredium .	F 1762 26 octob. . 65. 17. 43.	UL 19656, 97.
	Salutiae . .	L 1762 1 novemb. . 72. 38. 19.	UF 20651, 59.
Mondovi	Monsregalis	U 1762 3, et 7 oct. 42. 3. 58.	LF 14496, 76.
		TRIANGULUM	
	Superga . . .	S 1763 6 julii . . 90. 19. 16.	UR 40830, 12.
	Ripulae . . .	R 1763 20 octob. . 74. 56. 57.	US 39430, 09.
	Monsregalis	U 1762 3, et 7 oct. 14. 43. 47.	RS 10381, 61.

III.

ET ARCUS TERRESTRIS.

I.

DIMENSIONES.

AUSTRUM.

Alt. vel depress. observatae. IV	Alt. vel depress. in hexap. V	Anguli adducti ad horizontem. VI	Latera opposita in horizonte. VII	
F — 0. 44. 30 R — 0. 57. 25	— . . . 199, 44. — . . . 158, 85.	91. 32. 12.	21700, 15.	
S + 0. 28. 30. R — 0. 1. 30	+ . . . 199, 44 + . . . 44, 19	28. 33. 58.	10380, 14.	
S + 0. 47. 47. F — 0. 15. 30.	+ . . . 158, 85 — . . . 44, 19.	59. 53. 50.	18780, 14.	
R — 0. 1. 30 L + 0. 5. 55.	+ . . . 44, 19 + . . . 48, 85	83. 49. 46.	24767, 30.	
F — 0. 15. 30. L — 0. 9. 40.	— . . . 44, 19 + . . . 4, 80	35. 35. 8.	14496, 52.	,56
R — 0. 11. 0 F — 0. 17. 15	— . . . 4, 80. — . . . 48. 85	60. 35. 6.	21700, 15.	
L + 0. 5. 55 U + 0. 10. 25	+ . . . 48, 85 + . . . 109. 64	65. 17. 43.	19656, 44.	,49
F — 0. 17. 15. U + 0. 3. 5.	— . . . 48, 85 + . . . 60, 76.	72. 38. 17.	20650, 97.	20651, 02
F — 0. 26. 5 L — 0. 18. 10	— . . . 109, 64 — . . 60, 76.	42. 4. 0.	14496, 52.	;56
	SINGULARE.			
R — 0. 57. 25. U — 0. 26. 6.	— . . . 158, 85 — . . . 89, 50.	90. 19. 38.	40828, 08.	
S + 0. 47. 47. U — 0. 10. 55.	+ . . . 158, 85. + . . . 66, 34.	74. 56. 40.	39427, 27.	
S — 0. 10. 30 R — 0. 22. 5	+ . . . 89, 50. — . . . 66, 34.	14. 43. 42.	10380, 14.	

AD

Stationes. I	Anguli observati, et correcti. II	Latera inclinata opposita. III
Taurinum . .	T 1762 3 julii . . 68. 6. 33.	RB 12121, 23.
Ripulae . . .	R 1762 6 julii . . 82. 2. 29.	BT 12937, 32.
Balangerium	B 1762 11 julii . . 29. 50. 58.	RT 6501, 82.
Ripulae . . .	R 1762 6 julii . . 81. 21. 51.	BS 14727, 93.
Balangerium	B 1762 11 julii . . 44. 10. 44.	RS 10381, 61.
Superga . . .	S 1763 4 julii . . 54. 27. 25.	RB 12121, 23.
Balangerium	B 1762 11 julii . . 55. 55. 8.	MS 14549, 67.
Superga . . .	S 1763 6 julii . . 67. 6. 37.	BM 16183, 56.
Maxadium . .	M 1762 14 julii . . 56. 58. 15.	BS 14727, 93.
Balangerium	B 1762 11 julii . . 41. 20. 41.	AM 12945, 69.
Maxadium . .	M 1762 14 julii . . 82. 59. 5.	BA 19450, 52.
Andratae . .	A 1762 21 julii . . 55. 40. 14.	BM 16183, 56.
	TRIANGULUM	
Ripulae . . .	R 1762 6 julii . . 57. 26. 12.	SA 25836, 92.
Superga . . .	S 1763 6 julii . . 102. 46. 8.	RA 29898, 04.
Andratae . .	A 1762 17 julii . . 19. 47. 40.	RS 10381, 61.

BO-

BOREAM.

Alt. vel depress. observatae. IV	Alt. vel depress. in hexap. V	Anguli adducti ad horizontem VI	Latera opposita in horizonte. VII
B + 0. 39. 5. R + 0. 42 4	+ . . . 167, 89 + . . . 85, 79	68. 6. 52.	12120, 74.
T — 0. 48. 40. B + 0. 18. 27	— . . . 85, 79 + . . . 82, 10	82. 2. 11.	12936, 16.
R — 0. 28. 7. T — 0. 50. 5.	— . . . 82, 10 — . . . 167, 89	29. 50. 57.	6501, 26.
B + 0. 18. 27. S + 0. 47 47	+ . . . 82, 10. + . . . 158, 85.	81. 22. 1.	14727, 13.
R — 0. 28. 7. S + 0. 10. 55	— . . . 82, 10. + . . . 76, 41.	44. 10. 28.	10380, 14.
R — 0. 57. 25 B — 0. 24. 45.	— . . . 158, 85 — . . . 76, 41	54. 27. 31.	12120, 74.
S + 0. 10. 55 M — 0. 33. 45	+ . . . 76, 41 — . . . 121, 62	55. 54. 52.	14547, 92.
B — 0. 24. 45. M — 0. 54. 10	— . . . 76, 41. — . . . 197, 66.	67. 6. 49.	16182, 87.
B + 0. 17. 55 S + 0. 39. 15	+ . . . 121, 62. + . . . 197, 66	56. 58. 19.	14727, 13.
M — 0. 33. 45 A + 0. 15. 20	— . . . 121, 62 + . . . 135, 80.	41. 20. 13.	12942, 58.
B + 0. 17. 55. A + 1. 1 50.	+ . . . 121, 62. + . . . 256, 51	82. 59. 20.	19449, 03.
B — 0. 32. 40 M — 1. 14. 25	— . . . 135, 80. — . . . 256, 51.	55. 40. 27.	16182, 87.
	SINGULARE.		
S + 0. 47. 47 A + 0. 11. 40.	+ . . . 158, 85. + . . . 219, 93.	57. 26. 10.	25835, 56.
R — 0. 57. 25 A — 0 3. 15	— . . . 158, 85 + . . . 61, 38.	102. 46. 17.	29896, 33.
R — 0. 38. 55. S — 0. 19. 35	— . . . 219, 93. — . . . 61, 38.	19. 47. 33.	10380, 14.

ARTICULUS II.

Stationum delectus.

123 Explicaturus partes singulas tabulae istius, quae magnitudinem gradus est proxime prolatura, ordiar dicere de stationibus, quas quadrante jam captaveramus Supergae quotquot potueramus; sed postmodum aptissimas delegimus, suscepto ad id itinere, atque angulis in statione quaque quadrante minore exploratis.

124 Itaque die altera mensis junii, Superga Ripulas ivimus, erectoque ibi signo in ipso basis productae termino, primo loco prospectantibus ex R ad boream (*tab. III fig. XXXVI*) Balangerium B obtulit se nobis, ad quod oppidum stationem constitueremus tum ad triangulum subsidiarium RBT conficiendum cum terminis basis R, T satis aptam, tum vero etiam peropportunam ad designatas stationes alias Supergam S, Maxadium M, Andratas A colligandas triangulis tribus RSB, BSM, MAB pro polygoni parte boreali.

125 Profecto loca a Balangerio Ripulis paullo propiora sunt item humiliora; ea enim late effodisse videtur Sturia amnis influens praeceps in planitiem a valle Lancei. Quae populosa regio hominibus est celebris corpore robusto, ingenio acri; illinc enim Chionii, Revelli Academiam illustrant nostram. Ager vero etiam omnis, qui citra Sturiam alpibus adjacet, prospectum ad boream habet impeditum a collis declivitate, cui adstat Balangerium. Itaque ob locorum naturam indulgendum nobis fuit angulo in B conditione mediocri, at

non mala. Nam etiam postmodum cum ipsum a Balangerio ad collem dimovimus, gradus triginta proxime aequavit. Interea vero ipsa in B constituta statio triangula tria offerebat, unum quidem SBM ad Supergam S, et Maxadium M conditione optima: est enim ferme aequilaterum; duo reliqua SBR, ABM conditione omnino bona; nam angulus ipsorum minimus ABM et superat mensuram graduum quadraginta, et ad polygoni longitudinem inclinatur.

126 Ripulis deliberavimus etiam de stationibus ad meridiem, sed de iis dicam postmodum; hic iter persequar ad boream. Igitur Balangerium profecti equidem ex ipso loci coemeterio et signum Ripulinum deteximus, et portam Taurini Segusinam, a qua basis proxime orditur; sed nec signum ad eam portam erectum cernere potuimus, uti dixi, et adjacentis collis declivitas prospectum ad boream late intercludebat: quare ad eam collis declivitatem debuimus divertere, et Taurinum mittere ad signum erigendum in vallo. In ea declivitate congestis ingentibus saxis signum est erectum trabs alta hexapedas tres cum linteo hexapedam lato, sesquihexapedam alto. Signum hoc procurabat Coperius Balangeriensis homo praedives, aeque atque humanus. Ripulinum signum sollerti fabro lignario, proposito pretio, commiseramus, ut custodiret.

127 Dudum substitimus in ipso Balangeriensis signi loco (collis, in cuius declivitate positus fuit, appellatur ab incolis *il colle del timone*), atque telescopio diligenter lustravimus, num stationem, quam Andratis figere designaveramus, cum eramus Supergae (quod aptiorem locum illinc videremus nullum), dimovere possemus ad occasum, quo ille terminus

polygoni minus declinaret ad ortum a meridiana, quae Taurino traiiceretur. Verum interjectae alpes, quas Duria amnis, effossa valle praealta, disjungit ab alpe Andratensi, dorsum ad ortum longe emittunt suum, ut in illa ultra Andratas prospectus non pateat ad occasum nisi ad modicum intervallum, idemque casis nudum, imo et tuguriis.

128 Itaque Balangerio festinavimus Eporediam die quinta junii, atque Andratas conscendimus praerupto calle. Ibi Brunerius civis Eporediensis excepit nos hospitio; sed nocte intempesta evadere debuimus per fenestram Canonica, et ego, atque longe vagari contremiscentes a frigore, et trahentes difficilem anhelitum ab halitu carbonum, qui a proxima fornace pervaserat in cubiculum. Eam, cum audisset nos adventare, suffocaverat Brunerius; sed postea quam iveramus cubitum, excitaverat fornacator: adsuetos enim habet ea gens infecto illi aëri pulmones.

129 Mane e proximo colle, qui ad ortum longe protenditur constante declivitate, signa vidimus Balangerii, atque Ripulis erecta; angulos exploravimus; tum conquisitis in eo pago casis pluribus, unum invenimus satis aptum locum, in quo sectorem postmodum constitueremus, Ecclesiae nempe sacrarium: casae enim aliae, quae duae sunt, aut tres paullo elatiores, muros habent sola creta interius compactos. Itaque a prandio Canonica redivit Balangerium, ut aliquid moneret de signo: ego perrexi Maxadium; vidique ibi turrim impeditam, quominus inferri in ipsam deinde posset quadrans radio tripedali. Quare stationem asportavi ad palatium Comitis eius oppidi sub contignatione; etenim Comes quam humanissime con-

cessit, ut tegulas ex eo palatii angulo dimoveremus, qui vergit ad occasum, quo stationes alias spectare illinc possemus, Andratas praesertim. Nam hoc oppidum, quamquam admodum elatum, attamen occupat interjectus collis, quominus cerni possit ex locis aliis, quae Maxadii praeter turrim, et palatium sunt depressiora omnia. Discedens Maxadio Taurinum arenas vidi in proximo agro, ex quibus antiquis etiam temporibus aurum legebant Romani.

130 Die octava convenimus ambo Taurinum; undecima Salutias iter fecimus ad L, quam urbem ferme unam habebamus Ripulis annectendam: etenim volebamus stationes quasque patere etiam Supergae; dorsum autem Supergensis jugi, dum ad ortivam Taurini plagam protenditur, sinuat se etiam late ad meridiem, et depressiora loca abdit, quae sunt ad occasum polygoni, et minore a Ripulis distant intervallo. Imo Salutiis ne in ipsa quidem sublimi urbe potuimus consistere; sed conquisitis locis aliis pluribus unam invenimus ad austrum Comitis Radicati villam, ex qua Supergensis templi tholus videretur: nam speculam habet ea villa faciebus suis quatuor paullulum inclinatam ad mundi plagas; et fenestrae quatuor patent in faciebus binis, in binis duae. Hinc igitur primo angulum vestigavimus Supergam inter, et Ripulas nisi necessarium, certe utilem, quemadmodum videbimus; deinde stationem conquisivimus in opposita ad ortum plaga, quae aptissimos angulos duos comprehenderet alterum cum stationibus Salutiensi, et Supergensi, alterum cum eadem ipsa Salutiensi, et cum alia, quam ponere cogitaveramus in Calvario pro termino basis ad austrum. Calvarium hoc, quod dicimus, aedificium est

solitarium in colle Momburgi, qui non longe distat a Villanova oppido Monregalensi. Ex monticulo Supergensi telescopio detexeramus aedificium hoc; atque conjectaveramus meridianam Supergensem productam ad austrum juxta illud proxime transituram. Ceterum quemadmodum ad Calvarium, ita et ad turrim urbanam Monregalensem angulos etiam annotavimus: haerebamus enim adhuc ancipites utri stationi essemus primas delaturi.

131 Cum jam Salutiis iter faceremus, substitimus S. Albani, ibique e specula quadam fecimus ipsos nos certiores, meridianam Supergensem quasi medio progredi loco Montemregalem inter, atque Calvarium. Quare deliberaturi de conditionibus aliis ivimus quidem ambo Montemregalem; sed dum hic ego e patentissimo ante memoratam turrim loco prospectabam ad constitutas stationes alias, atque unam captabam ad ortum polygoni, Canonica invisit Momburgum. Rediit re ferme infecta, quod nebulae Subalpinum agrum omnem late occuparent dies duas; interea tamen metuebat ipse a solitudine; metuebam ego magis ab hominum frequentia, in patria praesertim mea. Jussimus dealbari partem aliquam Calvarii, et instaurari cubicula aliquot, et cellas. Interea videram ego adstare turri Monregalensi aptissimam domum, in qua constituerem sectorem, et adesse porticus duas, ex quibus percommode capi possent anguli omnes. Quare, quando utrobique poterant esse in promtu omnia, deliberare constituimus de eo termino, posteaquam reliqua expendissemus adjuncta polygoni omnia.

132 Monteregali redivimus Salutias; etenim Ignatius Buttis civis meus, qui Philosophiam docebat in ea urbe, dixerat perquisiturum se stationem aliam aptiorem, ex qua nedum tholus Supergensis, sed et monticulus videretur, quem abdebat villae Radicati Taurinensis collis; verum invenerat nullam. Quare, angulis iterum exploratis, recta per amoenissimum agrum ivimus Sinfredium in F. Angulus, qui ad Ripulas R, et ad Supergam S erat illinc paullo acutior, fecit, ut Summamripam adproperaremus, quod oppidum est Supergae propius milliaria circiter duo. Sed tenendus deinde fuit, uti jam dixi, angulus Sinfrediensis, quod ibi in turrim semidirutam ascendere nequiremus; nec alius alibi pateret ad constitutas stationes satis elatus locus.

133 Scilicet anteaquam hoc iter susciperemus ad stationes deligendas, conditiones noveramus, quae optimum faciunt in polygono triangulum, atque eas etiam, quae ex optima triangulorum serie polygonum totum conficiunt; imo quo praeceptiones in hanc rem vulgo traditas ab aliis altius animo imbueremus, feceramus quodammodo nostras peculiari nostra consideratione. Videramus primo loco: *errores in sinibus ex errore in arcubus constanti esse uti cosinus*: nam in *fig. XIX tab. I* triangula biB, BGC recta in i, et in G habent praeterea aequales angulos bBi, BCG, quod singuli ipsorum efficiant angulum rectum additi angulo GBC; itaque Bb error in arcu EB ad bi errorem in sinu BA est uti BC radius ad cosinum BG. Quapropter si Bb error in arcu ponatur constans, ob radium BC etiam constantem, erit bi error in sinu uti cosinus BG.

134 Videramus altero loco; *rationem erroris in sinu ad sinum ipsum in illa ipsa hypothesi erroris in arcu constantis exponi a cotangente.* Nam quoniam in ea hypothesi *bi* error in sinu BA sequitur rationem cosinus BG; ratio autem cosinus BG ad sinum BA, seu GC est eadem ac ratio cotangentis DF ad radium DC; conficitur inde, ut ratio erroris *bi* in sinu ad sinum ipsum (ob radium constantem) exponatur a cotangente DF.

135 Atque hinc ad theorema perrexeramus jam propius pertinens ad nostrum institutum: nempe *si uni angulo obligemur in triangulo, constituendum triangulum fore optimum, si reliqui duo anguli fiant aequales.* Nam tum cotangentes habebunt illi aequales, adeoque minimae errorum summae erunt obnoxii, quod summa cotangentium aequalium sit omnium minima, quae pertinent ad datam arcuum summam. Nam si tangentium aequalium GH, DH (*fig. XVIII tab. I*) altera particula HI crescat, altera decrescet particula PH. Est autem GHC utpote externus maior HIC; ergo et DHC, qui, ob tangentes GH, DH aequales, est ipsi GHC aequalis, est etiam maior illo GIC; quare DPC, qui est angulo DHC externus, adeoque etiam oppositus ad verticem IPH erit illo, nempe angulo PIH multo maior. Unde IH incrementum tangentis unius est multo maius PH decremento alterius.

136 Quod si nulli in triangulo angulo obligaremur, theorema quartum sponte exsistebat: scilicet *triangulum minimae errorum summae obnoxium fore aequilaterum*; utpote cuius singuli anguli aequales cotangentes habent aequales, a qua aequalitate

litate quamprimum discedunt, incrementa earum, quae crescunt, superant earum decrementa, quae minuuntur.

137 Haec, inquam, omnia, quae triangulum faciunt absolutissimum in polygono, diligenter provideramus, anteaquam ad stationes deligendas veniremus; imo et alia eramus consectati, quae adhuc propius pertinent ad polygoni totius perfectionem, ceu est nobilis ea quaestio: cuiusmodi esse debeat polygonum, in quo cum minimo triangulorum numero minima, quoad potest, errorum summa componatur. Verum considerationes istae omnes possunt quidem prudentem facere Geometram, prorsus obsequentem facere vix unquam possunt; quod nulla ferme sit regio apta adeo positione, ut multiplicibus iis praeceptionibus accommodet ubique solum suum. Quare unum restat, ut pro locorum conditione peccetur quam minime. Nobis autem adblandiri nos posse videmur, polygonum nostrum collatum cum alienis concedere nulli, praestare plerisque.

ARTICULUS III.

Anguli observati, correcti, atque reducti.

138 Taurinum reversi curavi ego signum in vallo, Canonica tertio rediit Balangerium, ut de puncto Andratensi illinc certius decerneret, ad quod collinearetur ex stationibus aliis omnibus. Delectum hoc est in latere domus Brunerii maxime ortivo, ubi poterat quadrans locari quam proxime.

139 Die 23 junii Supergam iterum conscendimus angulos quadrante tripedali capturi ad stationes constitutas, imo ad constituta in statione quaque puncta. Verum anteaquam de his angulis dico, caussam narrem oportet, quamobrem anguli Supergenses in tabula tribuuntur omnes anno 1763. Equidem ipsi etiam eodem, quo alii, anno 1762, imo omnium primi sunt capti; attamen dum ex stationibus aliis collineabatur ad punctum S (*tab. III fig. XXXVIII*), quod est in axe templi ad cancellos praecingentes sublimiorem parvum tholum Supergae, anguli ad stationes boreas capiebantur ex puncto quodam *s*' ante aream templi definito, anguli vero ad stationes australes ex monticulo *s* decernebantur. Nullum enim erat in ipsa area punctum, quod unum pateret stationibus omnibus.

140 Profecto positionem eorum punctorum diligentissime exploraveramus dudum antea mensione multiplici. Primo loco ex centro templi S produxeramus rectam *Sr* tendentem ad signum Ripulinum. Quoniam vero ostium templi, per quod unice ad signum illud poterat collineari, a recta *Sr* declinat ad austrum; hinc nos a centro templi divertimus recto angulo ad austrum, quamdiu juxta eam rectam prospicere liceret; tum aequali intervallo, et ad normam redivimus in rectam eamdem.

141 Deinde ex punctis *s*, et *s*' produximus *sr*, et *s*'*r*' ipsi *Sr* rectas; atque cautione missa nulla, diligentissima ad lineae partes mensione invenimus

Sr	hexapedas	22, 476
sr	. . . . . .	82, 231
Sr'	. . . . . .	17, 327
s'*r*'	. . . . . .	4, 229

142 Itaque positio inde innotescebat, quam habebant stationes duae vicariae *s*, *s'* ad veram S in centro templi, et ad latus S*r* centrum ipsum nectens cum signo Ripulino. Adeoque positiones etiam elici poterant laterum quorumcumque polygoni, quae ad illud templi centrum finirentur.

143 Verum observationes, quae fierent in *s*, aut in *s'*, satis non erat revocare ad S, quod centrum erat in pavimento; sed efferendae erant praeterea ad cancellos in parvo tholo; quamobrem tertio loco istorum a pavimento altitudo est explorata, primo quidem capto angulo ex monticulo, deinde barometro, ac tertio demum funiculo. Annexuimus huic pondus librarum trium, demissumque ab interioribus in parvo tholo fenestris sustulimus per trochleam adfixam circino micrometrico, quo distenderetur semper aequaliter tracta pars quaevis, dum exigebatur ad mensuram. Mensio haec protulit altitudinem a pavimento ad fenestram hexap. 26. 3. 1. 0;
cancelli autem erant adhuc altiores 1. 1. 8. 5;

itaque altitudo cancellorum a pavimento erat 27. 4. 9. 5.
Altitudo cancellorum a quadrante posito in statione vicaria *s'* erat proxime eadem. Verum altitudo eorumdem a quadrante in monticulo non superabat 23. 4. 5. 6.

144 Quare molestissimo calculo ex his elementis instituto sustulimus quidem ad cancellos angulos, quos anno 1762 cepimus ex stationibus vicariis *s*, et *s'*. Verum quae supputatio non est a nobis absoluta nisi ingenti molestia, ea dubitationem non abstulit omnino omnem, praesertim, quod eo-

rum triangulorum aliqua, in quae subibat aliquis eorum angulorum, non similiter ac triangula alia intra secunda perpauca angulos rectos duos aequarent. Quare, ne quid praeterea desideraremus, anno 1763 die prima julii transversis praevalidis trabibus firmissimum tabulatum confectum est in parvo tholo, evectusque quadrans, ut per patentissimas octo fenestras angulos omnes ex eo ipso centro caperemus, ad quod collineaveramus ex stationibus aliis. Atque adeo angulis illinc captis primas detulimus in tabula; vere enim castigati ab erroribus quadrantis duorum rectorum summam singuli cum complementis suis quam aptissime conficiebant.

145 Quem in sermonem quando incidi earum rerum, quas anno 1763 aut absolvimus, aut iterum expendimus, dicere non mittam: nos eo ipso anno, quemadmodum specie quadam necessitatis Supergam, ita et Ripulas quasi ad solatium iterum rediisse, atque ibi expendisse iterum angulos aliquot jam captos anno proxime superiore. Atque isti quoniam ab eodem puncto redibant ad puncta eadem, obvenerunt captis omnino aequales, et aequales iterum obvenerunt depressiones, altitudinesque. Quae res fecit nos certiores et esse bene acta omnia, et quadrantem nullatenus luxatum.

146 Etenim hanc legem (ut de angulis universe omnibus jam ordiar dicere) constanter tenuimus, ut quadrans a baiulis gestaretur; atque hos Francalancia, exhibitis literis regiis ad praefectos locorum, deligebat ubilibet, atque in via attentissime comitabatur.

147 Deinde, ubi ventum erat ad stationem aliquam, quadrans in umbra, aut sub tentorio locabatur, ut telescopiis ad

stationes directis, centro suo quam proxime attingeret constitutum in ea statione punctum.

148 Jam vero in capiendo angulo non acquiescebamus, nisi mutato loco collineavissemus ambo ad stationes ambas, et aestimatam anguli magnitudinem ambo seorsim exscripsissemus. Collata commentaria persaepe convenerunt intra secundum; nunquam dissenserunt secundis quinque. Id sicubi accidit, factum est observandi initium. Praeterea etiam ubi nulla, aut minor erat dissensio, saltem bis captus est angulus, hora plerumque diversa, diversa saepe etiam die.

149 Quoties angulus erat captus aliquis, telescopium mobile adducebatur, ut consentiret in puncto eodem, quod fixo erat propositum, atque videbamus perquam diligenter, num interea linea crystalli congrueret cum primo in quadrante radio.

150 Denique, quod unum jam ferme restabat, inquirebamus in aberrationem centri quadrantis, sicubi erat aliqua a centro stationis. Circellum CC′C″ describebamus in commentariis (*fig. XXXVI tab. II*); tum centro *c* applicabamus angulum captum A*c*B; tertio loco tendebamus duo fila *bcb*′, *aca*′ juxta radios comprehendentes angulum captum A*c*B in quadrante ad stationes directo. Demum a centro stationis verae C, vel C′ demittebamus duo fila CT, C*t*, vel C′T′, C′*t*′ recta duobus filis *b*′*cb*, *a*′*ca*; atque eorum filorum positiones, et longitudines describebamus in commentariis; erant enim mensurae sinuum, qui, sumendo pro radiis distantias stationum, debebant proferre angulos addendos, vel subtrahendos, ut captus A*c*B evaderet in verum ACB, vel AC′B.

151 Etenim universe ut captus A*c*B evadat in verum ACB, vertici illius *c* debent rectae applicari parallelae lateribus istius, quarum, quae cadet intra angulum captum, comprehendet cum latere istius proximo angulum ab isto demendum; contra, quae cadet extra, comprehendet angulum addendum; atqui iis angulis, quos comprehenderent cum proximis lateribus capti eae parallelae, sunt aequales alterni, quos latera veri comprehendunt cum lateribus capti; itaque pro hoc nostro emendationis modo haec obtinet lex: *Anguli emendationis, qui cadunt intra angulum captum addendi, qui extra, subtrahendi, ut captus verum aequet*; idest *ut angulus captus in c extra centrum stationis* C, *adducatur*, quemadmodum communiter dicunt, *ad ipsum centrum* C. Quamobrem, si centrum stationis sit in C, anguli CB*c*, CA*c* addi debent ambo angulo capto; sin sit in C' addi adhuc debet CB*c*, sed CA*c* debet subtrahi. Quod etiam generaliter fit manifestum, si observetur: sinum TC anguli CB*c* addendi in toto semicirculo *b*CC'*b*' dirigi similiter, adeoque in toto eo semicirculo esse addendum angulum, ad quem sinus ille pertinet; deinceps dirigi contraria via in toto semicirculo *b*C''*b*', adeoque pertinere ad angulum demendum: contra sinum C'*t*' pertinere ad angulum demendum in toto semicirculo *a*C'*a*', ad angulum addendum in toto semicirculo *a*'C''*a*.

152 Calculus vero hic, qui multitudine sua solet esse molestissimus, compendia habet, a quibus fit tolerabilior; ceu illud est: cuique in sinu CT pedi deberi trientes decem secundi pro hexapedis 10000 in radio CA; unde ex memoria fit emendatio, dum ne aut sinus sit nimis ingens, aut admo-

dum falsa distantia. Quam ad praecavendam falsitatem juvabit adhibere emendationem hanc, uti nos fecimus, inter conficiendum laxiorem primum polygoni calculum.

153 Quod si ab emendationibus his duabus aliquis nobis alicubi error superfuit, quo summa trium in triangulo aliquo angulorum abluderet a rectis duobus, non ipsum temere, aut fortuito correximus; sed emendationem principio adhibuimus, quae maxime probabilis videretur, veriorem ex ipsa, certioremque consectaturi. Scilicet triangulis omnibus in polygono computatis, imo et ad horizontem prolixo calculo compositis, ex minimulis, quae in ipsis essent reliquae dissensiones, modum intelligebamus, quo in dato triangulo quoque minimulum errorem distribueremus, qui a duabus illis emendationibus fuisset reliquus. Cuius rei perficiendae ratio suppetebat multiplex. Nam praeterquamquod triangula ad boream, et ad austrum omnia triangulis duobus eramus complexi, uti dixi, angulos etiam ceperamus in triangulis (*fig. XXXVII tab. III*) SRM, MRB, RSL, LRS. Quae triangula, etsi ad polygonum computandum erant minus apta, utilitatem tamen in hac re habebant plurimam, quod aut consensione sua significarent recte esse applicitam reliqui exigui erroris in aptioribus triangulis emendationem, aut dissensione sua, quae fuit semper exigua, edocerent, quo praesertim modo ea emendatio esset futura optima.

154 Quare tum immanis calculi molestiam iterum magno animo subibamus, quo polygonum assequeremur, quoad poteramus, castigatissimum; verum cautionem aliam quamdam no-

stram interponebamus in hoc calculo, ubi triangula componebamus ad horizontem, de qua dicam paullo post.

ARTICULUS IV.

De stationum altitudinibus, atque depressionibus.

155 Ex basi inclinata, atque ex angulis descriptis in Col. II, ea nempe diligentia captis, atque correctis, quam mox memorabam, pronum fuit latera inclinata definire ingenua admodum, eaque unica analogia, qua constituitur: latera eadem esse uti sinus oppositorum angulorum.

156 De altitudinibus, atque depressionibus observatis, computatisque in hexapedis vix est, quod dicam; nam hae ex illis sunt elicitae omnes; neque ullibi omisimus observationem reciprocam. Itaque altitudines stationum supra vallum sunt ferme huiusmodi:

Ripulae . . . hexapedas	85, 79.
Balangerium	167, 89.
Supergae cancelli . . .	244, 30.
Maxadium	46, 27.
Andratae	305, 72.
Sinfredium	41, 60.
Salutiae	90, 59.
Monsregalis	152, 13.

157 Ferme, inquam; nam quae ad duas, aut tres hexapedas vagantur differentiae, eae possent quidem ex parte aliqua evi-

evitari, si omnis interponeretur diligentia, ut collineatio reciproca quaevis rediret ad punctum illud omnino idem, ex quo capta antea sit eius loci altitudo, vel depressio, ex quo collineatur ad alterum; sed evitari omnino non possunt ea parte, quae pendet a refractionis inaequabilitate. Verum id cadit percommode differentias huiusmodi negligi tuto posse, utpote quae ne unius quidem secundi differentias inferant in polygonum.

158 Quod si aliae occurrant Physicae inquisitiones, quae locorum altitudines postulent absolutissimas, tum vero barometris erit utendum, quorum plane usum multipliciter annis proxime superioribus perfecit illustris Genevensis civis I. A. De-Luc. Et quando ad ipsum barometri instrumentum perficiendum videntur mihi illa conferre, quae ante menses novem scribebam ad praestantissimum virum Comitem Ponte a Scarnafixio, tunc quidem ad Anglos, nunc vero ad Caesarem a Rege legato meritissimo; hinc ea ego hic rescribo, nil veritus, ne molestiam ullam creent Clarissimo De-Luc; est enim ipse aliunde locupletissimus rebus suis novis omnino plurimis. Praeterea hominem nosse mihi videor scientiae studiosiorem, quam sui.

COMITI PONTE A SCARNAFIXIO etc.
Regis ad Anglos legato

Joannes Baptista Beccaria S. P. D.

159 *Pro tanta vero, atque tam singulari beneficentia, humanitateque, qua et libris me muneraris, et literis praeterea etiam instruis tuis, ecquas, Comes amplissime, potero ego unquam non dicam referre, sed ne habere quidem satis pares gratias? Certe nisi praemio sit ipsa tibi egregia voluntas tua, in qua plus tu oblectaris, quam ii, qui accipiunt, dum confers beneficia, praesertim quae pertinent ad amplificandam scientiam amicissimam tibi, atque ad cultores eius juvandos, exornandosque; nisi, inquam, beneficium sit ipsi tibi bene facere aliis, ego, tibi quod reddam, praeterea habeo nihil.*

160 *Quamquam, si minus quod reddam, aliquid habeo, quod rescribam, praesertim de Clarissimo De-Luc. Gaudeo admodum, honorificentissime ipsum versari in ista urbe, quae vere, uti scribis, est amplissimum, quemadmodum rerum, ita et scientiarum emporium. Experientissimi hominis de athmosphaera libros vix editos non tam legi, quam devoravi: auxerat enim ea res ingluviem meam, quod a Rege accepissem considerandos, qui dum nos populum suum augere studet bonis aliis omnibus, vult etiam scientiis facere ditiores, quibus ipse est ornatissimus. Verum, quos libros principio ingurgitaveram, perrexi deinde eos legere diligentius, quod et deberem pro jubentis auctoritate, et valde etiam vellem pro rerum novitate.*

161 *Profecto ea res animum jucundissime perculit meum, quam experimentis studet conficere sollertissimus vir, mercurium expansione sua aequabiliter respondere incremento caloris. Quae vero hinc petiit thermometra alterum ad corrigendas altitudines in barometro observatas ab errore eo, quem infert inconstans mercurii calor, alterum ad altitudines locorum jam proxime elicitas ex logarithmis ab errore alio castigandas, quem inferunt eius caloris vicissitudines, quatenus pertinent ad athmosphaeram, aptissima videntur ambo mihi ad exsequendum munia quodque sua. Quamquam quod munus demandat thermometro huic alteri, etiam mihi, quemadmodum auctori, videtur longe difficillimum. In barometro autem quod adhibet De-Luc, etsi plura video comparata quam diligentissime, duo tamen habeo, quae uti in barometris universe omnibus, quae hactenus sunt excogitata ad capiendas altitudinum differentias, in ipso etiam desiderem; primo quidem, ut mercurius motus habeat liberiores; deinde ut ne spatii supra mercurium vacuitas asportatione minuatur. Utrumque autem videor ego assecutus forma barometri maxime ingenua.*

162 *Verum anteaquam de hoc dico, sine me, Comes humanissime, verbum dicere de communissimis illis duobus vitiis: impedimenta motus in mercurio ad unam ferme caussam referuntur omnia, illa saltem, quae possunt evitari, ad eam nempe nativam vim, qua partes mercurii cohaerent admodum aliae cum aliis. Inde enim fit, ut mercurius motui resistat, ubi a parte barometri capaciore in angustiorem debet immigrare: etenim tum disjungi debent partes plurimae a sociis, quo massa amplior apte gracilescat. Idipsum De-Luc pervidisse videtur; quin imo vim affirmat subesse aliquam qualemcumque, qua massa mercurii maior trahat.*

minorem; hinc barometra summa parte capaciora altiora iis vidit, quae capaciora erant parte ima. Atqui tamen barometrum eius peccat aliquatenus hoc vitio: nam in perbrevi tubo, quem subjungit aperto brachio, insidet massa mercurii quodammodo extranea mercurio reliquo; itaque hanc videtur praeterfluere non posse mercurius reliquus, nisi ab ipsa usque, et usque divellatur. Adde impedimenta epistomii: nam scriptorius calamus, quem ipsi inserit, utlibet diligentissime excisus, nunquam cum tubis continuitatem perfectam est habiturus. Re enim vera, uti admonet ingenuus auctor, dum barometrum erectum asportabatur, mercurius minimulis molleculis suis suber pervadebat, quod erat epistomii loco.

163 *Verum misso hoc, quod est solius desidiae vitium, aliud videtur minus tolerandum, quod est falsitatis peccatum; videlicet suum etiam barometrum fatetur Physicus Genevensis quandoque repurgandum ab aëre, quem quamdiu haurire potest clausus tubus quantulumcumque, tandiu altitudines edocebit consentanea magnitudine falsas aut omnes, aut saltem aliquas; potest autem falsitas aliquarum turbare veritatem plurium.*

164 *Atque his obiter consideratis, venio nunc ad barometrum meum, quod videtur mihi carere vitio utroque: nam primo loco mobilitate est tanta, quantam maximam a mercurio licet praestolari; deinde spatium in fornice clausi brachii tenet absolutissime vacuum ab aëre: praeterea facilitate, ingenuitateque est omnino singulari. Etenim unus continuatus tubus* ABCD *brachio clauso* AB *alto ad pollices triginta (tab. II fig. XXXV), aperto* CD *sesquipollicem praeter propter elatiore barometrum conficit mihi nullo alio adjuncto tubo, nullo adhibito epistomio, aut difficili*

alio additamento. Itaque nulla in hoc occurrunt mercurio impedimenta ad motum, nisi quae aut ab adhaesione mercurii ad vitrum, aut a tubi flexura necessario oboriuntur, et sunt prae recensitis impedimentis omnino modica. Interea omnis, quae inter asportandum oboritur succussio (asporto enim plenum brachio utroque, et positione erectum) eo spectat, ut columnam mercurii breviorem BA *allidat fornici* A. *Atque hac allisione, si quis aut sub eo fornice reliquus sit aër, aut inhaereat adhuc mercurio interfusus, reflectitur deorsum in columna illa breviore* AB, *et in longiore* CD *effertur sursum. Quare unum restat, ut, ubi altitudo barometri est observanda, effundatur mercurius e brachio altiore, restituatur, ubi est asportandum.*

165 *At enim singulares omnes instrumenti modos videris tu mihi, Comes praeclarissime, a me plane requirere pro summo tuo audiendi studio, quod nihil quidquam in te concedit perspicacitati tuae singulari. Atque id percommode cadit, quemadmodum rem, ita et esse expeditissimam rei narrationem. Illud jam nosti mercurio me uti consuevisse purissimo, qui ad ignem ex cinnabari nativo, aut factitio exstillarit. Eo ut oppleam tubum, brachia ipsius ambo rite alligo tabulae* FU *in convenientissimis sulcis, ut ostium* D *tubi* CD *proxime exstet ex summitate ipsius. Immitto in hunc tubum mercurium ad pollices circiter sex; tum digito occludens ostium* D *tabulam inclino, ut brachium* BA *jaceat infra brachium* CD, *et summae amborum partes* A, *et* D *sint paullo depressiores iis, quae in schemate tenent locum imum. Itaque tabulam succutiens sursum juxta inclinatam eam positionem mercurium traduco in brachium clausum* BA. *Eadem arte a succussione quaque abrupta progredientem mercurium ingero alium,*

atque alium, quamdiu et brachium clausum BA *oppleat totum, et redundet etiam in flexura* CD. *Ita principio; at nunc certius rem exsequor, et citius. Infundibulum enim est mihi in promtu vitreum* INF *crure* NF *sursum obliquato aliquantisper in* N, *et gracillimo, longissimoque, ut in tubum* DC (*tabula, uti dixi, inclinata*) *immitti possit totum, et pertingat in* C *ad flexuram; ita enim mercurius ab elatiore infundibulo* IN *per crus* NF *depluit in brachium* BA, *atque opplet continuo totum.*

166 *Jam vero de ebullitione mercurii, de partitione subjectae chartae ad quadrantes lineae nil attinet dicere, utpote quae sunt tibi perspectissima omnia; igitur venio ad depletionis, repletionisque, imo et asportationis facilitatem, atque etiam securitatem. Tabulae* FU *pollicem crassae infigitur in* S *cubus e buxo pertusus in fundo, ut excipiat summum tubum apertum; hic cubus est praeterea tornatus in helices ampliores juxta reliquam altitudinem, ceu matrix, quae congruente cochlea occluditur, cum barometrum est asportandum. Cum vero barometri altitudo est inspicienda, tum sufficio devexum item ex buxo tubum* M *congruentem cochlea sua aequali. Itaque inclinata secundum constitutam legem tabula* FU *depletur tubus* DC *usque ad limitem* C, *quin aër in* BA *subire possit ullus: id enim vetat flexura, quae est in* B *ad angulum acutiorem; dumtaxat id cavendum, ne tabula plane invertatur, aut positione contraria inclinetur. Considerata barometri altitudine, mercurium e phiala infundo, in quam exceperam; occludo matricem* S *cochlea solida, interjecta spongia, quo expandi mercurius possit ab augescente calore, non subsultare ab iis, quae accidant inter asportandum, succussionibus. Asportatur autem quam tutissime barometrum hoc in theca*

adjuncta tabulae FU. *Ex summa enim tabula exstant lora gemina ad ipsam reflexa, in quae brachia immittit baiulus; duo alia a media tabula applicat sibi ad ventrem; itaque thecam defert pendentem a tergo. Atque nullus dubito, quin et in navi, et vero etiam in equo possit asportari.*

167 *Verum jam dudum tua ego abutor humanitate, qui consector omnia minutatim. Ulciscaris rogo; atque, quod fecisti in instrumentis aliis, hoc etiam barometrum restituas mihi melius ex animadversionibus tuis, atque perfectius. Vale; atque persuasum habe, me inter eos, a quibus coli te putas, principem locum habere et velle, et plane debere.*

168 *P. S. Quae scribis procurari passim in ista insula ad fulmen deducendum, accepi abs te quam libentissime. Videor tamen ego habere aliqua, quae moneam de ipsis deducendi modis, plurima, quae addam de arcendi ratione; quam gravissimam scientiae partem a me primum delibatam in literis ad Beccarium miror admodum neglectam hactenus ab omnibus etc.*

ARTICULUS V.

Polygonum adductum ad horizontem.

169 Altitudines, atque depressiones, de quibus mox dixi, atque anguli capti in planis ad stationes inclinatis, de quibus proxime dixeram, elementa sunt, ex quibus profluxerunt anguli ad horizontem adducti, cuiusmodi recensentur in columna sexta. Etenim altitudines observatae suis ad rectum complementis, depressiones vero suis, quas cum recto conficiunt, summis, sunt duo latera trianguli sphaerici coëuntia in verticem observatoris; et angulus captus est latus tertium trianguli eiusdem. Quare id agendum, ut ex datis in sphaera tribus illis lateribus angulus inveniatur comprehensus a duobus, quae in verticem observatoris conveniunt. Mensura enim recto distabit, ceu horizon, a vertice ipso, adeoque angulum metietur in horizonte.

170 Itaque notissimis formulis nos invenimus hos angulos, ceu ea est, in qua primo arcus supputantur, queis a semisumma trium laterum differunt duo quaesitum angulum comprehendentia, mox ad assequendum duplum logarithmum sinus semianguli quaesiti, logarithmi sinuum earum differentiarum aguntur in unam summam cum duplo logarithmo radii; atque abs ea subducitur summa ex logarithmis sinuum duorum illorum laterum. Ceterum, quo securi essemus, quemadmodum in aliis, ita in hac etiam angulorum inquisitione diversam ego, quoad calculum persequi potui, formulam plerumque usurpavi ab ea, qua Canonica utebatur. Praeterea nunc etiam inter eden-

edendum hunc librum Ferrerio, qui in Regio Provinciarum collegio Geometriam explicat, problemata inversa omnia exhibuimus; ceu si ex tribus lateribus angulum comprehensum inveneramus, ipse ex angulo invento, et lateribus comprehendentibus oppositum latus inquirebat. Tabulis vero usi sumus Gardinerii locupletissimis, quas Clarissimus Pezenas auxit, exornavitque.

171 Atque haec pertinent ad angulos adducendos ad horizontem stationis quosque suae, quam rem praestiterunt Geometrae post Bougherium omnes. Ad usum vero, quod attinet, ne tenuissimos quidem errores aut neglexímus, aut inconsiderate emendavimus, qui in eo supputationis modo quasi necessario emergunt. Non eos hic ego errores memoro, quos vereri quis possit a forma telluris elliptoidea: eos enim in mensura gradus demonstrarunt esse nullos Bougherius, alii, aut saltem minutum secundum valere non posse; dico de iis, quos minimos quidem, aut aliquos ingerit, in triangula praesertim ampliora, telluris rotunditas sphaericae figurae quamproxima; quos enim infert aberratio a perfecta rotunditate non sunt nisi particulae tenuissimae eorum errorum, qui oriuntur a rotunditate ita proxime perfecta, ut pro uno, et altero etiam gradu unicus usuveniat radius osculator circuli meridiani. Itaque id certum: ubi tres angulos in quoque polygoni triangulo adducimus ad horizontem, eorum angulorum summam duorum rectorum summam superare semper debere excessu quidem semper exiguo, et qui intra minuta tertia quandoque contineatur pro exilitate rationis, quam habet triangulum ad superficiem telluris, at excessu tamen superare debere semper.

aliquo. Quae enim quis adfert in hanc rem: triangulum polygoni esse veluti basim pyramidis in centrum telluris coëuntis, sectionem quamque pyramidis transversam esse semper triangulum, quod tribus angulis aequat rectos duos, difficultatem non expediunt in re levi manifestam. Latera enim duo anguli in horizonte tangunt sphaericam tellurem in vertice ipso anguli; itaque nec coëunt cum tangentibus stationum aliarum in unicam pyramidis sectionem, et angulorum summam conflant tribus rectis maiorem.

172 Quare nos praesertim, qui amplis singularibus triangulis duobus totum polygonum complexi sumus, rationem decuit explorare, qua eius excessus particula cuique angulo tanta attribueretur, quanta contingeret. Igitur cum tres in dato triangulo anguli adducuntur ad horizontem, et praeterea a basi ipsa etiam ad horizontem adducta, angulis parte excessus apte multatis, polygoni latera exploramus, triangulum invenimus, ceu AEF (*fig. XXI tab. I*), quod constituunt tres chordae AE, EF, FA pertinentes ad superficiem telluris aequabiliter rotundae. Ut autem innotescat quanta particula illius excessus contingat uni angulo cuivis in horizonte ceu BAD, considerandum est angulos BAC, DAC, quos BA, DA tangentes stationis A constituunt cum linea gravium UC, esse rectos ambos; atqui etiam angulus FAC cum semisse anguli ad centrum FCA, similiterque angulus EAC cum semisse anguli ad centrum ECA aequantur singuli recto ob radios AC, EC, FC a superficie telluris aequabili ad centrum aequales; igitur D*d*, B*b* sunt mensurae eorum semiangulorum ad centrum, atque *d*I, *b*I sunt earum complementa ad re-

ctum. Quare *si ex eorum semiangulorum ad centrum complementis ad rectum* Id, I*b*, *et angulo b*I*d ad horizontem invento eliciatur in triangulo sphaerico b*I*d latus bd*, *ipsum erit mensura anguli* EAF *sufficiendi angulo primum invento* BAD. Atque si ita res exigatur pro triangulo quoque, excessus is, de quo agitur, erit quam rectissime distributus.

173 Condaminius inquit, excessum huiusmodi, qui persaepe assurgebat ad secunda aliquot, distribuisse se pro angulorum magnitudine, nulla interposita consideratione alia; neque tamen vereor, ne ea res vitium intulerit illi ad aequatorem polygono, utpote quod agatur de menda omnino tenui in dimensione considerata etiam ab Academicis aliis praeclarissimis. Ad nos vero quod attinet, post inventam memorati excessus, (qui praeterquam in triangulo singulari ad Montemregalem nunquam superavit secunda tria, atque alibi plerumque integrum secundum non confecit), inquisitamque ex calculo debitam distributionem, ipsi tamen semel, vel iterum non adhaesimus, quod aliae subessent caussae in angulis primo correctis, vel etiam in ipsa triangulorum complexione, quamobrem in tenuissimo errore castigando tenui particula ipsius aliqua a lege discederemus.

174 Quare pensitatis rationibus in quoque angulo omnibus, a basi ad horizontem, uti nuper inquiebam, progressi sumus consueta analogia, qua latera constituuntur quemadmodum sinus oppositorum angulorum, atque latera polygoni in horizonte definivimus, qualia numeramus in Col. VII.

ARTICULUS VI.

Meridiana Andratensis.

175 Arcus terrestris est meridiani in facie telluris aequabili arcus inter terminos polygoni comprehensus, atque ad eamdem mensuram, ad quam latera polygoni, exactus. Quare primo loco meridiani transeuntis per terminum eorum unum positio invenienda est ad stationem unam opportunissimam, tum ex mutua, quam habent inter se stationes, positione elicienda positio singularum ad meridianum illum, atque inde longitudo illius ex longitudine consequentium in polygono laterum definienda.

176 Itaque die 17 julii anno illo eodem 1762, captis in itinere polygoni angulis ad partem boream, Andratas conscendimus exploraturi declinationes fixarum, qua de re dicam postmodum, atque interea etiam determinaturi directionem circuli meridiani eo termino transeuntis, de qua habeo nunc dicere. Utraque autem inquisitio meridianae lineae descriptionem postulabat. Igitur continuo in fornice Sacrarii lateritio laminam ex aurichalco infiximus, quae esset instar apicis styli (huius sectio videtur in *fig. XXXIX tab. III*). Lamina AA, et amplior lamina ferrea BB cohaerent a stamno, quo sunt imbutae candentes ab igne; desinunt ambae interius in rotundam aciem, ut foramen in *a* pateat amplum unam partem millesimam altitudinis styli. Operculum CC cavum utrinque, ac a torno pertusum in centro foramine quam minimo aptissime congruit laminae AA; atque hoc usuvenit tum ad lami-

nam AA recte ponendam, tum ad centrum styli *a*ʼ definiendum in solo: nam dum lamina gypso, et rudere minuto locatur in fornice, occluditur foraminulum *c* operculi; atque oleum affusum cavo CC edocet, quam in partem premi ipsa debeat, ut peripheria foraminis *a*, quae a torno est parallela peripheriae CC componatur ad libellam. Postmodum vero pendulum *p* demissum a foraminulo *c*, atque libratum quam rectissime centrum styli *a*ʼ determinat in massa ex aurichalco alte, lateque solo defixa.

177 A die eiusdem mensis 20 ad 25 captae sunt altitudines solis perplures mane, et vespere aequales, atque emendatione adhibita, quam postulat variatio declinationis horaria, directio meridianae lineae per illud centrum in ansis ferreis muro utrinque defixis constituta est quam diligentissime, comprobataque. Neque tamen meridianae ipsius positio ad stationem fuit definita ante diem decimamseptimam augusti, quando a fixis latitudo loci jam saltem quamproxime suppetebat, quo elemento erat opus in ea inquisitione. 17 Aug.

178 Profecto non fuit dudum deliberandum nobis, quam stationem deligeremus: eam enim offerebat nobis opportunissimam Supergensis tholus, utpote quae statio una omnibus patebat, et ad quam poteramus adeo etiam collineare ex alio polygoni termino.

179 Igitur pomeridianis eius diei horis quadrante constituto in area, quae patet ante illud sacrarium, et directo telescopio fixo ad medium parvum tholum, mobile adduximus ad solem, atque haec obtinuimus calculi elementa.

Appulsus centri solis ad centrum telescopii tempore vero.		*Angulus inter centrum solis, et punctum medium parvi tholi.*
$5^h.\ 11'.\ 23''$.	. . . . . .	$81^\circ.\ 57'.\ 30''$.
5. 42. 30.	. . . . . .	87. 1. 48.
5. 57. 34.	. . . . . .	89. 33. 57.

180 Calculi autem ratio, etsi est apertissima, placet tamen hic ipsam figura explicare, quae est XL in tab. III. Circulus B*oag*B est horizon Andratensis, in cuius centro quadrantem constitueramus; circulus alius BU*a* est meridianus loci eiusdem; adeoque BA*a* est linea meridiana, cuius positio ad tholum Supergensem est invenienda. S est Supergensis tholus depressus infra horizontem Andratensem. Reliqua sunt manifesta omnia. P est polus, O locum solis designat centro suo appellentis ad centrum telescopii.

181 Itaque ex dato eius appulsus momento innotescunt et angulus horarius UPO, et PO complementum declinationis, quae dato appulsus momento solis O contingit; sed praeterea erat jam nobis perspectum latus PU complementum latitudinis loci; igitur in ipso triangulo OPU cetera definiuntur, nempe latus UO distantia solis a vertice, et angulus OUP, cuius mensura *o*B est solis ipsius in horizonte distantia a puncto boreo B.

182 Jam vero explorato latere UO, ipsoque refractione minuto, quoniam et latus OS quadrante est captum, et latus US est aequale depressioni tholi Supergensis *s*S recto auctae;

hinc in triangulo SUO angulus ad U determinatur, cuius mensura in horizonte addita distantiae *o*B antea inventae edit distantiam *s*B tholi Supergensis a puncto boreo B. Unde haec concluditur ex his observationibus tabella.

	*o*B	*so*	*o*B+*so*	*sag*B
I	89. 4. 19.	81. 26. 3	170. 30. 22.	189. 29. 38.
II	83. 37. 0.	86. 53. 2.	170. 30. 2.	189. 29. 58.
III	81. 0. 4.	89. 30. 6.	170. 30. 10.	189. 29. 50.

In cuius tabellae areola quarta qui adjiciuntur anguli *sag*B, sunt ipsae lateris A*s*, quod a puncto Andratensi A ad Supergam *s* in horizonte producitur, ad meridianam Andratensem A*a* positiones. Est id enim in more positum, ut ipsae a puncto boreo B per ortivum horizontem computentur. Atque harum positionum, quae est ultima in tabula, est item proxime aliarum media. Ab ista autem nemo mirabitur discedere extremam unam integris secundis duodecim, si animadvertatur Geometras alios incidisse in differentias adhuc maiores; atque has aestimabit omnino exiles quisquis consideraverit exsistere eas potuisse ex errore modico, qui sit admissus in definiendo appulsu centri solis ad centrum telescopii.

ARTICULUS VII.

Meridiana Monregalensis.

283 Andratis cum essemus, accepimus instauratas Momburgi aedes, sed olere ipsas calcem recentem; quare cum antea vidissemus locum illum omnino parum opportunitate sua stationi posse praestare, quae Monteregali in aedibus *Franciscanorum* constitueretur, scripsimus, ut eae nobis necessaria supellectile instruerentur, quae sunt ad occasum disjunctae, et finiuntur porticibus duabus ad boream in area ante urbanam turrim (vulgo *il bel vedere*) ad stationes omnes australes patentissima. Itaque sectorem in una earum aedium figere, et quadrantem in proxima locare decrevimus porticu, in modico a sectore intervallo.

184 Atque re omni Andratis absoluta die 19 augusti recta Montemregalem festinavimus, quo fixarum in terminis polygoni observationes in idem tempus quamproxime convenirent; neque tamen ante diem 25 quadrantem, atque sectorem accepimus, utpote quod firmissima, aeque ac ponderosa instrumenta haec asportabantur, uti jam dixi, humeris hominum. Isti erant numero quatuor supra viginti ex pago Andratensi; atque ii quamquam erant firmissimo corpore, exercitatissimoque, atque dumtaxat tertia quaque hora pondus subirent singuli, venerunt tamen fracti a labore, atque ab aestu diffluentes ipsis inusitato.

185 A die 26 ad 30 semper quadrante cepimus altitudines solis mane, et vespere, quae essent aequales, atque ex iis meri-

meridianam in cella sectoris duximus, et accuratissime expendimus. Mox eius positionem ad latus, quod Monteregali Supergam pertinet, definivimus die octava septembris.

186 Profecto adblanditi ipsi nobis eramus, fore ut possemus in hac inquisitione fixa uti pro sole. Nam in ipso solemni eius diei pervigilio templum Supergense piceis frequentissimis flammis illuminatur undique etiam circa parvum tholum. Quare constitueramus uti ea luce, ut nocte prima centrum telescopii mobilis ad ipsum Supergensis stationis centrum dirigeremus, atque interea centro fixi stellam captare, cuius ascensio recta, et declinatio essent nobis ex ipsis observationibus nostris maxime perspectae. Quae observatio tanto fuisset praestantior, quanto appulsus fixae, puncti nempe magnitudine quasi individua, certior est appulsu centri solis. Verum densi in ingenti illa distantia vapores spem fefellerunt nostram. Itaque die ipsa octava post meridiem redivimus ad solem.

	Appulsus centri solis ad centrum telescopii tempore vero.	*Anguli inter centrum solis, et punctum medium parvi tholi.*
I	5h. 33′. 25″.	87°. 8′. 50″.
II	5. 54. 21.	83. 28. 56.
III	6. 8. 26.	81. 0. 25.

187 Calculus autem est omnino similis in dissimili hac positione. Nam *agBo* (*fig. XLI*) est horizon contingens quadranti posito in *u*; B*ua* est meridiana traiecta per centrum quadrantis; *us* est latus Supergam pertinens, atque B*gaos* est positio lateris *us* ad meridianam B*ua*. Itaque ex dato la-

titudinis jam proxime cognitae complemento PU 45°. 36′. 26″, atque ex complemento declinationis PO, quae soli O dato appulsus momento contingit, et angulo praeterea horario UPO debito momento eidem, eliciuntur et angulus OUP, cuius mensura *o*B distantia solis in horizonte a puncto boreo B, et latus OU distantia solis a vertice. Jam vero in triangulo OUS praeter latus OU jam exploratum, et mox refractione minutum, atque latus quadrante dimensum OS, innotescit etiam US aequale depressioni parvi tholi *s*S auctae recti mensura *s*U. Itaque innotescet etiam angulus OUS, cuius mensura *os* distantia tholi *s* a sole *o* in horizonte; quae subducta a distantia *o*B jam inventa solis a puncto boreo, reliquam dabit *s*B distantiam tholi a puncto boreo. Atque demum huius distantiae *s*B complementum ad 360°, totus nempe horizontis arcus B*gaos* erit ipsa quaesita lateris *us* ad meridianam Monregalensem positio; quae res repraesentatur omnis in adjecta tabella.

	*o*B	*so*	*o*B—*so*	B*gaos*
I	90°. 39′. 27″.	87°. 5′. 12″.	3°. 34′. 15″.	356°. 25′. 45″.
II	87. 0. 29.	83. 26. 21.	3. 34. 8.	356. 25. 52.
III	84. /3. 31.	80. 59. 20.	3. 34. 11.	356. 25. 49.

Quarum positionum omnium mediocris 356. 25. 48. $\frac{2}{3}$ est ferme ipsa illa, quae ultimo loco ponitur, et ab extremarum altera tribus, ab altera non quinque secundis amplius differt.

188 Atque hinc licet jam progredi ad singulas positiones definiendas, quas habent latera polygoni singula ad meridianam Monregalensem. Nam si in uno lateris cuiusque termino locari se fingat observator, atque in eo, qui ipsi ibi contingit horizonte, arcum numeret, qui inter parallelam meridianae Monregalensi ductam per illum terminum, et inter alium lateris terminum eundo a borea per ortum comprehenditur, ille arcus erit positio eius lateris quaesita; ille autem arcus ex continuo cognitorum in polygono angulorum nexu innotescit. Verum omnem hanc rem placet nobis persequi seorsim.

ARTICULUS VIII.

Positiones laterum.

189 Quoniam ex observatione solis positionem definiveramus ad meridianam Monregalensem eius lateris US, quod ad polygonum coalitum ex triangulis duobus, ipsumque adeo minus certum unice pertinet; hinc sollicite admodum quadrante angulum SUL (*tab. III. fig. XXXVII*) sumus dimensi, quo ex observata positione eius lateris US ad meridianam U*a* positionem lateris UL, quod Monteregali Salutias spectat, et vero etiam ad accuratius polygonum pertinet, eliceremus. Eruta autem positione lateris unius, positiones omnium inveniuntur continua eorum angulorum additione, qui arcum positionis augent, vel eorum subtractione, qui minuunt.

190 Duo dumtaxat animadvertenda; primo quidem, si inter addendum summa superet 360°, ipsam redundantem par-

tem esse arcum positionis quaesitum; sin inter subtrahendum arcus, qui demitur, eum superet, a quo demitur, ipsam hanc differentiam esse complementum ad 360° positionis, quae dato lateri contingit. Deinde vero, cum ab angulis continuis ad alios fit transitus, qui non sunt quidem continui, sed communi latere connectuntur, tum eum transitum fieri quam commodissime inveniendo lateris eius positionem jam inventae contrariam; quod fit addendo inventae 180, si contraria debeat esse maior, vel subtrahendo, si contraria quae est, debeat esse minor. Itaque

I	Datae positioni				. . . .	US	356.	25.	50.
II	deme	SUL	40°.	58′.	1″. habebis	UL	315.	27.	49.
III	adde	LUF	42.	4.	0.	UF	357.	31.	49.
IV	deme ex UL		180.	0.	0.	LU	135.	27.	49.
V	deme	ULF	72.	38.	17.	LF	62.	49.	32.
VI	deme	RLF	60.	35.	6.	LR	2.	14.	26.
VII	adde		180.	0.	0.	RL	182.	14.	26.
VIII	deme	LRF	35.	35.	8.	RF	146.	39.	18.
IX	deme	FRS	59.	53.	50.	RS	86.	45.	28.
X	deme	SRB	81.	22.	1.	RB	5.	23.	27.
XI	adde	BRT	82.	2.	11.	RT	87.	25.	38.
XII	adde	RB	180.	0.	0.	BR	185.	23.	27.
XIII	deme	RBT	29.	50.	57.	BT	155.	32.	30.
XIV	ex BR deme	RBS	44.	10.	28.	BS	141.	12.	59.
XV	deme	MBS	55.	54.	52.	BM	85.	18.	7.
XVI	deme	MBA	41.	20.	13.	BA	43.	57.	54.
XVII	adde		180.	0.	0.	AB	223.	57.	54.
XVIII	deme	BAM	55.	40.	27.	AM	168.	17.	27.

191 Porro si quemadmodum per occidua polygoni latera Monteregali Andratas pervenimus, ita per ortiva iter idem remetiamur, incidemus in eamdem lateris AM positionem:

XIX	Nam arcui positionis					. . . . .	UL	315.	27.	49.
XX	adde	LUF	42.	4.	0.	erit	UF	357.	31.	49.
XXI	deme		180.	0.	0.	. .	FU	177.	31.	49.
XXII	adde	LFU	65.	17.	43.	. .	FL	242.	49.	32.
XXIII	adde	LFR	83.	49.	46.	. .	FR	326.	39.	18.
XXIV	adde	RFS	28.	33.	58.	. .	FS	355.	13.	10.
XXV	deme		180.	0.	0.	. .	SF	175.	13.	16.
XXVI	adde	RSF	91.	32.	12.	. .	SR	266.	45.	28.
XXVII	adde	RSB	54.	27.	31.	. .	SB	321.	12.	59.
XXVIII	adde	BSM	67.	6.	49.	. .	SM	28.	19.	48.
XXIX	adde		180.	0.	0.	. .	MS	208.	19.	48.
XXX	adde	SMB	56.	58.	19.	. .	MB	265.	18.	7.
XXXI	adde	BMA	82.	59.	20.	. .	MA	348.	17.	27.
XXXII	deme		180.	0.	0.	. .	AM	168.	17.	27.

192 Atque hinc eliceretur positio lateris AS 189. 31. 46. nam angulum SAB cepimus Andratis quam diligentissime, atque invenimus aequalem 34. 26. 8. Verum placet rem conficere ex triangulis singularibus duobus:

Itaque ex positione	. . . .	US	356.	25.	50.
XXXIII	deme SUR, habebis . . .	UR	341.	42.	8.
XXXIV	deme 180.	RU	161.	42.	8.
XXXV	deme URS, et ARS	RA	29.	19.	18.
XXXVI	adde 180	AR	209.	19.	18.
XXXVII	deme RAS	AS	189.	31.	45.

ARTICULUS IX.

Longitudo polygoni totius.

193 Perpendiculis ad meridianam Monregalensem U*a*, vel ad parallelas ipsius R*l*, R*b*′, A*b* a stationibus congruenter ductis, exsistunt triangula rectangula LU*l*′, *l*RL, R*b*′B, BA*b*, quae progrediendo Monteregali Andratas conficiunt longitudinem polygoni.

194 Porro eorum triangulorum hypothenusae sunt ipsa latera polygoni dimensa; anguli vero, qui aut meridianae, aut rectis adjacent meridianae parallelis, facile inferuntur ex angulis positionum. Itaque in iis triangulis

I	LU*l*′	44°. 32′. 11″.	UL	19656, 44.	L*l*′	13786, 28.	U*l*′	14011, 21.
II	LR*l*	2. 14. 26.	RL	24767, 30.	L*l*	968, 28.	R*l*	24748, 36.
III	BR*b*′	5. 23. 27.	RB	12120, 74.	B*b*′	1138, 73,	R*b*′	12067, 13.
IV	BA*b*	43. 57. 54.	AB	19449, 03.	B*b*	13501, 88.	A*b*	13998, 74.

Igitur longitudo polygoni totius 64825, 44.

195 Similiter progrediendo Monteregali Andratas per triangula alia rectangula quatuor FU*f*′, FS*f*″, MS*m*″, MA*m* longitudo invenitur eadem.

I	FU*f*′	2°. 28′. 11″.	UF	20650, 97.	F*f*′	889, 88.	U*f*′	20631, 78.
II	FS*f*″	4. 46. 44.	SF	18780, 14.	F*f*″	1564, 38.	S*f*″	18714, 85.
III	MS*m*″	28. 19. 48.	SM	14547, 92.	M*m*″	6903, 70.	S*m*″	12805, 50.
IV	MA*m*	11. 42. 43.	AM	12942, 58.	M*m*	2625, 62.	A*m*	12673, 26.

Longitudo polygoni 64825, 39.

quae differt a nuper collecta centesimis hexapedae partibus non amplius quinque.

196 Potest iterum inveniri haec longitudo a singularibus triangulis duobus SUR, SAR, nam in quatuor triangulis rectangulis SU*s*, SA*s*′, RU*r*, RA*r*′ anguli aut patent, aut ex cognitis positionibus eruuntur; hypothenusae autem sunt latera jam cognita; atque par primum eorum, et par alterum polygoni longitudinem iterum proferunt ambo.

I	SU*s*	3°. 34′. 10″.	US 39427, 27.	U*s* 39350, 79.
II	SA*s*′	9. 31. 45.	AS 25835, 56.	A*s*′ 25479, 07.
Longitudo polygoni				64829, 86.
I	RU*r*	18. 17. 52.	RU 40828, 08.	U*r* 38763, 71.
II	RA*r*′	29. 19. 18.	AR 29896, 33.	A*r*′ 26066, 07.
Longitudo polygoni				64829, 78.

197 Hae autem duae ultimae polygoni longitudines non differunt altera ab altera nisi octo hexapedae centesimis, atque harum quatuor circiter debentur parti secundi neglecti in complemento anguli RA*r*′. Nec vero est ingens differentia inter has, quae ex duobus ingentibus triangulis exsistunt, et geminas alias, quae emergunt ex polygono toto; nam hexapedis continetur praeterpropter quatuor; qua differentia minorem optare quidem licet, sperare autem vix licet. Interea polygono primas, uti decet, deferendo, longitudinem ipsius totam, eam nempe, quae a porticu Monregalensi in area ante urbanam urbem ad angulum protenditur domus Brunerii, quae est Andratis, constituemus hexap. 64825, 39.

ARTICULUS X.

Partitio arcus in specula Taurinensi.

198 Quoniam meridiani nostri arcus hinc ad Graias, et Penninas altissimas alpes finitur, inde ad maritimas, quae quamquam multo humiliores, videntur tamen ipsae etiam pro generali gravitate pendulum sectoris allicere debere ad sese, estque adeo is arcus non tam idoneus ad proportionem graduum demonstrandam in figura telluris aequabili, quam ad aberrationes ab ea proportione significandas, quae a montium praesertim inaequabilitate debent exsistere: hinc consultum duximus partiri hunc gradum nostrum terrestrem percommodo in loco, ubi actio boreorum montium, et australium seiungeretur, ut quid quaeque valeret, quoad licebat, dignosceremus.

200 Atqui nec Ripulis, nec Supergae, multoque etiam minus in vallo Taurinensi fixas observare commode poteramus, ceu in specula; itaque constituimus hanc jungere cum vallo. Quod, quo praestiterimus modo, paucis narro. RS in fig. XLII est latus, quod Ripulis Supergam pertinet, quodque ibi amplificatum exhibemus, ut ea cerni possint, quae in figura polygoni confunderentur; T. vero est vallum Taurinense; O est ipsa, de qua agitur, specula; atque quoniam haec non est, nisi temporaria, ideo et eam, et vallum colligavimus cum turri I Ecclesiae Metropolitanae, quo monumento vix ullum habemus perennius; sed et id fecimus quasi ex necessitate: nam specula nec ex vallo, nec ex stationibus aliis apparebat; dumtaxat ex tholo Supergensi ipsam observavimus;

eam

eam autem turrim, etsi ipsa vallo erat abdita, observare tamen potuimus ex stationibus aliis.

201 Itaque, primo in triangulo SRT angulus SRT est aequalis differentiae inter TRB, et SRB (confer fig. XXXVII cum XLII) nempe SRT 0. 40. 10,

et ex polygono RS 10380, 14,

RT 6501, 26;

RST 1°. 7'. 18".

atque ex his eliciuntur RTS 178. 12. 32.

TS 3880, 56.

202 Secundo in triangulo RIS ex angulo RSL Supergae capto, atque ex angulo ISL iterum capto ex Supergensi tholo, illo inter Ripulas R, et Salutias L, hoc inter Salutias L, et turrim I innotescit angulus RSI 3°. 34'. 42".

203 Sed iterum Ripulis captus est angulus (captos quos dico angulos, iis non utebamur, nisi adductis ad horizontem) inter turrim I, et Sinfredium F, qui subductus ex angulo polygoni SRF reliquum facit SRI 1. 42. 48;

itaque in triangulo RSI invenitur IS 3365, 16.

204 Tertio in triangulo ISO praeter latus IS captus est ex specula angulus IOS 95°. 43'. 35",

et ex tholo Supergensi angulus ISO 3. 47. 34;

igitur definitur SO 3335, 47.

205 Quarto demum si per S ducatur *So* parallela meridianae Monregalensi, atque ex S excitetur normalis *Ss''*, demittaturque *Oo* ipsi *So* normalis; *Oo* erit distantia speculae Taurinensis O ab *So*, atque *So* erit pars arcus terrestris intercepta Supergam inter, atque speculam. Jam vero in triangulo *OSo* praeter hypothenusam OS nuper exploratam, et angulum in *o* rectum, innotescit angulus *OSo*; est enim aequalis positioni lateris SR minutae angulo RSO 7°. 22'. 16'', et iterum minutae 180°; adeoque *OSo* 79. 23. 12.

Itaque	*Oo*	3278, 40.
	So	614, 32.

quae cathetus *So* addita parti arcus Andratas inter, et Supergam comprehensae 25478, 76.

complebit partem arcus comprehensam Andratas inter, et speculam	26093, 08;
subtracta vero a parte arcus, quae Monteregali pertingit Supergam 39346, 63, dat partem arcus Montemregalem inter, et speculam	38732, 31,
earumque summa iterum facit arcum	64825, 39.

206 Verum haec polygoni longitudo, quo pertingat ad loca sectoris, augenda est utrinque; Monteregali quidem hexap. 7, 65; eo enim iuxta meridianum intervallo distabat

sector in cella a quadrante in porticu, uti accurato, quem confecimus, atque ad hexapedam diligenter exegimus, typo certo cognovimus.

207 Sed additamentum, quod contingit termino boreo polygoni, est multo maius. In ipsum itaque dupliciter inquisivimus calculo inito ex latere polygoni, et angulis captis, atque mensione diligentissime exacta ad planum horizontis. Ecce calculum: Supergae cum essemus, quadrante cepimus angulum AS*a* (*fig. XLIII tab. III*) inter A locum quadrantis in domo Brunerii, atque *a* locum sectoris, qui exstitit 0°. 4′. 20″. Quare a cognita hypothenusa AS latere polygoni infertur A*x* 32, 56. Sed in triangulo *xa*A observaveramus angulum *a* 30°. 59′. 50″: itaque innotuit A*a* 63, 23; denique angulum etiam exploraveramus *a*′A*a*, quem in A cum hypothenusa A*a* constituebat meridiana *a*′A*s*; igitur emerserunt in A*a* addendae polygono hexap. 58, 83; a quibus tamen demenda 1, 77. Nam Supergae angulum AS*a* finiebamus ad latera externa Sacrarii, atque domus Brunerii, a quibus distabant introrsum sector pedes quatuor, pollices octo, quadrans pedes quinque, pollices undecim circiter.

208 Itaque si parti arcus inter speculam Taurinensem, et locum quadrantis in statione Monregalensi 38732, 31.
addatur distantia inter quadrantem, et sectorem 7, 65.

habebitur pars arcus inter speculam Taurinensem, et locum sectoris in cella Monregalensi 38739, 96.

2

209 Similiter si parti arcus inter speculam Taurinensem, et locum quadrantis in statione Andratensi 26093, 08, addatur distantia quadrantis a sectore 57, 06, habebitur pars arcus inter speculam Taurinensem, et locum sectoris in Sacrario Andratensi 26150, 14.

210 Unde demum arcus totus inter loca sectoris 64890, 10.

ARTICULUS XI.

Emendatio arcus ex meridianorum inclinatione.

211 Hactenus collegimus longitudinem polygoni ex rectis meridianae Monregalensi parallelis inter consequentes polygoni stationes interceptis; atque perpendiculis a stationibus illis ad hanc ductis illarum ad hanc positionem definivimus. Verum meridianorum inclinatio, qui in polis coëunt similiter omnes, erroris arguit hanc agendi rationem, a quo adeo et arcus longitudinem, et stationum positiones emendari oportet.

212 A, et a' (*tab. III fig. XLIV*) sunto bina duorum meridianorum puncta ambo in latitudine aequali, in quibus ii tangantur a rectis AT, a'T; eae inerunt in planis meridianorum; adeoque quemadmodum isti, ita illae coibunt in axem telluris; et quoniam pertinent ad puncta A, et a' latitudinis

aequalis coibunt in idem punctum T, atque angulo suo ATa' exponent inclinationem mutuam meridianorum in iis punctis A, a'. Jam vero tam arcus, qui metitur angulum ATa', quam arcus, qui metitur angulum ACa' ad centrum telluris, habebunt chordam communem, adeoque duo radii AC, a'C habebunt sinum sui semianguli in eadem semichorda, in qua habent sui duae tangentes AT, a'T; adeoque sinus huius anguli ad sinum illius erit uti radius ad cotangentem latitudinis, quemadmodum dixi jam alibi, sive uti tangens ad radium.

213 Atque pro re nostra, in qua meridiani sunt parum inter se dissiti, cuiusmodi eos esse oportet, qui ad polygoni satis idonei stationes pertinent, sinus angulorum vix differunt a chorda, nempe a duplo semiangulorum sinu; adeoque pro eorum sinibus eadem obtinebit, quae pro sinibus semiangulorum est demonstrata proportio. Itaque sinus ATa' ad sinum ACa' est uti At ad AC. Nempe inclinatio quaesita habetur partiendo per radium factum ex tangente latitudinis, et ex sinu distantiae stationum conversae in arcum circuli maximi.

214 Atque hinc primo loco positiones stationum emendantur. Ponam ego exemplum in statione Andratensi, cuius positionis emendatio est apprime necessaria, ut consensus observationum solis, quae in ea sunt habitae cum iis, quae habitae sunt Monteregali, fiat denique manifestus. Igitur ex observationibus Andratensibus positio lateris AS (*fig. XXXVII tab. III*) exsistebat 189°. 29'. 50". Verum ordiendo a positione lateris US elicita ex observationibus Monteregali habitis, atque progrediendo per latera intermediarum stationum devenimus ad positionem eiusdem lateris 189°. 31'. 45".

215 Profecto pars differentiae manifestam habet caussam in parallaxi locorum eius, in quo finitur Andratis latus polygoni, et alterius, in quo illic sol fuit observatus. Nam latus polygoni AS terminum habet (videsis *fig. XLIII tab. III*) in A in aedibus Brunerii; atque observationes solis habitae sunt in *a* in area ante Sacrarium. Itaque non lateris AS, sed lateris *a*S positio per observationes est determinata; atque angulus inter extrema eius domus, atque Sacrarii latera Supergae captus exstitit 0°. 4′. 20″, a quo demenda secunda praeterpropter viginti ob distantiam quadrantis ab iis lateribus. Quare, si quatuor haec minuta subtrahas a positione illata lateris AS, minor ipsa fit, sed propior positioni Andratis observatae: nam evadit 189°. 27′. 45″.

216 Atque defectum hunc ipsa jam proxime exaequat meridianorum, de qua agebam, mutua inclinatio: nam positio illata, et correcta a parallaxi est positio AS (*fig. XLV tab. III*) ad A*s* parallelam meridianae Monregalensi; observata autem est positio AS ad meridianum Andratensem A*u* parallelae illi, adeoque et meridiano Monregalensi inclinatum angulo *u*A*s*. Itaque hoc angulo inclinationis augeri illa debet, qui est aequalis illi ipsi angulo, in quem coirent rectae duae tangentes meridianos *u*AP, U*a*`P in punctis A, et *a*`.

217 Porro distantia duorum meridianorum Monregalensis, et Andratensis est 1823, 62, et haec conversa in arcum circuli maximi profert 0°. 1′. 55″. Andratis autem locus sectoris est in latitudine 45°. 31′. 18″. Itaque partiendo per radium telluris factum ex eius arcus sinu in tangentem huius latitudi-

nis exsistit inclinatio *sAu* 0°. 1'. 57",
quae addita positioni correctae a parallaxi 189. 27. 45,
profert positionem vix diversam ab observata 189. 29. 42.

218 Simili autem calculo poterit quivis, quas positiones aliarum stationum nos ad parallelas meridianae Monregalensi definivimus, eas emendare, ut positiones exsistant, quas habent singulae ad singulos meridianos suos. Nos positionem unam AS (*fig. XXXVII tab. III*) illatam ex positione US Monregalensi adduximus ad eam, quam Andratis observavimus, quod erat necessarium, ut constaret directionem meridiani Monregalensis esse recte constitutam, qua etiam ex re videt quivis pendere longitudinem arcus.

219 Sed praeterea inclinatio meridianorum ipsa etiam per se afficit longitudinem arcus: nam qui ob eam inclinationem describi debent inter meridianos diversos paralleli, ut punctum in eorum uno datum ad aequalem in altero latitudinem adducatur, particulam addunt, vel demunt arcui a perpendiculis definito, atque eam diversae meridianorum distantiae, et diversae locorum latitudini congruentem. Sic dum ex polo P (*fig. XLV tab. III*) arcus paralleli A*a*' a meridiano Andratensi traducitur ad Monregalensem abscindit, a longitudine arcus, quae normali A*a* fuerat definita, particulam *aa*'. Huius autem magnitudo facile definitur; nam si in triangulo AT*a* (*fig. XLIV tab. III*) A*a*' sit chorda paralleli, et A*a* normalis a meridiano Andratensi A*p* ad Monregalensem *ap*, angulus *aa*'A erit aequalis complemento ad 90°. semissis anguli inclinationis AT*a*' ob AT, *a*'T aequales; angulus vero *a*'A*a* erit aequalis

complemento ad 90°. anguli nuper inventi $aa'T$, itaque obvia erit analogia; uti sinus Aaa' 89°. 59'. 1''. 30''' ad sinum $a'Aa$ 0°. 0'. 59''. 30'''; ita Aa 1823, 62 ad aa' 0, 51.

220 Quare ultima exsistit, atque undique correcta longitudo arcus totius 64889, 59. Monteregali enim ubi fixae sunt observatae, aliam non subit arcus longitudo mutationem. Unum restat, ut specula Taurinensis O (*fig. XLV tab. III*) ipsa etiam per parallelum Oo' referatur ad meridianum Monregalensem, ad quem normali Oo est hactenus relata.

Itaque quoniam datur distantia Oo 5732, 86,
hinc elicitur inclinatio meridianorum 0°. 6'. 2'',
et particula $o'o$ 5, 03,
subtrahenda a parte australi polygoni, addenda parti boreae.

221 Itaque pars arcus borea a specula Taurinensi ad Sacrarium Andratense, quae additis 57, 06. ob distantiam a domo Brunerii ad Sacrarium exstiterat 26150, 14,
nunc subducta particula $a'a$ 0, 51,
atque addita particula $o'o$ 5, 03,
exsistit 26154, 66.

---

222 Contra pars arcus australis a specula Taurinensi ad cellam sectoris, quae, additis 7, 65 ob distantiam porticuum a cella, evaserat 38739, 96,
nunc subducta particula eadem $o'o$ 5, 03,
fit 38734, 93.
Atque haec de arcu terrestri.

CAPUT IV.

SECTOR.

ARTICULUS I.

Novi sectoris lineamenta.

223 Etsi vereor, ne in praeclara hac Astronomiae luce audaciae possim jure reprehendi, si dicam de eiusdem scientiae, quae vulgo censetur instructissima, nobilissimo instrumento parte aliqua perficiendo; cum tamen illud ego considero veritatis amatores eo animo esse oportere, ut eam illustrari malint, quam se ipsos laudari, tum vero me vehementius allici sentio a spe minimulae cuiusque, quae pulcherrimae scientiae fieri possit, accessionis, quam quod a metu absterrear gravissimae, quae in me possit cadere, reprehensionis. Animos vero addunt exempla clarissimorum virorum. Mittam vetera, quae sunt numero longe plurima; nec illa memoro, quae ad perficiendam instrumentorum partitionem paucos annos ante exhibuerunt nobis luculentissima Boscovichius, et Dux de Chaulnes academicus Parisinus; unum innuam, quod et est nuperrimum, et rei, de qua sum dicturus, videtur affine: scilicet hoc ipso, quo haec ego scribo, mense accipio Londino: Wilsonum Glascowii professorem rotundis ex argento filis suffecisse in micrometris fila complanata ea utilitate, ut punctum decernatur quintuplo minutius. Itaque quid ni ausim ego de sectore dicere, qui sine difficultatibus micrometri omnes sit habiturus micrometri utilitates, et praeterea pendulo non egeat,

atque in observatione quaque comprobet ipse per se rectam positionem suam; asportationis vero earum partium, quae maxime interest, ne aut luxentur, aut distorqueantur, facilitate, securitateque, atque ipsa denique etiam usus certitudine laudatissimis sectoribus praecellere debere videatur?

224 Subiit mihi in mentem nova eius sectoris forma, quamprimum mensio gradus nil tale cogitanti est mihi demandata. Telescopia, inquiebam, Gregoriana tria (quid ni hodie Dollondiana non usurpemus) quam firmissime composita inter sese, et quam rectissime, ut linea fiduciae unius spectans ad verticem recta sit lineis fiduciae duorum in eodem horizontis plano positis, et spectantibus ad oppositas in meridiano plagas, nonne sectorem possunt conficere expeditissimum, atque item certissimum?

225 I. Esto AB (*fig. XLVI tab. III*) telescopium singulare ad verticem; CD, EF sunto telescopia gemina, quae lineas fiduciae habeant ambo in eodem horizontis plano M*m*, sed eorum unum spectet ad austrum, alterum ad boream. II. Ex utroque telescopio in linea centri gravitatis exstent cardines gemini *r* consentientes axe suo in unam rectam ambo; ipsaque haec recta sit normalis lineis fiduciarum singulis trium telescopiorum. III. Cardines ii insideant in aptissimis loculamentis, ceu ea sunt, quae adhibuit in sectore suo Grahamus, ut possint componi ad libellam. IV. Praeterea esto etiam in promtu rotularum compages illi iterum similis, qua est usus Grahamus, atque ea adponi possit utrinque in *a*, vel in *a* lateribus telescopii AB, ut inclinatio instrumenti lentissimo motu exigi possit ad differentias quantumcumque minimulas. V.

Cetera quod attinet, in meridiana quam diligentissime ducta, productaque capiantur aequales, et ingentes pro telescopiorum vi distantiae *rm*, *r*M; etenim pro dato quoque telescopio datum est productum, quod haberi potest maximum ex distinctione in distantiam. Telescopia autem etiam non optima sufficient ad decimas lineae partes cernendas, adeoque ad secunda definienda in distantia hexapedarum vigintiquinque. VI. Quare si in constitutis distantiis *r*M, *rm* excitentur pilae ex lapide firmissimae, atque in iis infigantur laminae ferreae XY, *yx* ea altitudine, ut sursum deorsum exaequent tangentes declinationum earum fixarum, quae observandae proponuntur, ea vero amplitudine, ut lineas fiduciarum ad gemina telescopia pertinentes excipere commode possint; atque adeo geminae a vertice lineae ducantur in iis laminis directe ad centrum gravium; tangentes in iis decernentur pro secundis singulis in particula maiore, quam quod sit decima pars lineae.

226 Porro sollers organopeus poterit principio exigere ad gyrum horizontis rectam trium telescopiorum positionem; postmodum vero facile erit ipsam emendare rotatione in loculamentis; ubi enim inter rotandam compagem trium telescopiorum linea fiduciae cuiusque appellet semper ad tangentes suas (pro telescopio autem singulari linea intermedia erit ducenda) sursum deorsum, si necesse sit, productas; indicio ea res erit certissimo singulas fiduciae lineas inesse in meridiano.

227 Itaque sector exsistet, ut videre videor, maxime ingenuus. Nam nullo indigebit, neque interiore ex filis, neque exteriore ex cochlea, et lamina micrometro. Quae sectoris

pars structura nunquam non est difficillima, examen semper postulat molestum, et omnem saepe non adfert ad secunda singula certitudinem.

228 Praeterea nec pendulo erit opus, in quo hactenus certissimum non erat punctum suspensionis, et directio etiamnum considerationem vult diligentissimam, num a vento aut influente per rimas, aut flante per aperturam in fornice turbetur, num aut a stagnante, quae segnior sit, aut a limbi contactu impediatur, aut a telis aranearum.

229 Equidem in hoc sectore angulus non erit negligendus, quo coëunt in centrum rectae a vertice in laminis; praeterea ratio etiam erit habenda productionum, atque contractionum, quas inferent in laminas XY, *xy* vicissitudines caloris; atque eam ob rem laminae istae pilis annecti debebunt in M, et *m*, alte ibi infixis massis ferreis exstantibus a facie earum posteriore, quo mutationes a principiis tangentium in tangentes ipsas totas libere distribuantur. Ne vero quidquam efficiant mutationes similes, quae pertineant quoquomodo ad pilas ipsas, satis erit, si sector inter geminas similes pilas excipiatur; neque tamen aut eam anguli ad centrum supputationem, aut hanc emendationem a calore usque adeo refugerem, ut sectori non valde indulgerem huic meo. Interea tamen, ne plura, quam pro re, dicam, idcirco pauca innui; mitto libens plurima, cuiusmodi sunt distincta laminarum partitio, et apta illuminatio, punctorum *m*, et M multiplex, quae fieri potest, definitio, et correctio, adpositio repagulorum, quae laminas XY, *xy* obtemperantes calori contineant in lineis ad verticem.

ARTICULUS II.

Sectoris delectus,

errores.

230 Quoniam praeconceptis animo ideis nullum decet in usu singulare pretium tribui, nisi quod ipsae vindicant sibi, ubi opere sunt postmodum expressae, perfectaeque; nobis vero necessarium deerat ad tentandum otium, atque ad experiendum; hinc potuimus quidem oblectari in consideranda nova sectoris forma, sed interea de usitato sectore aliquo deligendo debuimus deliberare.

231 Principio sector Grahami perplacuit, quod uno ferme tubo constaret, et annexa lamina arcuata; verum acquievimus deinde in sectore Boscovichii, qui pro arcu habet rectam, in qua tangentes a patente micrometro ad secunda gradus minuta exiguntur. Itaque continuo in singulos inquisivimus quam diligentissime, quibus peccare posset hic sector, errores.

232 Igitur (*fig. XXIII tab. II*) HURI esto meridianus dati loci, in quo recta videantur horizon HOR, et circulus verticis primus UI; atque duplex norma OMLB constituta in plano meridiani, et crure communi MO directa ad fixam F transeuntem per planum meridiani dabit lineamenta sectoris; etenim grave *u* trahens ad punctum imum I filum O*u* intercipiet angulum *u*OM aequalem opposito FOU, quo fixa F distat a vertice U. Nempe punctum O est centrum sectoris, recta OM radius; a puncto enim ipsius extremo M computantur tangentes in limbo, seu in linea tangentium LMB.

233 Atque ex hac veluti definitione sectoris continuo sequitur punctum O, seu centrum sectoris, ex quo pendet grave *u*, unicum esse oportere, atque individuum. Nam si pendulum non a puncto fixo, atque individuo O, sed a peripheria suspendatur circelli circa illud punctum descripti, loco tangentis M*u* (*fig. XXIV*) capietur M*u'*, ex qua angulus falsus elicietur.

234 Potest autem is error emendari multipliciter, dum cognoscatur magnitudo circelli *o'o* in partibus radii, atque limbi. Plerumque satis erit partes sumtas M*u'* minuere ipso radio O*o*, vel augere, si pendulum descendat ex parte opposita circelli. Nam quoniam anguli MO*u*, qui sectore capiuntur, sunt plerique exigui, ut anguli ad *u'* parum abludant a rectis, *u'u* est ipsi *oo'* quamproxime parallela, et aequalis.

235 Sed si circellum erroris faciat aciculae sectio, cui advolvitur filum penduli, atque ea in dato loculamento circa immotam lineam possit converti; tum vero observando partes *u'u*, quas filum conversione aciculae excurrat, poterunt ipsae cognosci, quot, quantaeque demi debeant, vel addi. Quamquam, si uti diximus de quadrante, acicula tornata sit cavitate tereti, et teres filum adhibeatur, et nodo advolvatur admodum laxo, vix ullum restat erroris periculum.

236 Sed duplici praeterea modo semoveri potest dubitatio omnis; vel errorem admittendo certissime cognitum, atque admissum emendando, vel errorem evitando semper omnem. Itaque primo esto acicula sectori infixa in centro, atque immota; ita componatur sector, ut radio suo verticem spectet; demittatur utrinque ex peripheria aciculae pendulum, et mo-

tu micrometri explorentur particulae tangentis, quas eius filum intercipit utrinque; illarum enim semis erit aciculae radius oo'. Tum vero pro observatione quaque fixae cuiusvis supputetur angulus distantiae fixae a vertice; atque mox instituatur analogia: uti cosinus anguli supputati ad sinum totum, ita *su* ad *u'u*; erit enim *u'u* pars a tangente demenda, vel addenda ad supputandum angulum verum.

237 Aliter res exigetur etiam adamussim, si filum penduli ita suspendatur supra punctum in sectore, in verissimo centri loco insculptum, ut ope machinulae cuiuspiam ad illud punctum adduci possit in observatione quaque. Hac arte video usos Masonum, et Dixonum in America. Via haec auget molestiam in observando, illa in supputando.

238 Considerato centro, videndum quid peccari possit primum in radii longitudine, deinde etiam in positione. Profecto longitudo radii mutatur a calore, et frigore; sed si limbus sit ex eadem materia, mutationes in ipso similes abolebunt errorem omnem; dum tangens in limbo mutato ad radium similiter mutatum referatur. Hinc consultum est ad datum thermometri gradum constituere longitudinem radii OM; tum enim ex gradu thermometri in observatione quaque innotescet mutatio, ceu contractio O*o* (*fig. XXV*), atque sumta pro sinu toto ipsa tangente *u*M observata, erit *o*M longitudo radii contracti cotangens anguli veri M*ou* sufficiendi falso MO*u* supputato ex radio MO non mutato.

239 Superest in hac re scrupulus aliquis ex differentia mutationum, queis obnoxia sunt metalla diversa ferrum, et aurichalcum. Huius nempe mutationes maiores sunt mutatio-

nibus illius; adeoque, quoniam linea tangentium describitur in lamina ex aurichalco, illa linea subibit in longitudine mutationes pro longitudine ipsa sua iis maiores, quas subit radius ferreus. Verum quid differentias consectemur earum magnitudinum, quae totae observationibus noxam non inferunt? Tota radii mutatio, quae eveniat a differentia graduum decem caloris, distantiam fixae non mutat uno secundo; limbus autem ob modicam longitudinem suam mutatur tanto minus, et tanto minorem habet a differentia materiei mutationum differentiam. Praeterea scrupulum ademit omnem Boscovichius, qui, adpositis crystallis, vidit, quoad percipi acuta lente posset, longitudinem regulae ex aurichalco in limbo mobilis constare aequalem longitudini laminae ferreae, cui ipsa annectebatur.

240 Ad positionem quod attinet puncti M in radio OM extremi, certe cadere illud debet in huiusmodi limbi totius punctum M, quod sit initium tangentium utrinque capiendarum. Verum si initium tangentium sit in *m* (*fig. XXVI*) extra illud radii OM punctum M, poterunt tamen observationes binae, quae erunt singulae malae, facere se mutuo bonas ambas. Nam si hodie sectore ad ortum posito capias tangentem *mu* deficientem a vera magnitudine *m*M, cras capies redundantem aequali magnitudine M*m*. Nam, ut sector redeat ad eamdem fixam radio suo MO, debet M redire in conversione ad positionem suam; seu circa M immotum debet *m* rotari. Itaque semisumma tangentium proferet tangentem veram.

241 Differt ab eo error alius, qui exsistit in positione obliqua radii OM ad lineam limbi (*fig. XXVIII*), ceu si sumatur pro termino radii punctum M, in quo OM sit obli-

qua

qua ad lineam tangentium yMx; tum enim loco duarum tangentium uM, $u'M$ in duplici sectoris positione capietur semel tangens yM, et semel $x'M$ aequalis Mx; atque istarum semisumma erit maior tangente vera uM. Nam obliqua yM superat rectam uM magnitudine maiore magnitudine alia, qua obliqua $x'M$ deficit a recta eadem uM. Est enim yM ad uM, uti sinus anguli OuM ad sinum anguli eiusdem OuM minuti angulo inclinationis uMy; scilicet internus OyM est aequalis externo OuM demto interno alio. Iterum vero $x'M$ ad uM aequatur sinui anguli OuM ad sinum eiusdem minuti angulo interno $x'Mu$ aequali illi ipsi uMy. Quoniam vero incrementa sinuum ab arcubus aequalibus sunt uti cosinus, sinus anguli OuM sinum anguli OuM minuti dato angulo inclinationis superat magnitudine maiore magnitudine illa, qua sinus anguli eiusdem OuM deficit a sinu anguli OuM aucti eodem angulo inclinationis, unde efficitur summam obliquarum yM, $x'M$ esse maiorem rectis duabus uM, Mu'.

242 Certe error, qui possit emergere ex hac radii ad lineam tangentium obliquitate, erit semper omnino minimulus; nam primo loco, nisi negligentissime constituantur eae lineae, obliquitas subibit omnino modica; adeoque primum ex hoc capite minimula erit ea, qua de agitur, differentiarum differentia. Deinde sinus OuM est cosinus distantiae fixae a vertice, quae est semper exigua; adeoque ille sinus anguli OuM est semper sinus anguli recto proximi, cuius adeo incrementa, et decrementa exigua sunt, et exiguam habent in aequalitate exigui anguli additi, atque subtracti differentiam.

243 Verum radium illum OM hactenus consideravimus in sectore, quo utimur in supputandis angulis, non quo visum dirigimus in capiendis. Hic est axis telescopii, qui adeo debet esse alteri OM optime constituto parallelus, quo uterque ad fixas easdem appellat sub eodem ad verticem angulo.

244 Ac primo quidem, si axis telescopii ad radium sectoris obliquetur in ipso sectoris plano, hoc posito in plano meridiani, corrigent se mutuo, qui exsistent in capienda fixae distantia contrarii, sectore ad plagas contrarias converso, et aequales errores. Nam telescopii axis, qui semel erit in MT (*fig. XXIX*), vice sequente converso telescopio, erit in M*t*; adeoque semel augenda erit inclinatio MO ad O*u*, quo MT recta tendat ad F; et mox aequali angulo minuenda erit inclinatio radii MO, quo M*t* pertingat ad F. Itaque semisumma angulorum captorum angulum verum proferet.

245 Atque hic error inclinationis axis telescopii ad radium in plano sectoris distinguendus ab alio, in quo initium tangentium ponitur extra M, ceu in *m* (*fig. XXX*), et in quo sumitur semisumma tangentium ad supputandum angulum verum; dum in hoc, de quo agimus errore, angulus verus exsistit ex semisumma falsorum, qui supputati sint ex tangente sua falsa. Verum id cadit percommode errorem primum facile evitari posse omnem, aut dignosci, radio OM ad verticem directo, si sit aliquis.

246 Non est aeque facilis inquisitio, et emendatio erroris alius, qui emergit, si axis telescopii declinet a plano sectoris; ceu si intelligatur per MO (*fig. XXX*) traductum planum plano sectoris rectum, atque in eo axis telescopii vel sursum

declinet a radio OM, vel, quod perinde est futurum, declinet deorsum.

247 Ad erroris inquisitionem quod attinet, si horologium sit compositum ad motum fixarum, deprehendi ipse poterit in observatione quaque ex differentia temporis inter momentum, quo fixa appellere deberet ad axem telescopii recte positum, atque inter momentum, quo fixa ad illum vere appellit. Ceu si axis declinet ad ortum, sectore ad occasum posito, appulsus praeibit eo tempore, quod fixae remanet impendendum, ut a puncto *g*, ad quod axis declinat, attingat ad punctum meridiani F; contra si axis declinet ad occasum, appulsus subsequetur eo tempore, quod fixae est impendendum, ut a puncto F assequatur punctum *h*.

248 Jam vero ex hoc in tempore appulsus errore et declinatio telescopii, et error elicietur, qui ex ea declinatione exsistet in constituenda fixae declinatione. Etenim et arcus paralleli *g*F, qui metitur errorem fixae in appulsu, et arcus circuli maximi *gf*, qui metitur declinationem telescopii *g*O*f*, habent sinus suos in eadem recta *gi*; itaque sinus tabulares iis arcubus contingentes sunt inverse uti radii circulorum, ad quos ii arcus pertinent. Nempe *uti radius sphaerae* O*g* *ad radium paralleli* FC, *seu cosinum declinationis*, *ita ig sinus erroris in parallelo ad sinum declinationis telescopii*. En itaque cognitam telescopii declinationem.

249 Atque ex ea jam facile innotescit, qui subit error in aestimatione declinationis fixae. Nam si sumatur sinus versus *if*, qui in tabulis respondet sinui recto declinationis telescopii nuper invento, emerget analogia: *uti f*D *cotangens declinationis*

fixae ad radium fO, ita sinus ille versus if ad fF errorem in declinationem fixae illatum. Nam in triangulis Ffi, Dfo, anguli ad f sunt recti, et anguli ad F, et O sunt aequales. Id vero est plane manifestum ex parallelorum positione: errorem fF in declinatione fixae auferri debere ab hac declinatione, telescopio declinante, capta, si fixa sit inter polum, et verticem: addi debere, si fixa sit a polo ultra verticem dissita.

250 Quod si tempus, quo fixa ad meridianum appellit, ignoretur, tum ex altitudinibus ipsius, quae capiantur ultra, et citra meridianum aequales, atque ad horologium exigantur recte constitutum, erit illud eliciendum. Quamquam ulterius processit Boscovichius; atque eo devenit, ut quamvis et ascensio recta fixae, et constitutio horologii ignorentur, dum tamen hoc sit aequabile, declinationem telescopii a plano sectoris exploret, et errorem adeo etiam inveniat, qui inde irrepit in fixae declinationem.

251 En rem in perdifficili quaestione non difficillimam. I. ex horologio aberrante a motu fixarum, sed aequabili, notato intervallum temporis inter appulsum fixae ad telescopium, sectore converso ad ortum, et appulsum eiusdem, sectore sequente die converso ad occasum. II. Similiter notato intervallum alterum inter hunc secundum appulsum, et tertium, qui proxima die tertia eveniet, sectore iterum converso ad ortum. III. *Atque summa duorum intervallorum bipartita prodet tempus, quod horologium emetietur, dum fixa semel describit parallelum; differentia autem eorumdem illorum intervallorum quadripartita errorem appulsus aequabit in tempore horologii.* IV. Quare, instituta analogia uti tempus revolutionis fixae ex horologio ad errorem

appulsus ex eodem, ita 360° ad quartum, prodibit error appulsus in arcu. Eo autem cognito, cetera procedent similiter, ac supra.

252 Ea solum planius explicanda videntur, quae dixi de intervallorum duorum summa bipartita, et differentia quadripartita. Certe si sector prima die ortum aspiciat, seu verius, si telescopium prima die ad ortum declinet, altera ad occasum, intervallum horologii respondebit toti revolutioni auctae particula revolutionis dupla eius, quae contingit parti paralleli *g*F; sed mox si sector tertia die convertatur iterum ad ortum, intervallum respondebit toti revolutioni minutae particula revolutionis dupla eius, quae contingit parti paralleli *g*F; quare liquet eam summam bipartitam respondere revolutioni uni; quod enim additur intervallo uni, aufertur ab alio; et differentiam quadripartitam respondere errori in tempore appulsus; differentia enim inter revolutionem auctam parte *g*F*h*, et aliam minutam parte eadem est dupla partis *g*F*h*, et quadrupla eius semissis *g*F.

253 Quod si sectoris positiones iisdem diebus fuerint contrariae, eadem tamen obtinet ratiocinatio; nam quo intervallo minuitur tempus, dum sector ab occasu convertitur ad ortum, eodem augetur, dum ab ortu convertitur ad occasum.

254 Sed veniamus tandem ad errorem considerandum longe graviorem, in quem suspicatur Bougherius Astronomos incidisse ante se plerosque, nominatim Picartum; etenim putat ipsos unius rei fuisse sollicitos, videlicet, ut, telescopio quoquomodo declinante a plano sectoris, fixam assequerentur in meridiano. Itaque si radius sectoris (*fig. XXXI*) sit OM, a quo axis telescopii TO declinet angulo MOT, ut hic axis ap-

pellat ad fixam F in meridiano, atque interea filum penduli O*u* pergat radere in *u* limbum LB, debebit radius MO dimoveri a plano meridiani angulo TOM aequali angulo eius declinationis; atque interea TM sinus eius declinationis manebit rectus lineae tangentium LB; adeoque pro hypothenusa *u*T, quae esset tangens vera, capietur cathetus *u*M; particula autem MR, qua cathetus *u*M in triangulo acutissimo M*u*T deficit ab hypothenusa, est tertia in proportione continua post ipsam tangentem *u*T, et TM sinum anguli declinationis. Itaque error, qui ab ea particula exponitur, sequitur rationem duplicatam directam sinus anguli declinationis axis telescopii, et simplam, sed inversam duplae tangentis distantiae a vertice. Etenim si puncta M, T per centrum sphaerae O traducantur ad superficiem ipsius in *m*, et F; tangens FU distantiae a vertice respondebit tangenti *u*T, tangenti *u*M respondebit alia U*m*, atque errori MR respondebit error *mr*.

255 Atque hic error *mr* alio est longe gravior (conferantur simul fig. XXX, et XXXI) de quo ante dicebam; nam *mr* error ultimus totus est sinus versus anguli FU*r* habens pro sinu recto F*m* sinum anguli declinationis telescopii; at *fi* elementum in errore illo F*f* est sinus versus anguli *f*O*g* habentis pro sinu recto *ig* aequalem F*m* aequalem sinui declinationis. Atqui sinus versi tabulares, qui habent sinum rectum in recta eadem, vel aequali, sunt inverse uti radii circulorum, ad quos ii sinus recti pertinent; igitur uti UF ad OF, ita *fi* ad *mr*. Quare *mr* est directe uti radius OF, iterum directe uti *fi*, inverse uti UF tangens distantiae fixae a vertice; sed F*f* erat directe uti radius OF, iterum directe uti *fi*, in-

verse autem uti FD tangens distantiae fixae a polo (249); itaque reliqua est analogia F*f* *ad mr, uti tangens distantiae fixae a vertice ad tangentem distantiae fixae a polo.*

256 Sed esto demum recte positus axis telescopii; esto is parallelus radio sectoris, seu rectae, quae a puncto suspensionis penduli est normalis lineae tangentium in ipso earum initio; atque tum peccari jam unice poterit in positione plani sectoris, sed dupliciter; primo si limbus maneat parallelus meridianae, sed radius sectoris ab illa declinet; deinde si limbus declinet a meridiana.

257 Primus autem error facile evitabitur, certissimeque ab observatore non negligentissimo; nam quoniam limbus supponitur meridianae parallelus, adeoque perspecta ponitur meridianae directio, satis erit, si id perficiatur, ut ibi limbus sit meridianae parallelus, ubi ipse a filo penduli attingitur quamproxime. Quod si in tanta erroris evitandi facilitate, is tamen ex incuria admittatur aliquis, non differet ab errore illo, in quo axis telescopii declinat a plano sectoris; nam perinde est, sive sectorem, telescopio ab eo declinante, ponas in meridiano, sive sectorem, cui axis telescopii sit parallelus, dimoveas a meridiano. Una re erit adhuc periculosior hic error, quod penduli filum distabit a plano limbi; (ecquis enim adeo turpiter peccet, ut contra illud filum urgeat sectorem?) itaque errori declinationis accedet periculum parallaxis.

258 Denique, si telescopio ad sectorem recte posito, hunc inclines ad meridianum, tum in unum convenient errores duo. Nam quoniam sector angulo M*u*T (*fig. XXXI*) declinabit a meridiano, loco hypothenusae T*u* sumetur tangens in cathe-

to M*u*, qui error admittitur, cum telescopium declinans a sectore adducitur ad meridianum, atque ea re minuetur tangens distantiae a vertice; interea vero etiam, quoniam telescopium sectori parallelum declinabit a meridiano, fixam assequetur extra meridianum in *g*, vel in *h* (*fig. XXX*), adeoque loco cotangentis D*f* sumetur cotangens DF, atque adeo ob hanc caussam augebitur tangens distantiae a vertice.

259 Atque posteaquam hac nos diligentia, perspicuitateque, quantam non video adhuc allatam ab aliis, errores, qui in praestitutum sectorem possent cadere, exegeramus singulos ad certam, definitamque aestimationem; tum vero ne eius quidem nos calculi piguit, ex quo cognosceremus, quantus esse deberet error eorum quivis, quo in capiendos fixarum angulos errorem inferret secundi unius. Ita enim instructissimi a scientia, visi demum sumus posse nos ad opus ipsum accedere quam rectissime conficiendum.

ARTICULUS III.

Sectoris structura.

260 Duplex ferrea norma ABHI (*fig. XXXII tab. II*) uncinata in AXY, instructa telescopio QR, suspensura penduli A, lamina inter fixas CD, EF pro tangentibus congruenter mobili, est compages sectoris, cuius geometrica lineamenta primo describebamus, deinde errores consectabamur, quibus, positis iis lineamentis, potest is esse obnoxius; nunc vero structuram corpoream decet nos enarrare.

261

261 Lamina AB est lata lin. 25, crassa lin. 5; crassitie ferme eadem est lamina ferrea HI, sed habet in longitudine tota lineas 366, et in altitudine lineas 36.

262 Lamina ferrea HI primo faciem totam, quae est in prospectu, convestitam habet lamina ex aurichalco lineam crassa; haec candens candenti ferro adhaesit stamno affuso; mox dolata est ad accuratam planitiem, atque ad nitorem expolita.

263 Deinde huic amplae, sed tenuiori ex aurichalco laminae duae CD, EF aeque longae cohaerent, sed arctiores, crassioresque omnia aequales. Crassitiem habent ad lineas tres cum semisse, atque exterius altae sunt lineas septem, et amplius; interius vero juxta longitudinem sunt excisae ad normam semel, atque iterum ita congruenter ad excipiendos rectos juxta longitudinem angulos prominentes a lateribus laminae intermediae, ut ne tum quidem, cum haec excurrit a motu cochleae, distinctas videas laminas tres, nisi quatenus haec prodit limite suo uno, alio vero intrat quam aequabilissime.

264 Principio lamina haec mobilis divisa est bifariam vestigio rectae lineae; deinde vestigium hoc distinctum est in intervalla aequalia punctis exilibus, sed altis, atque rotundis; videlicet recta illa linea signata est potius, quam ducta, ne eam laederet punctorum rotunditatem. A puncto laminae medio, intervallo pedis hinc inde unius, puncta huiusmodi contingunt numero centum. Punctum idem laminae medium distat pedes 9, et lineae partes 0, 22 a puncto suspensionis penduli; quae est radii longitudo. Penduli suspensuram facit solida ex aurichalco massa A, acus per exstantem in ima eius parte cylin-

drum cuspidem recta immittit suum in altum, sed tenue foraminulum insculptum in basi massae eiusdem; quae basis facie sua plana assurgit quamproxime ad planum limbi. Qua parte foraminulum attingit acus, ibi a torno extenuata ipsa est in rotundam levissimam cavitatem, quo advolvendo argenteo filo resistat quam minimum, quemadmodum dixi de suspensura penduli in quadrante.

265 Ad motum explicandum laminae in limbo intermediae, quem motum interest plurimi et esse aequabilem, et tribui in particulas aequales, et quam minimas, limbum ipsum exhibeo in fig. XXXIII seiunctum a sectore reliquo, et situ inverso. Ita enim primo oblongum foramen cernitur, quo excisa est lamina ferrea; deinde matrix videtur, quae ampla sua basi laminae mobili affigitur a tergo; apparet et cochlea, quae extremis suis partibus circuit quam aptissime in loculamentis annexis laminae ferreae, atque ab his continetur, ne aut progredi ipsa ullomodo possit, aut regredi. Itaque dum observator dextera volvit capitulum G, cochlea pergens ipsi sibi congruere tota matricem, adeoque et nexam laminam illam intermediam defert secum motu omnino aequabili; sed interea a rotatione capituli circuit etiam annexus ex aurichalco discus, qui peripheriam habet distinctam in partes centum; has numerat inflexus a limbo index. Quare progressio laminae mobilis per intervallum aequale crassitiei unius in cochlea helicis tribuitur in partes centum; profecto in sectore hoc nostro intervallo punctorum uni partes contingunt quingentae.

266 Ad telescopium quod attinet, lentem ad objecta, quae est telescopii pars una princeps, continent tubi Q, MN (*fig. XXXII*); tubus vero OP continet fila micrometri, partem principem alteram. Duo solidissimi ex aurichalco anuli M, N, iique duplices singuli, atque amplis basibus suis adfixi a tergo laminae ferreae AB excipiunt tubos pro lente prope summam partem AB; duo alii anuli similes O, P annexi similiter regulae AB prope partem ipsius imam deferunt tubos pro micrometro; istorum anulorum unus P videtur in fig. XXXIII.

267 Cum interiore capacitate tubi illius, quem comprehendunt anuli M, N congruit parte sua inferiore tubus Q, ut rotari hic in illo possit, non trepidare; interea ipse hic tubus Q parte sua summa, quae est amplior, excipit tubum alium cum lente, atque hunc minore diametro, et sulcatum in peripheria, ut a cochleis tribus subeuntibus per tubum capaciorem urgeri ille queat quoquoversus, et contineri ubilibet, ubi scilicet ex certa praeceptione urgendo, rotando tubum minorem cum lente, linea fiduciae sit recte constituta.

268 Tubus OP habet interius firmissime annexum tubum alium, ut axes amborum congruant; sed inter tubum interiorem, atque exteriorem intervallum est reliquum, quantum est necessarium, ut tubus R, in quo est lens ocularia, ab eo intervallo excipiatur, congruatque cum tubo exteriore, quin attingat interiorem. Etenim ostio interioris, quod exhibetur in fig. XXXIV annexa sunt fila micrometri.

269 Totum inter breviores tubos MN, OP intervallum longo tubo opacatur interjecto, qui extremis partibus suis li-

bere in illos subit, ne dum is, qui est etiam ex aurichalco totus, vehementius commovetur a calore, regulam ferream distrahat; atque adeo etiam, cum observationes instituuntur, omnes praeter unum laxantur anuli, quibus hic quoque longior tubus annectitur regulae ferreae AB.

ARTICULUS IV.

Adminicula sectoris.

270 Hactenus de partibus sectoris, nunc quambrevissime dico de adminiculis, quorum primum est suspensura sectoris eiusdem. Ferreus vectis *ab* cum mutulo *c* muro alte infixus habet insculptam cavitatem conicam ampliorem in centro capitis sui *b*, quod est ex chalybe; atque solidissimus cylindrus ipse etiam ex chalybe traiectus per summam, crassioremque partem Y unci AXY, atque ibi districtus superne a matrice, insidet cavitati illi conico suo cuspide.

271 Haec suspensura usitatis visa est mihi praestare, in quibus summa in sectore rotundata pars circuit intra anulum mutuli; in quo adeo anulo dum convertitur sector, elevari is debet ad evitandam frictionem, atque haec nihilominus subsequitur semper aliqua, dum sector, qui a conversione anulo jam insederit, componitur accuratius cum meridiano. Contra sectorem nostrum nos digito convertimus obtemperantem quam minimae vi. Id unum cavendum in hoc suspensurae modo, ut mutuli *abc*, cavitatis *b*, et telescopii QR loca

ita componantur, ne ostium telescopii occupetur a mutuli capite, sive ad ortum sector ponatur, sive convertatur ad occasum.

272 Jam vero ad sectorem ponendum in meridiano facit aptissimum adminiculum aliud, lamina scilicet *fg*. Haec secundum imam partem limbi sectoris exstat a muro pedes tres; et, ne retrorsum flectatur, latitudinem habet in horizonte ad lineas triginta sex; ne vero inclinetur deorsum, crassa est lineas septem; praeterea sustentatur a virga ferrea *gh* fornici infixa.

273 Bini autem cursores *e*, *e*, binae forcipulae *d*, *d*, et binae ansae H, I proxime inserviunt sectori ponendo, continendoque in plano meridiani; cochleae traiicientes per exstantia latera cursorum *e*, *e* capitibus suis eburneis urgent antrorsum limbum, qui adeo etiam in ima aversae faciei parte convestitur lamina ex aurichalco levissima. Duo funiculi alligati ansis duabus H, I, atque advoluti trochleis, quae prominent a duabus forcipulis *d*, *d*, suntque in iis circumquaque volubiles, duo illi, inquam, funiculi gravati a plumbeis massis limbum eundem trahunt retrorsum. Quare motu cochlearum sector adducitur ad planum meridiani; continetur autem in eo plano a ponderibus. Cursores gemini *e*, *e*, itemque forcipulae *d*, *d*, appressis inferius ad laminam *fg* cochleis, ubicumque libuerit, cohibentur.

274 Interea vero ad sectorem obliquandum in meridiano usuvenit cochlea *rs* axe recto, diametro aequali, spiris tenuibus, aequabilibus, et aptissime congruentibus cum matrice, quae inest in cursore *q*. Hic autem cursor *q* defertur a

cursore alio *op*. Qui, ubi est necesse, extrahitur a lamina *fg*, tum inversus truditur usque in *f* ad sectorem obliquandum in plagam contrariam, quod facit cochlea *rs* politissimo suo capite urgens politissimam in limbi latere laminam. Haec autem duorum cursorum *q*, et *op* compages est omnino affabre elaborata, ut ubi semel cursor quisque suo adfixus est loco, nihil omnino metuendum sit a trepidatione, quae turbare possit distantiam fixae observandam.

275 Verum ipsa haec sectoris in meridiano positio, atque progressio ductam supponit lineam meridianam, ad quam exigatur planum illius. Hinc in illa ipsa cella, in qua sectorem locavimus, semper primo loco meridianam definivimus, et quam diligentissime, uti dixi, expendimus; mox ansas defiximus in oppositis cellae parietibus longo, acutoque dorso, ut fila serica tensa inter geminas in earum dorso incisuras et essent parallela meridianae, et limbum sectoris raderent plano eius ad verticem constituto. Quanto molestior erat earum incisurarum definitio, tanto fuimus in iis constituendis, expendendisque accuratiores. Nolebamus enim, poeniteret deinde nos nostrae in hac re negligentiae, qui tot alios sustinebamus pro optimo rei eventu labores. Hinc quoties fixa erat observanda, sectore ad fixam jam proxime obliquato, planum limbi exigebamus semper ad filum sericum tractum a ponduscul is in incisuris illis tenuissimis.

276 Haec de positione sectoris; nunc verbum dicam de adminiculo, quod pendulo inservit librando in stagnante. Cursor *i* exporrigit ultra vectem *fg* laminas suas binas superiorem, et inferiorem; hae, qua exstant parte, habent excisa

foramina aptissima, ut in iis lamina *lm* moveri susdeque possit; figitur autem haec lamina in debita altitudine a cochlea appressa a tergo cursori *i*. Ipsa lamina *lm* ima ampliore sui parte inflexa est ad normam, atque exstante cochleae capitulo excipit laminam *mn* perforatam in longitudine, et desinentem in anulum. Ita enim lamina *mn* circuire potest, contrahi, aut produci, et motu laminae *ml* efferri, deprimi potest ad scyphum ibi sustentandum, ubi inclinatio sectoris postulet, et penduli directio, atque longitudo; cui etiam rei inservit motus cursoris *i*.

277 Neque hic mittenda exilis lucerna ellychnio exilissimo, quae inter observandum tenui luce perfundit fila argentea in foco telescopii; ipsa defertur a tenui lamina, quae, uti cernere est in schemate, exstat a laxo anulo ambiente supra R tubum lentis ocularïae; atque in hoc tubo contra lucernam fenestella adest oblique excisa obducta charta cerata.

278 Denique de brachio aliquid innuam, quo microscopium contra lineam tangentium defertur ad locum penduli definiendum post quamque fixae observationem. Illud humero veluti suo laminae *fg* annectitur in *f*, vel in *g* pro diversa sectoris positione; est vero multipliciter geniculatum, et sua quodammodo manu lamellam gerit cum microscopio. Huic lamellae, qua parte jacet in horizonte, insidet tenuis longior lucerna parallela limbo sectoris; gracilescit lucerna juxta altitudinem suam in loco ellychnii; subit enim lucernam sub ellychnio microscopium limbo rectum. Lamella vero illa

eadem, quae et impositam lucernam, et microscopium transversum defert, alte sursum reflectitur lateribus suis antrorsum retrorsum ad arcendam lucem ab oculo observatoris; anteriore latere pertusa est ad illuminandam lineam tangentium hinc inde prope filum penduli; quo vero lux affundatur satis vivida, duo latera lamellae sunt interius charta alba convestitae.

ARTICULUS V.

Examen sectoris.

279 I. Sectore directo ad verticem ut filum penduli transiret per initium tangentium, vidimus dispesci ab ipso puncta in massis ex aurichalco, quas, ceu fecerat Boscovichius, adfiximus laminae AB ad intervalla pedum singulorum; earum massarum una videtur in L.

280 II. Sectore obliquato ad angulum maximum, ut penduli filum lamberet extrema in linea tangentium puncta; tum filo ipso tenso, affixoque, ut a puncto suspensionis traiiceret per punctum, quod est initium graduum, vidimus dispescere ipsum adhuc puncta ea in massis, dum ne filum penduli oblique aspiceretur; minimula enim fili a massarum superficie distantia afferebat parallaxim. Itaque conclusimus puncta ea omnia esse in eadem recta, et sectorem prorsus non inflecti a positione obliqua.

281 III. Circino micrometrico cepimus distantiam eius puncti, cui insidet acus suspendens pendulum a puncto, quod

est

est initium tangentium, atque ipsam vidimus esse pedes 9, et 22 lineae partes centesimas.

282 IV Contulimus distantias puncti, quod est initium tangentium, a punctis hinc inde in eadem linea extremis; atque invenimus prorsus aequales.

283 V Contulimus distantias extremorum horum punctorum a puncto L insculpto in massa ex aurichalco prima; mox etiam a punctis insculptis in massa altera, tertia, etc.; atque distantias has quasque geminas invenimus aequales; adeoque cognovimus lineam a puncto suspensionis ad initium tangentium esse rectam lineae tangentium; haec enim erat in quoque experimento basis trianguli aequicruris bisecta a linea producta a vertice.

284 VI Venimus deinde ad consideranda intervalla punctorum in linea tangentium, quod ut commodissime exsequeremur, rectissimeque, sectorem trabe excepimus, in qua figi solet, cum asportatur. Longitudine sua haec trabs exaequat longitudinem regulae AB ad modicam usque a limbo distantiam, estque cavata in longitudine tota ad mensuram regulae ipsius; praeterea cavitates habet peculiares, quibuscum congruunt massae singulae, quae prominent in facie AB; atque regulae AB ita congruenter insidenti pessuli obduntur a tergo, ut cum trabe lamina ipsa, adeoque et sector totus cohaereat quam firmissime.

285 Sectorem ita adfixum trabi deposuimus, atque trabem exstantem suffulsimus utrinque scamnis, ut limbum contemplari possemus quam commodissime jacentem in horizonte, et perfusum copiosa luce illabente a proxima fenestra. Tum cry-

stallos cum lineis, et microscopium adplicuimus. Oblonga, et recta e plumbo massa laminae limbi basi incumbens sua, qua parte illa deprimitur infra laminam CD, deferebat crystallum forcipulis nexam quam aptissime, ut facie sua inferiore attingeret semper lineam tangentium, atque una, vel plures tenuissimae rectae ductae in ea facie secarent semper ad normam lineam tangentium eamdem. Similiter tubum microscopii ita adplicuimus, ut lineae tangentium semper recta immineret axe suo; nam deferens brachiolum obliquabatur ad eam lineam a massa plumbea quadra, qua laminae depressiori HI incumbebat, et latere suo latus premebat semper laminae elatioris EF.

286 Itaque in hac apparatus opportunitate plane singulari facile nobis fuit micrometri vitia, siqua subessent, explorare, quae essent, et quanta; tum ea, quae ad cochleam totam, tum ea, quae ad partes ipsius diversas, imo et ad singulos helices, et ad helicum partes pertinerent. Iis vero jam perspectis, et cognita proportione partium cochleae aliarum ad alias, et ad cochleam totam, primo ex ipsa tota, mox ex data parte ipsius, quam absolutissimam deprehenderamus, punctorum singulorum intervalla, et magnitudines definivimus, easque emendatas singulas a perspectis suis differentiis (neque vero differentiae hae assurgebant ultra micrometri particulas perpaucas) diligenter contulimus inter sese, atque vidimus perbelle convenire. Quare cognitis tangentibus ad puncta singula, restabat, ut in observatione fixarum earum ad filum penduli complementa micrometro explorarentur.

Ea autem in re cochlea usi non sumus, nisi in helicibus quinque. Quod dum explico, totam observationis rationem decet me hic pure narrare, dilucideque.

187 I Pro observatione quaque laminam tangentium adducebamus, ut limites eius convenirent cum limitibus laminarum CD, EF, adeoque index inesset in ipso partium micrometri initio. II Tum sectorem ad fixam observandam inclinabamus angulo jam proxime cognito. III Deinde ex lignea scala filum penduli totum convexa lente considerabamus, num impediretur a pulvisculis, ab araneis, ab exstante re aliqua; et ibi ipsum praesertim per appositum microscopium observabamus, ubi prope limbum transibat, atque satagebamus, ut hunc illud non tangeret quidem, sed quamproxime stringeret. IV Mox ipsam hanc penduli ad limbum positionem componebamus etiam cum positione limbi in meridiano, diducto, uti dixi, tenuissimo serico filo ad incisuras in ansis. V. Cum tempus observationis imminebat, resupini in culcita bulbum oculi immittebamus in congruens cavum, quo finitur tubus R lentis ocularíae. Huic fini inclinata in solo tabula, cui culcita insternebatur, efferri poterat a cochleis, ut, capite accumbente in culcita, oculus ad illud tubi cavum elevaretur. VI Atque quamprimum stella telescopium ingrediebatur, manum exporrigebamus ad caput *r* cochleae *rs*, atque brevi momento stellam adducebamus ad filum micrometri; eamque observationem habebamus pro exacta, in qua species stellae ad filum semel adducta ab eo deinceps non discederet, neque nutaret hinc inde dimoto oculo in latera; quamquam cavum illud, quo oculus excipiebatur, et foramine pertundebatur angusto, et

oculum stringebat undique, ut hic distrahi vix posset. VII Neque hic artificium silebo, quo lucem erraticam defendimus a fixarum speciebus, eam nempe, quae ob inaequabilem in rotunda lente refractionem coma ipsas auget, et vero etiam cauda protensa ad aversam a centro lentis plagam. Tubos nigerrimos apponebamus summo tubo Q chartaceos cum diaphragmatis eo arctioribus, quo vividior erat lux observandae fixae; ea re vividissimae etiam stellae speciem, cuiusmodi est capella, ita perstringebamus, ut vix exstaret ex filo.

288 VIII Itaque observato his cautionibus transitu fixae, veniebamus ad locum penduli definiendum; nempe intuentes attentissime per microscopium conversione cochleae lenta, continuataque, punctum in linea tangentium proximum adducebamus ad filum, ut ipsum attingeret; tum vero, considerato iterum pendulo, num esset omnino liberum ab impedimento omni, et num vere quiesceret, partes micrometri scribebamus, distantiam nempe fili a puncto dato. Atque hinc, quoniam cognoscebamus quanta esset fili, et puncti crassities, et etiam in eo puncto centri distantia ab initio tangentium, perspectam habebamus tangentem totam datae fixae ex ea observatione contingentem. Verum, notatis iis partibus micrometri pro appulsu puncti ad filum, pergebamus adhuc movere cochleam minimulo intervallo, quo erat necesse, ut punctum a filo bisecaretur; atque has etiam partes adjungebamus, quo ex ipsa etiam observatione haberemus distantiam totam, quam cum eruenda ex ea summa conferremus.

289 Jam vero, quando de observationibus coepi hic dicere, experimentum narrabo, quo iterum, atque iterum facti

sumus certiores sectorem nullomodo flecti ab aliqua sua ad fixas positione. Fixam delegimus, cuius distantia a vertice tangentem postularet in limbo maximam. Ad ipsam sectorem inclinavimus, tum funem alligavimus regulae AB circa medium, atque adduximus ad trochleam infixam parieti; mox funi advoluto nexuimus lancem, et injecimus pondera, quanta, dimota cochlea *sr*, sectorem sustentarent, non moverent. Denique ingressam in telescopium fixam rite adduximus ad filum meridiano normale motu cochleae *rs*. Atque tum Canonica lancem cum ponderibus mox sustentabat, mox blande deponebat, neque tamen fixa nutabat. Itaque, quando pondera ea erant magnitudine, ut ipsa sola sectorem sustentarent, cum deponebantur, debebant inflexionem sectoris abolere, imo et aliam gignere in partem contrariam, si quam ipse subiisset a pondere suo, cum pondera illa elevabantur. Atqui stella filo semper inhaerebat; itaque nec ulla in hoc experimento inflexio oboriebatur, et multo adeo minus inflexio fuit pertimescenda in observationibus nostris fixarum, ad quas sector tanto minus obliquabatur.

290 Ceterum ab observationibus, ad quas inter expendenda ea, quae pertinent ad planum sectoris, quasi incogitanter sum digressus, decet me hic ad structuram telescopii redire, atque ad rectam ipsius positionem, quibus etiam a rebus plurimum pendet observationum perfectio. Profecto de firmitate singularium tuborum MN, OP nihil attinet addere; positionem autem is ipse curaverat industrius homo, et perspicax Jacobus Chiapella, qui sectorem totum nobis confecit. Is, quamquam instituto Sacerdos inter eos accenseatur, qui sunt

Regi a sacrificio, assuetus tamen ab adolescentia subsecivas horas impendere in difficillimis, delicatissimisque instrumentis conficiendis, omnes praeterea habebat in aedibus ipsis suis opportunitates necessarias ad sectorem expendendum; nam dudum antea meridianam duxerat diligentissime, et horologium habebat ad secunda, quae duae praesertim res, eaedemque ferme unice poterant usuvenire. Itaque fornice pertuso, apertoque tecto sectorem jam instructum extraneis adminiculis omnibus suspendit, dum perficiebat, quasi ad instituendas observationes. Tum primo loco providit, ut pendulo transeunte per initium tangentium, axes duorum tuborum MN, OP consentirent in unam rectam filo penduli parallelam; mox definivit, quanta esse deberet lentis ad objecta distantia a centro micrometri, ut, nutante hinc inde oculo, species fixae micrometro inhaereret; intereaque, ad planum etiam meridiani composito sectore, constituit filorum micrometri in eo plano positionem huiusmodi, ut filum unum esset rectum plano sectoris, atque adeo aliud, sectore recte posito, inesset in meridiano. Judicabat autem de re ex fixis, quae per filum illud primum constanter progrederentur.

291 Atque haec omnia dum nos etiam invisebamus singula, venimus demum ad examinandam lineam fiduciae. Qua in re cum plurimum haesissent Astronomi alii, videtur excelluisse Boscovichius, qui, uti paullo ante memorabam, ex differentiis temporum, quibus fixa eadem appellit ad sectorem bis conversum, magnitudinem eruit declinationis lineae illius ab initio tangentium in plano sectoris; sed viam nos videmur ingressi, qua non una solum erroris pars cognosceretur, sed

omnis qualiscumque esset error inspiceretur, et vere etiam aboleretur. Haec praesertim causa sectorem prae quadrante difficilem, et quasi contumacem facit in constituenda linea fiduciae, quod non in illo, quemadmodum in isto, linea fiducia exigi possit ad pendulum. Deberet enim in illo esse parallela filo penduli transeunti per initium tangentium; atqui in vertice, ad quem tum spectat sector, objectum deest, a cujus intuitu judicium feratur de positione lineae fiduciae. Itaque nos id effecimus, ut objectum ad verticem adduceremus.

292 Speculum metallicum conquisivimus, quod speciem rectae lineae rectam undique referret. Tum in apertura tecti locavimus telescopio concentricum anulum ferreum, in quo circumferri poterant ferrea brachia duo speculum sustentantia juxta centrum gravitatis. Atque sectore ad verticem quam diligentissime composito, Chiapella ascendit tectum, ut speculum circumferret in anulo pro meo nutu, ego vero resupinus intuens in telescopium fila speculi moderabar, gemina, quae supra, et gemina alia duo, quae infra brachia speculo alligaveramus, donec objecti alicuius distincti species micrometrum aequabiliter occuparet, et certo aliquo puncto suo appelleret ad centrum micrometri. Id ubi eramus assecuti, tum Chiapella thecam cum lente rotabat coërcitam a cochleis illis tribus, quae a tubo exteriore sulcum invadunt cavatum in eius thecae peripheria. Hac via primo loco lineam fiduciae adducebamus ad filum meridiani, quemadmodum in quadrante adduxeramus ad filum verticis; tum laxata pedetentim cochlea una, urgebantur aliae duae, quoad oportere provi-

debamus, ut linea fiduciae veniret ad centrum micrometri. Igitur multiplici tentamine id denique obtinuimus, ut a rotatione thecae objectorum species vix trepidarent. Atque hunc modum recte componendi lineam fiduciae hac etiam de causa praestantem arbitror, si necessaria diligentia interponatur, quod una malis medeatur duobus, errori nempe in forma lentis, qui semper est aliquis, atque errori etiam alteri, si quis sit admissus, in positione tuborum telescopii.

CAPUT

CAPUT V.

GRADUS.

ARTICULUS I.

Observationes fixarum Andratis.

1762. α Cycni ad Austrum.

Sectore ad occasum converso.

293 Jul.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio.	Nutatio	Distantia reducta.
25	1°. 5'. 30", 17.	− 1", 29.	+ 1", 10.	− 8", 13.	1°. 5'. 23", 06.
27	1. 5. 30, 17.	− 1, 22.	+ 1, 74.	− 8, 13.	1. 5. 23, 77.
28	1. 5. 29, 25.	− 1, 19.	+ 2, 06.	− 8, 13.	1. 5. 23, 20.
Aug. 1	1. 5. 29, 25.	− 1, 06.	+ 3, 23.	− 8, 13.	1. 5. 24, 50.
10	1. 5. 26, 51.	− 0, 77.	+ 5, 76.	− 8, 13.	1. 5. 24, 58.
			Refractio + 1, 21.		
			Distantia media		1. 5. 23, 82.

Sectore ad ortum converso.

294 Aug.					
3	1°. 4'. 13", 48.	− 1", 00.	+ 3", 79.	− 8", 13.	1°. 4'. 9", 23.
4	1. 4. 13, 02.	− 0, 97.	+ 4, 08.	− 8, 13.	1. 4. 9, 09.
5	1. 4. 12, 11.	− 0, 94.	+ 4, 36.	− 8, 13.	1. 4. 8, 49.
6	1. 4. 11, 65.	− 0, 90.	+ 4, 61.	− 8, 13.	1. 4. 8, 42.
9	1. 4. 10, 74.	− 0, 80.	+ 5, 17.	− 8, 13.	1. 4. 8, 07.
			Refractio + 1, 09.		
			Distantia media		1. 4. 8, 64.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				1. 4. 46, 23.

Andratis 1762 δ Cigni ad Austrum.

Sectore ad Occasum converso.

295 Jul.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
25	0°. 58'. 15", 14.	— 0", 86.	+ 4", 30.	— 8", 14.	0°. 58'. 11", 40.
27	0. 58. 15, 14.	— 0, 82.	+ 4, 90.	— 8, 15.	0. 58. 12, 13.
28	0. 58. 13, 77	— 0, 80.	+ 5, 20.	— 8, 15.	0. 58. 11, 08.
31	0. 58. 13, 77.	— 0, 73.	+ 6, 10.	— 8, 16.	0. 58. 12, 04.
Aug. 1	0. 58. 12, 40.	— 0, 71.	+ 6, 40.	— 8, 16.	0. 58. 10, 99.
			Refractio + 1, 06.		
			distantia media		0. 58. 11, 53.

Sectore ad Ortum converso.

296 Aug.					
4	0°. 56'. 56", 17.	— 0", 67.	+ 7", 28.	— 8", 17.	0°. 56'. 55", 65.
5	0. 56. 56, 17.	— 0, 65.	+ 7, 47.	— 8, 17.	0. 56. 55, 86.
6	0. 56. 55, 71.	— 0, 63.	+ 7, 76.	— 8, 17.	0. 56. 55, 71.
9	0. 56. 53, 88.	— 0, 56.	+ 8, 63.	— 8, 18.	0. 56. 54, 81.
11	0. 56. 52, 97.	— 0, 52.	+ 9, 21.	— 8, 18.	0. 56. 54, 52.
			Refractio + 1, 04.		
			distantia media		0. 56. 55, 31.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				0. 57. 33, 42.

1762 β Aurigae Andratis versus Austrum.

Sectore ad Occasum converso.

297 Jul.					
30	0°. 38'. 14", 00.	— 0", 15.	— 5", 33.	+ 6", 16.	0°. 38'. 15", 35.
Aug. 1	0. 38. 13, 54.	— 0, 14.	— 5, 51.	+ 6, 17.	0. 38. 14, 73.

15	0. 38. 14, 91.	— 0, 08.	— 6, 45.	+ 6, 26.	0. 38. 15, 31.
			Refractio + 0, 67.		
			Distantia media		0. 38. 15, 13.

Sectore ad Ortum converso.

298 Aug	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
6	0°. 37′. 0″. 49.	— 0″, 12.	— 5″, 87.	+ 6″, 20.	0°. 37′. 1″, 35.
9	0. 37. 0, 49.	— 0, 11.	— 6, 07.	+ 6, 22.	0. 37. 1, 18.
16	0. 37. 0, 49.	— 0, 08.	— 6, 51.	+ 6, 26.	0. 37. 0, 81.
			Refractio + 0, 65.		
			Distantia media		0. 37. 1, 11.
			ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media		0. 37. 38, 12.

ARTICULUS II.

Observationes fixarum Monteregali.

1762 α Cigni ad Boream.

Sectore ad Ortum converso.

299 Sept.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
2	0°. 4′. 8″. 86.	— 0″, 00.	— 11″, 88.	+ 8″, 05.	0°. 4′. 5″, 11.
3	0. 4. 8, 86.	— 0, 03.	— 12, 08.	+ 8, 05.	0. 4. 4, 88.
5	0. 4. 9, 77.	— 0, 09.	— 12, 48.	+ 8, 05.	0. 4. 5, 33.
6	0. 4. 9, 77.	— 0, 13.	— 12, 68.	+ 8, 05.	0. 4. 5, 09.
8	0. 4. 9, 77.	— 0, 20.	— 13, 08.	+ 8, 05.	0. 4. 4, 62.
15	0. 4. 10, 68.	— 0, 44.	— 14, 45.	+ 8, 05.	0. 4. 3, 92.
			Refractio + 0, 08.		
			distantia media		0. 4. 4, 82.

Sectore ad Occasum converso.

300 Sept.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
9	0°. 1'. 56", 44.	— 0", 24.	— 13", 28.	+ 8", 05.	0°. 1'. 51", 00.
13	0. 1. 56, 89.	— 0, 37.	— 14, 07.	+ 8, 05.	0. 1. 50, 53.
19	0. 1. 57, 81.	— 0, 57.	— 15, 21.	+ 8, 05.	0. 1. 50, 11.
20	0. 1. 57, 81.	— 0, 61.	— 15, 40.	+ 8, 05.	0. 1. 49, 88.
			Refractio + 0, 03.		
			distantia media		0. 1. 50, 38.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				0. 2. 57, 60.

1762 δ Cycni Monteregali ad Boream.

Sectore ad Ortum converso.

301 Sept.					
2	0°. 11'. 25", 39.	— 0", 00.	— 14", 28.	+ 8", 24.	0°. 11'. 19', 58.
6	0. 11. 26, 30.	— 0, 09.	— 14, 92.	+ 8, 23.	0. 11. 19, 75.
8	0. 11. 26, 30.	— 0, 14.	— 15, 24.	+ 8, 23.	0. 11. 19, 38.
15	0. 11. 28, 13.	— 0, 30.	— 16, 34.	+ 8, 21.	0. 11. 19, 93.
18	0. 11. 28, 59.	— 0, 37.	— 16, 76.	+ 8, 21.	0. 11. 19, 90.
			Refractio + 0, 23.		
			Distantia media		0. 11. 19, 71.

Sectore ad Occasum converso.

302 Sept.					
9	0°. 9'. 12', 06:	— 0", 16.	— 15", 40.	+ 8", 22.	0°. 9'. 4", 90.
13	0. 9. 12, 97.	— 0, 25.	— 16, 04.	+ 8, 22.	0. 9. 5, 08.
19	0. 9. 13, 88.	— 0, 39.	— 16, 90.	+ 8, 20.	0. 9. 4, 97.
20	0. 9. 14, 80.	— 0, 41.	— 17, 04.	+ 8, 20.	0. 9. 5, 73.
			Refractio + 0, 18.		
			Distantia media		0. 9. 5. 17.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				0. 10. 12, 44.

1762 β Aurigae Monteregali ad Boream.

Sectore ad Ortum converso.

303 Sept.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
2	0°. 31'. 13", 03.	— 0", 00.	+ 7", 30.	— 6", 37.	0°. 31'. 14", 53.
5	0. 31. 13, 03.	— 0, 01.	+ 7, 32.	— 6, 38.	0. 31. 14, 53.
6	0. 31. 13, 03.	— 0, 01.	+ 7, 33.	— 6, 39.	0. 31. 14, 53.
7	0. 31. 13, 03.	— 0, 02.	+ 7, 34.	— 6, 40.	0. 31. 14, 52.
14	0. 31. 13, 03.	— 0, 05.	+ 7, 39.	— 6, 45.	0. 31. 14, 49.
17	0. 31. 13, 03.	— 0, 06.	+ 7, 36.	— 6, 47.	0. 31. 14, 43.
18	0. 31. 13, 03.	— 0, 06.	+ 7, 35.	— 6, 47.	0. 31. 14, 42.
			Refractio + 0, 57.		
		Distantia media			0. 31. 14, 49.

Sectore ad occasum converso.

304 Sept.					
9	0°. 28'. 56", 96.	— 0", 03.	+ 7", 36.	— 6", 42.	0°. 28'. 58", 41.
11	0. 28. 56, 96.	— 0, 04.	+ 7, 37.	— 6, 43.	0. 28. 58, 40.
13	0. 28. 56, 05?	— 0, 04.	+ 7, 40.	— 6, 45.	0. 28. 57, 50.
19	0. 28. 56, 96.	— 0, 07.	+ 7, 34.	— 6, 48.	0. 28. 58, 29.
			Refractio + 0, 54.		
		distantia media			0. 28. 58, 15.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				0. 30. 6, 32.

ARTICULUS III.

Observationes fixarum Taurini.

1763 α Cigni ad Austrum.

Sectore ad occasum converso.

305 Nov.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Abertatio.	Nutatio	Distantia reducta.
12	0°. 37'. 50", 25.	+ 14", 84.	+ 16", 80.	− 7", 68.	0°. 38'. 14", 87.
14	0. 37. 50, 25.	+ 14, 90.	+ 16, 52.	− 7, 68.	0. 38. 14, 65.
18	0. 37. 50, 25.	+ 15, 03.	+ 15, 96.	− 7, 68.	0. 38. 14, 22.
19	0. 37. 51, 62.	+ 15, 06.	+ 15, 82.	− 7, 68.	0. 38. 15, 48.
20	0. 37. 51, 62.	+ 15, 09.	+ 15, 68.	− 7, 68.	0. 38. 15, 37.
21	0. 37. 51, 62.	+ 15, 12.	+ 15, 54.	− 7, 68.	0. 38. 15, 26.
22	0. 37. 51, 62.	+ 15, 15.	+ 15, 40.	− 7, 68.	0. 39. 15, 15.
			Refractio + 0, 66.		
			distantia media		0. 38. 15, 00.

Sectore ad ortum converso.

306 Nov.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Abertatio.	Nutatio	Distantia reducta.
23	0°. 36'. 44", 51.	+ 15", 18.	+ 15", 22.	− 7", 68.	0°. 37'. 7", 88.
24	0. 36. 44, 51.	+ 15, 21.	+ 15, 04.	− 7, 68.	0. 37. 7, 73.
25	0. 36. 44, 51.	+ 15, 24.	+ 14, 86.	− 7, 68.	0. 37. 7, 58.
26	0. 36. 44, 51.	+ 15, 27.	+ 14, 68.	− 7, 68.	0. 37. 7, 43.
27	0. 36. 44, 51.	+ 15, 30.	+ 14, 50.	− 7, 68.	0. 37. 7, 28.
Dec. 3	0. 36. 45, 88.	+ 15, 50.	+ 13, 38.	− 7, 68.	0. 37. 7, 79.
4	0. 36. 45, 88.	+ 15, 53.	+ 13, 16.	− 7, 68.	0. 37. 7, 60.
5	0. 36. 45, 88.	+ 15, 56.	+ 12, 94.	− 7, 68.	0. 37. 7, 41.
6	0. 36. 45, 88.	+ 15, 59.	+ 12, 72.	− 7, 68.	0. 37. 7, 22.
			Refractio + 0, 65.		
			Distantia media		0. 37. 7, 55.
			ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media		0. 37. 41, 27.

1763 δ Cigni Taurini ad Austrum.

Sectore ad Occasum converso.

307

Nov.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio	Distantia reducta.
11	0°. 30'. 44", 72.	+ 9", 88.	+ 15", 77.	— 8", 53.	0°. 31'. 2", 40.
12	0. 30. 44, 72.	+ 9, 90.	+ 15, 60.	— 8, 53.	0. 31. 2, 25.
14	0. 30. 44, 72.	+ 9, 94.	+ 15, 22.	— 8, 53.	0. 31. 1, 91.
20	0. 30. 45, 63.	+ 10, 08.	+ 14, 08.	— 8, 53.	0. 31. 1, 82.
21	0. 30. 45, 63.	+ 10, 10.	+ 13, 89.	— 8, 53.	0. 31. 1, 65.
22	0. 30. 45, 63.	+ 10, 12.	+ 13, 70.	— 8, 53.	0. 31. 1, 48.
			Refractio + 0, 56.		
		distantia media			0. 31. 1, 92.

Sectore ad Ortum converso.

308

Nov.					
25	0°. 29'. 40", 34.	+ 10", 19.	+ 13", 01.	— 8, 53.	0°. 29'. 55", 56.
26	0. 29. 40, 34.	+ 10, 21.	+ 12, 78.	— 8, 53.	0. 29. 55, 35.
27	0. 29. 40, 34.	+ 10, 23.	+ 12, 55.	— 8, 53.	0. 29. 55, 14.
Dec.					
4	0. 29. 41, 71.	+ 10, 41.	+ 10, 88.	— 8, 53.	0. 29. 55, 02.
5	0. 29. 41, 71.	+ 10, 43.	+ 10, 62.	— 8, 53.	0. 29. 54, 78.
6	0. 29. 41, 71.	+ 10, 45.	+ 10, 36.	— 8, 53.	0. 29. 54, 54.
			Refractio + 0, 55.		
		distantia media			0. 29. 55, 06.
	ad 2 septemb. 1762	distantia ex mediis media			0. 30 28, 49.

1764 β Aurigae Taurini ad Austrum.

Sectore ad Occasum converso.

309 Mar.	Distantia observ.	Praec. ad 2 sept.	Aberratio	Nutatio.	Distantia reducta.
15	0°. 10′. 48″, 41.	+ 2″, 52.	+ 7″, 35.	+ 8″, 78.	0°. 11′. 7″, 27.
16	0. 10. 48, 41.	+ 2, 52.	+ 7, 34.	+ 8, 78.	0. 11. 7, 26.
17	0. 10. 48, 41.	+ 2, 53.	+ 7, 33.	+ 8, 78.	0. 11. 7, 26.
19	0. 10. 48, 41.	+ 2, 53.	+ 7, 31.	+ 8, 78.	0. 11. 7, 24.
29	0. 10. 48, 86.	+ 2, 57.	+ 6, 95.	+ 8, 80.	0. 11. 7, 39.
30	0. 10. 48, 86.	+ 2, 57.	+ 6, 90.	+ 8, 80.	0. 11. 7, 34.
31	0. 10. 48, 86.	+ 2, 58.	+ 6, 84.	+ 8, 80.	0. 11. 7, 29.
			Refractio + 0, 21.		
			distantia media		0. 11. 7, 29.

Sectore ad Ortum converso.

310 Apr.					
2	0. 9. 44, 93.	+ 2, 59.	+ 6, 72.	+ 8, 82.	0. 10. 3, 25.
3	0. 9. 44, 93.	+ 2, 59.	+ 6, 66.	+ 8, 82.	0. 10. 3, 19.
5	0. 9. 44, 93.	+ 2, 60.	+ 6, 54.	+ 8, 82.	0. 10. 3, 08.
6	0. 9. 44, 93.	+ 2, 60.	+ 6, 48.	+ 8, 82.	0. 10. 3, 02.
18	0. 9. 45, 39.	+ 2, 65.	+ 5, 67.	+ 8, 86.	0. 10. 2, 76.
19	0. 9. 45, 39.	+ 2, 65.	+ 5, 60.	+ 8, 86.	0. 10. 2, 69.
			Refractio + 0, 19.		
			distantia media		0. 10. 3, 00.
	ad 2 septemb. 1762 distantia ex mediis media				0. 10. 35, 14.

ARTICULUS IV.

Gradus ex arcu toto, et partibus.

311 Andratis ad ventos crebros, vehementesque defendendos a sectore tabulas quatuor cum operculo affiximus fornici circa sectoris caput; in operculo autem patebat oblongum foramen, quod longitudine respondebat motui sectoris in meridiano, amplitudine intervallum aequabat, quod ab ostio telescopii ad occasum, vel ad ortum conversi poterat occupari; decurtabat longitudinem huius foraminis tabella, quae in operculo juxta meridianum excurrebat foramine aeque alto, sed longitudine illa vix maiore, quam postulabat ostium telescopii. Supra hanc motu huius motui recto incedebat tabella alia foramine rotundo vix superante sectoris ostium. Itaque harum tabellarum, sive cursorum in operculo positiones facile ita componebamus, ut caelum non pateret, nisi per foramen aequale ostio telescopii; atque haec faciebant ad ampliorem venti undam defendendam; ad motum autem venti, quoad poterat, omnem cohibendum, occluseramus etiam admodum diligenter rimas in porta, atque in fenestra omnino omnes.

312 Profecto haec, quae Andratis, eadem alibi, quamquam minus necessaria, adhibuimus vento remedia; atque his cautionibus, aliisque, quas jam antea memoravi, cum agerem de sectore, fixarum distantias sumus assecuti consensione ferme singulari. Quam etiam ad rem, ne quid dissimulem, diligentiam contulisse arbitror, qua ex praecedenti observatione sectorem ad sequentem parabamus. Nam, ubi semel fixam ob-

servaveramus quam accuratissime, atque nihil habebamus, de quo in ea observatione ambigeremus, tum vero sequenti die sectorem pro observanda fixa eadem in positionem restituebamus omnino eamdem; videlicet lineam tangentium ope cochleae (*fig. XXXII tab. II*) G eodem numero partium micrometri dimovebamus e loco suo, quo in priore illa observatione dimoveramus, ut punctum proximum adduceremus ad pendulum; tum cochlea *r* sectorem inclinabamus, quoad erat necesse, ut pendulum, quemadmodum in priore observatione, ad punctum idem rediret. Itaque si, rebus omnibus jam similiter constitutis, fixa redibat similiter ad filum circuli in vertice primi, binae observationes confirmabant se mutuo; sin minus, tantum observatio altera alteri invicem addebat, aut detrahebat, quanta erat semidifferentia partium micrometri, quae diurnae fixae variationi non deberetur. Quod si haec semidifferentia obtingebat paullo maior, respuebantur ambae, nisi earum unam confirmassent sequentes observationes.

313 His animadversis veniamus ad gradum constituendum qua ex arcu toto, qua ex partibus ipsius.

314 Porro Andratis latitudo

ex δ Cycni	45°. 31′. 19″, 13.	
ex α Cycni	45. 31. 18, 53.	. . 45°. 31′. 18″, 32.
ex β Aurigae	45. 31. 17, 29.	

---

315 Monteregali

ex δ Cycni	44°. 23′. 33″, 27.	
ex α Cycni	44. 23. 34, 70.	. . 44°. 23′. 33″, 61.
ex β Aurigae	44. 23. 32, 85.	

---

316 Taurini

ex δ Cycni	45°. 4'. 14", 20.				
ex α Cycni	45. 4. 13, 57.	}	.	.	45°. 4'. 14", 03.
ex β Aurigae	45. 4. 14, 31.				

317 Quare amplitudo arcus caelestis Taurinum inter, et Montemregalem

ex δ Cycni	1°. 7'. 45", 86.				
ex α Cycni	1. 7. 43, 85.	}	.	.	1°. 7'. 44", 71.
ex β Aurigae	1. 7. 44, 44.				

318 Inter Andratas, et Taurinum

ex δ Cycni	0°. 27'. 4", 93.				
ex α Cycni	0. 27. 4, 96.	}	.	.	0°. 27'. 4", 29.
ex β Aurigae	0. 27. 2, 98.				

319 Taurinum inter, et Montemregalem

ex δ Cycni	0°. 40'. 40", 93.				
ex α Cycni	0. 40. 38, 87.	}	.	.	0°. 40'. 40", 42.
ex β Aurigae	0. 40. 41, 46.				

320 Jam vero ad conferendum cum hoc caelesti arcu, et eius partibus arcum terrestrem, et partes eiusdem, restat, ut hic, qui a principio adductus fuerat ad vallum, deprimatur etiamnum, uti fieri assolet, ad superficiem maris. Profecto ex observationibus nostris, quae vix ab iis differunt, quas Clarissimus De-Luc habuit in solo Regiae huius urbis Acade-

miae, vallum Taurinense libellam maris superat hexapedis 130, seu 00000397 radii telluris, quem ad vallum sumimus 3269251.

321 Hinc arcus interceptus Taurinum inter, et

Montemregalem	38734, 93.
demta parte 00000397, seu	1, 54.
exsistit	38733, 39.

322 Arcus interceptus Taurinum

inter, et Andratas	26154, 66.
demta parte 00000397, idest	1, 04.
reliquus est	26153, 62.

323 Et summa arcus totius	64887, 01.

324 Atque hic monendum arbitror, quamobrem arcum totum, et eius partes, eam praesertim, quae Taurino Montemregalem pertinet, hic iis adhuc aliquanto maiores constituamus, quas principio postulanti Boscovichio, imo et urgenti ego tradideram in scheda, quae a Boscovichio est postmodum vulgata. Videlicet aliquo, neque ita magno post absolutam mensionem temporis intervallo instabat amicissime praeclarus Geometra, ut gradum ederemus. Nos vero otium sperantes, quod exoptabamus, polliceri non verebamur; sed enim eam curarum vacuitatem, quae calculo subsecivis horis per partes jam absoluto diligentissime, uti decet, et assidua in una ea re cura expendendo fuisset necessaria, partim vide-

bamus non concedi nobis, partim etiam, ut de me fatear, mihi ipse surripiebam. Etenim cum feriae veniebant, indignabar, quasi brevitate mihi non sufficerent sua, et facile observationibus, atque experimentis indulgebam aliis meis, quae parem assiduitatem non postulabant, oblectationem vero prae calculorum molestia afferebant mihi non mediocrem. Itaque Boscovichio gradum reposcenti obsequi constitui, quo tum poteramus modo; videbamur autem ex rei veritate posse nos obsequi. Etenim de gradus longitudine pro adjacentibus ingentibus massis ingenti nihil habebamus quod praeterea ambigeremus; unum restabat, quod, etsi minus necessarium, erat certe maxime fastidiosum, nimirum, ut singulas universi calculi minutias diligentius expenderemus, atque ut videremus, num anguli ad stationes singulas capti ex singulis in duabus polygoni partibus, ii etiam consentirent cum dimensionibus polygoni, qui ceu minus idonei ad illud recta non spectabant. Quare tum schedam dedimus, in qua longitudinem arcus scripsimus ita minutam, ut diligentissimo examine maius capere ipsa decrementum non posset (reliqua enim, quae exhibebatur longitudo, erat adhuc tanta, quae Boscovichio satisfaceret, praesertim id scire aventi, quam gradus hic noster ad montes utrinque finitus proportionem esset habiturus ad gradus dimensos ab aliis); sed interea et illud monuimus, praelongum, quem tradebamus gradum, si quando vulgavissemus, vereri nos, ne rebus expensis attentissime omnibus, vulgare deberemus adhuc longiorem. Itaque tum Boscovichio abunde, et interea etiam veritati indulsimus, quoad erat a nobis certo perspecta; at nunc demum, postquam adsertum est mihi

hoc anno otium, et diligenti consideratione veritatem conclusimus in arctis limitibus suis, longiorem, qualem esse debere deprehendimus, gradum tradimus, et qualem probabiliter nos traditur os praenuntiaveramus.

325 Quamquam in constituendo hoc nostro ex arcubus dimensis gradu, non facile ego assentior usitatissimae illi analogiae, in qua uti ad hexapedas arcus, ita gradus ponitur se habere ad hexapedas. Etenim, si usurpentur istiusmodi Analogiae,

Ex arcu toto emergit Gradus
1°. 7′. 44″, 71.
seu 4064″, 71. ad 64887, 01. uti 3600″ ad 57468, 59.
Ex parte borea
0°. 27′. 4″, 29.
seu 1624″, 29. ad 26153, 62. uti 3600″ ad 57965, 65.
Ex parte australi
0°. 40′. 40″, 42.
seu 2440″, 42. ad 38733, 39. uti 3600″ ad 57137, 79.

326 Verum quam idoneae sunt hae analogiae ad gradum concludendum ex arcu in tellure aequabili, tam ineptae videntur mihi ad id conficiendum in tellure inaequabili, cuiusmodi certe ipsa est, uti protinus dicam, in regione hac nostra. Pone enim arcum nostrum totum decurtari, ut evadat gradu nihilo longior, sed pone etiam adjacentes montes, et si quae aliae sunt inaequabilitates, ita commoveri, ut eamdem teneant ad terminos gradus, quam habebant ad terminos arcus, positionem; profecto, dum ne mutua accessione turbent vires suas, eae inaequabilitates eamdem inferent in so-

lum gradum, quam in totum arcum inferebant variationis magnitudinem.

327 Contra, cum partem arcus consideramus, atque ex ipsa gradum elicimus, eam variationis partem disjungamus oportet, quae ponitur ad aliam unice pertinere. Itaque communibus iis analogiis pro re nostra hae videntur sufficiendae, in quibus vel error arcus totius totus toti gradui, qui ex ipso toto concluditur, vel solus error partis gradui toti tribuitur, qui ex parte sola infertur.

328	. . . .	4064″, 71.		64385, 00.
329	(3600″ ad 57024. uti	1624, 29.	ad	25728, 75.
330	. . . .	2440, 42.		38656, 25.

331 Scilicet sumo cum Clarissimo Landio gradui nostro, cuius mediocris latitudo est 44°. 44′, deberi longitudinem mediocrem 57024; mox uti gradus totus ad hanc mediocrem longitudinem, ita pono se habere arcum nostrum quemque ad longitudinem mediocrem ipsius; atque differentiam huius a longitudine a nobis inventa considero instar erroris, qui et arcui toti ob regionis nostrae inaequabilitates, et idem toti gradui concluso ex eo arcu debeatur; itaque in hac hypothesi, quae quaestioni nostrae videtur maxime consentanea,

Gradus illatus		supra medium 57024
332 Ex toto arcu		502, 01.
333 Ex arcu boreo	redundat	424, 87.
334 Ex arcu australi		77, 14.

obs. 25° 20′ 45″
différence 21′ 23″.
Vol. Mem. de Turin p. 111.
5° 20′ 35″.

335 Est autem huius gradus nostri longitudo 25°. 14′. 30″, cuiusmodi ipsam nos conclusimus ex eclipsium observationibus nostris; neque eam superat nisi 15″, quam constituit Acetta* Mathematices magister, qui in observandis eclipsibus Satellitum Jovialium ante annos viginti quinque diuturnam, diligentemque operam navavit laudatissimam ab Academicis Parisinis. Interea vero specula nostra ab illa, in qua Acetta observabat, distat ortum versus 12″; quare differentia ad 3″ perstringitur.

336 Sed ut de graduum magnitudinibus aliquid addam, vident jam omnes, illud ipsum, quod sumitur latitudini datae deberi longitudinem gradus mediocrem datam, esse maxime incertum. Singulae enim, quae novae prodeunt graduum mensurae, dum cum quavis conferuntur veterum mensurarum, id quidem universe satis belle confirmant: tellurem forma esse compressa, sed singulae eae comparationes usitata illa analogia institutae diversam diametrorum proportionem, et diversam adeo etiam concludunt pro graduum incrementis legem. Una videtur affulgere spes assequendae maioris consensionis, si condatur accurata formae historia regionum illarum, in quibus adlaboraverunt mensores graduum, ut conjectari probabilius possit de caussis anomaliarum, et de harum magnitudine; his enim demum sublatis maior appareret consensio. Sed nec facilis est montium, et vallium descriptio huiusmodi, quae distantias, massas, positiones satis ad rem congruenter definiat; et praeterea, posteaquam eae essent annotatae omnes, quae sub sensus cadunt inaequabilitates, de iis restaret con-

* Le Pere Acetta observa des Eclipses à Turin en 1736 jusqu'en 1750. mais on ne trouve ses Observations imprimées nul part, quoique Acetta était Correspond.t de l'Acad. R. de S. de Paris. Mr Bidone à Turin m'a dit que l'observatoire du P. Beccaria (Piazza Castello) était plus oriental que celui du P. Acetta de 12″ (ou ...)

jectandum, quae certe sub tellure delitescere debent plurimae.

337 Nos, nisi quam oporteret, eam, quam possumus, narrationem adjungemus ingentium, quae ad boream praesertim nostro gradui adjacent, inaequabilitatum. Sed primum proportionem annotabimus, quam habent ad nostras mensurae Parisinae; ut, si quis polygoni dimensiones nostras ad usus Geographicos velit transferre, rem exsequi facile possit, et tuto. Itaque 1764 Canonica, et ego Matheyum convenimus, qui tum unus erat ex Regiis organopeis, et exemplar authenticum adservabat hexapedae nostrae; atque diu, diligenterque collata cum nostra hexapeda Parisina, convenimus cum Matheyo eodem, pedem nostrum continere pedis Parisini pollices 18, lineas 11, et praeterea 70 centesimas lineae partes; Parisinas adeo mensuras esse ad nostras, uti 160 ad 253. Quare ut ex Parisinis nostrae eliciantur, satis erit si logarithmo Parisinarum addatur logarithmus constans 9 8009995.

ARTICULUS V.

Montes ad boream.

338 Andratae impendent in rupe elatae hexapedas ferme 240 ab agro Eporediensi, qui nisi humili a Candia ad Maxadium transverso colle praecluderetur, planities a rupe Andratensi ad alium in colle Monregalensi polygoni terminum perpetuo aequata, continuataque pateret. Atque haec soli depressio, et aequabilitas ideo primo loco a me memoratur, quod ipsa

etiam spectet ad gradum producendum. Etenim quae deficit ad austrum magnitudo materiei, eius vim auget, quae redundat ad boream.

339 A pago Andratensi, interjectis agri jugeribus perpaucis, attollitur primus ad boream mons *Montecavallo*, qui continuata acclivitate effertur ad sublimius fastigium, atque ibi mutato nomine appellatur *Mombarone*. Altitudinem huius montis supra agrum Eporediensem ex barometro invenimus hexapedas 1098, 16. Ex chartis topographicis culmen huius montis distat a sacrario Andratensi hexapedas 3135, declinatque a meridiana Andratensi ad ortum gradus 15 circiter.

340 A *Mombarone* perpetua, usque et usque altiora montium juga declivitatibus disjuncta usque et usque minoribus, directionibus autem primum quidem ad ortum sinuosis, postmodum ferme rectis in distantia ab Andratis hexap. 22000 montem ad boream assequuntur altitudine aeque immanem, ac amplitudine: *Rosa* ipsi nomen est. Capto a specula Taurinensi angulo eminet hexap. 2212, 38; patet in vertice hexap. 3307, 00; praeterea dorsum longe emittit leni descensu ad austrum praesertim; Grounerus in historia glacialium in Helvetia montium vix montem alium pinxit amplitudine tanta, quanta num. 139 exprimit montis *Rosa* lineamenta.

341 Nomina eorum montium, qui perpetua, continuataque serie ab Andratis pertinent ad montem *Rosa*, paucis memorabo. Et primo verbum dicam de monte Graia, qui Andratis distat ferme aequaliter ac *Mombarone*, sed declinat longe magis ad ortum a meridiana. Huius montis nomen, quod idem proximo pago est commune, imo etiam a templo est cele-

bre Matri Virgini *a Graia* sacro, fecit, ut polygonum ad alpes Graias finiri scripserim. Equidem constat ex Plinio, multoque etiam luculentius ex tabula Peutingeriana id liquet, alpes Graias ab Augusta Praetoria Segusium pertinuisse ad Austrum; alpes autem Penninas a monte Jovis, qui olim Deo Pennio, Jovi scilicet ipsi, ut autumant eruditi, sacer erat, alpes glaciales illas comprehendisse, quae Allobroges inter, et Veragros ad lacum Lemanum exporriguntur; quae vero a monte Jovis, vulgo *il gran s. Bernardo*, progrediuntur ortum versus per montem *Rosa*, eas Penninas summas nominatas fuisse; verumtamen, si vis aliqua inest in nomine eius montis, qui hodienum *Graia* dicitur (video autem Geographos appellationibus huiusmodi tribuere solere plurimum) opinari quis poterit, veteres, ducto quasi aliquo per Augustam Praetoriam parallelo, etiam eorum montium partem, qui supra Eporediam sunt ultra Duriam, Graiis alpibus accensuisse. Verum quocumque demum haec res se habeat modo, mons iste *Graia*, neque altitudine est insigni, et ob suam ad ortum, quam dicebam, ingentem declinationem ad montium seriem non spectat, qui Andratis montem *Rosa* assequuntur.

342 Altior est monte *Graia*, et pro maiore sua distantia declinat multo minus mons *Mussone*. Declinatione adhuc minore, et proxime eadem, quam annotavimus in *Mombarone*, subsequuntur collis *Carisei*, mons *Martius*, et collis *Rosaza*. Collis proximus alius *Piè di cavallo* accedit etiam multo magis ad meridianam Andratensem. Collis *Mologno*, et mons qui sequitur *la punta de' tre Vescovi* iterum discedunt aliquantisper. Collis *prà di Tendon*, collis *Macagna*, collis *a valle Lobia*

meridianam videntur assequi. Atque hinc praelonga, et continuata montium series, quibus nullum nomen (sunt enim omnino invii) ferme recta progreditur ad montem *Rosa* per intervallum hexap. 7410. Unus est in hoc intervallo difficillimus callis, atque is appellatur collis *Olen*; nempe id apud nos usitatum video, ut praealti etiam montes, ubi sunt quoquomodo pervii, colles appellentur. Audii ante aliquot annos Topographum, qui, cum collem *Olen* attentasset, gloriabatur se montem *Rosa* conscendisse; iter difficillimum, et periculosum memorabat, glaciei immanem vim, frigus intolerabile; attamen is collis, ultra quem sunt omnia inaccessa, distat adhuc a fastigio montis *Rosa* hexap. in horiz. 3000.

343 Acclivitatem horum montium ab Andratis ad montem *Rosa* quoquomodo continuatam fluvii etiam persuadent, qui scaturiunt hinc inde ex huiusdem lateribus, is praesertim, qui profluit e latere occiduo Lizius amnis, discurritque praeceps in austrum, indeque influit in Duriam. Sesia, qui fluvius scatet ex latere ortivo, procurritque juxta idem latus usque ad *Allagna* fodinam aere divitem, imo et argento, auroque, avertitur inde in vallem sui nominis a montibus, qui latius adjacent ad ortum.

344 Atque haec refero pleraque ex charta Topographica, quam descripsit mihi Castellinus Topographus Regius; nunc quae circa positionem, amplitudinem, altitudinemque montis *Rosa* quadrante definire nos ipsi studuimus, non mittam, et ea etiam memorabo, quae barometro providimus circa altitudinem Andratarum, et eius, qui proxime imminet jugi *Monbarone*.

345 Ad positionem quod attinet, quando ex specula ad nullam ex stationibus referre eum montem poteramus, adivimus Regium viridarium, atque quadrante prope *i* constituto (*fig. XLVII tab. III*) cepimus angulum M*i*S, quem cum recta *i*M ad montem *Rosa* constituebat *i*S ad Supergam; atque eo adducto ad turrim s. Joannis I, deinde ad speculam O, exstitit angulus MOS . . . . 73°. 14′. 34″.
huic addidimus SO*o* (*num.* 205) . . . 10. 36. 48.

exstititque MO*o*, sive *m*O*s*‵ . . . . 83. 51. 22.
quem constituit recta ab O traducta per montem *Rosa* M cum parallelo a specula O tendente ad meridianam *s*‵A*m* Andratensem. Cathetum autem O*s*′ facile erat elicere totum.
Nam O*o* pars paralleli inter speculam, et meridianam Supergensem (*num.* 205) est . . . . 3278, 40.
pars reliqua *os*‵ aequatur summae
ex F*f*′ . . . . 889, 88.
et F*f*″ (*fig. XXXVII tab. III*) (*num.* 195) . 1564, 38.
et S*s*′ (*num.* 217) . . . . 1822, 62.

nempe O*s*′ . . . . 7555, 28.
Itaque prona jam erat analogia; uti sinus O*ms*‵ aequalis complemento anguli *m*O*s*‵ ad O*s*‵, ita sinus totus ad O*m* . . . . 70593, 14.
et alia: uti sinus totus ad O*m*, ita *m*O*s*‵ ad *sm*‵ 70187, 67.
Atque subducendo ipsam A*s*‵ (*num.* 221) . . 26154, 66.

reliqua fuit pars meridianae A*m* . . . . . . 44033, 01.

quae ab Andratis A assequitur in *m* rectam O*m*, quae ab O traducitur per montem *Rosa* M.

346 Jam vero ex chartis Topographicis distantia Andratarum a summo vertice montis *Rosa* judicatur hexap. 22000. Itaque, si centro facto in A, eo intervallo AM secetur latus O*m*, erit in M vertex montis *Rosa*. Quare, quoniam in triangulo A*m*M innotescit AM, et A*m*, et angulus A*m*M, invenietur *m*AM angulus, quo mons *Rosa* a borea declinat ad occasum . . . . 6. 13. 32.

347 Verum hic animadvertendum, nos eum angulum cepisse a puncto in vertice montis *Rosa* maxime occiduo; itaque ad declinationem eliciendam verticis medii a meridiana Andratensi, subducenda est ab angulo MA*m* dimidia illa amplitudo montis, quae ab ea Andratensi statione appareret; atque istam offert obvia analogia: uti 22000 distantia AM sumta ex chartis topographicis ad 48301, 86 distantiam OM supputatam; ita 3°. 55′. 0″. amplitudo Taurini observata ex specula ad 8°. 37′. 30″. amplitudinem eamdem, quae Andratis videretur. Et eius semis demta ex angulo MA*m* 6°. 13′. 32″, reliquam facit puncti eius, quod est medium in vertice montis *Rosa* a meridiana Andratensi ad occasum declinationem . . . . 1°. 54′. 47″.

348 Atque his de positione animadversis, restat, ut pauca attingamus de eius montis magnitudine; ad quam primo confert ipsa verticis in hexapedis amplitudo; quam mensuram facile suppeditat ratio radii ad peripheriam, et partem peripheriae quamlibet. Scilicet, sumta pro radio distantia OM

48301, 86. arcus 3°. 55′. 0″. invenitur aequalis hexapedis 3307, 00. Itaque haec est amplitudo verticis montis *Rosa*. Quem verticem animadvertendum est, raro observari totum; nam coalescit ex montium jugis plurimis, quorum aliqui persaepe etiam tum delitescunt ab interjectis nebulis, cum alii distincte cernuntur.

349 Agedum, exsequamur altitudinis mensionem. Porro haec quadrante observata ex specula

exsistit . . . . 2. 14′. 45″.
quae, addita ob rotunditatem telluris semisse anguli ad centrum . . . . + 0. 25. 25.
et demta huius semissis parte nona ob refractionem . . . . — 0. 2. 49.

evadit in veram . . . . 2. 37. 21.
cuius tangens (sumta pro radio distantia OM 48301, 86.) aequat hex. . . . . 2212, 38.

350 Facit vero etiam ad montis magnitudinem amplitudo basis, quae certe, quoad conjectare licet ex leni montis eiusdem a vertice, qua summa parte cernitur, declivitate, et quoad opinari fas est ex lineamentis basis eiusdem, quae exponit in sua tabula Grounerus, amplissima sit oportet ab ortu ad occasum; sed interea longe etiam protenditur massa eius montis boream versus, et austrum, uti ipse ego ex rheda observabam, cum aliquot ante annos Mediolano Taurinum redirem.

351 Neque interea unica est actio huius montis, et eorum, qui ab Andratis ad ipsum perpetuo assurgunt, quae

pendulum inflectat ad boream; sed illam certe augent parte aliqua tum ii, qui a monte *Rosa* ad ortum continuantur, et postmodum ab ortu ad boream declinant alii, atque alii immanes montes, assurguntque ad montem immanissimum *s. Gottard*; tum illi, qui per montem Jovis pergunt ad occasum, et mox ipsi etiam ad boream ab occasu deflectentes in Allobroges progrediuntur ad *Momblanc*, cuius montis altitudinem supra libellam maris De-Luc extulit ad hex. 2391.

352 Equidem montis Jovis, et reliquorum ad occasum montium vim particula sua aliqua impendi oportet in vi contraria libranda, qua gravia in Austrum trahant alpes Graiae, atque inde etiam Cottiae, quae ad occasum juxta longitudinem nostri polygoni protenduntur. Verum eae ipsae Penninae alpes, quae Graiis, et Cottiis respondent ad occasum, istarum vim longe superare vi sua facile intelliget, qui earum magnitudinem cum magnitudine harum vel obiter compararit. Universe vero borearum nostrarum alpium immanes massas ea consideratio apprime demonstrat, quod fluvii copiosissimi divortio facto ex continuata earum serie in omnes Europae partes longissime proficiscantut.

353 Atque, his omnibus diligenter pensitatis, et calculo etiam posito admodum probabili, in eam me ego facile patior trahi opinionem, eos montes maiorem adhuc in sectoris nostri pendulum declinationem fuisse illaturos, nisi ulla sub ipsis satis ingens vacuitas delitesceret. Etenim non, quemadmodum obsoleta est, ita et infirma videtur mihi ea vetus quorundam Philosophorum opinio, montes, nisi omnes, certe plerosque e maris fundo vulcanorum vi fuisse elatos. Profecto

in

in montibus plerisque manifesta cernimus eorum corporum vestigia, quae in mari procreantur, atque in ipsius fundo subsidunt; itaque alterutrum detur oportet; aut mare superasse montes in ingenti illa, qua sunt altitudine; aut montes vi aliqua telluri interiore e mari assurexisse. Primum vero pugnare videtur cum lege aequilibrii; nisi eo usque provehi nos malimus, ut aquarum vim a principio incredibiliter maiorem fuisse putemus.

354 Etsi vero clarissimum historiae naturalis lumen Buffonius, qui vel una recente analysi sua, qua quod novum metalli genus existimabatur, illud ex auro, et ferro coalitum demonstravit, esset de Physices scientia optime meritus; sed praeterea dudum antea scientiam eamdem re saepissime ditavit, oratione autem, atque stylo semper, atque ubique mirifice exornavit; etsi is, inquam, dissentiat, quod vestigia discurrentis maris, in montibus jam adultis, uti sunt, videre sibi videatur, et vulcanorum vim illis attollendis putet omnino imparem, opinionem tamen possim quidem mittere meam veritus summi hominis auctoritatem, dimittere ex animo vix possim, commotus specie quadam evidentiae.

355 Etenim quod attinet ad vallium sinuosos flexus, juxta quos adjacentes utrinque montes procedunt, receduntque, ea observatio fluviorum, atque torrentium perennem vim commonstrat mihi manifestam, qui unde solum maiore firmitate sua resistebat validius, debuerunt divertere ad loca soli mobilioris, atque ita alternatim suffodere montes, et valles cavare, easque pro maiore impetu suo cavare altiores, angustiores vero pro maiore soli duritie, et cohaesione, quemad-

modum effectum videmus. Interea vero, si rem ipsam, et rei modos attente scrutemur, diligenterque consideremus, certe montium, valliumque adjuncta omnia, formae, directiones maris operam effectricem respuere videbuntur, ac plane repudiare, aquae nempe latissime patentis. Atque quod sub mari montes subsint iis similes, qui prominent in tellure, ea res nihil praeterea demonstrat mihi, nisi similitudinem efficientis caussae. Si enim vulcani montes efferunt supra mare, eos multo facilius efferent e fundo, quod certissimis monumentis compertum est accidisse in Mediterraneo circa insulam Santorino.

356 Atque ad hanc persuadendam, quae incredibilis videri possit, vulcanorum vim plane summam, ferme ausim confugere ad observationem montium in Luna; ii enim saltem plerique qua rotunda sua forma, qua exstantibus in rotundis vallibus monticulis, qua etiam praelongis, quae e montium centro videntur effluxisse, jugis speciem vulcanorum referunt mihi immanissimorum; ausim, inquam, hodie hoc etiam proponere argumenti genus. Nam cum anno superiore amico Londinum de hac re quasi per jocum scriberem, responsum accepi, summos viros Hoochium, Hevelium, aliosque serio adamasse opinionem eamdem.

357 Quare, si Vesuvius, subjungere jam possem, si Aetna, si ager Neapolitanus omnis, si Sicilia universa, uti diligentissimus Amiltonus persuadet, vi ea sunt elati, quae vulcanos facit, quid ni vi eadem procreati sint altissimi in Luna montes certis vulcanorum notis insigniti? quid ni et al-

tissimi nostri iis depressiores, quos in Luna ex umbris metimur?

358 Verum argumento non videmur indigere adeo longe accito; nam ipsi, quos peragrare nobis licet in tellure nostra montes, indicia praeseferunt subterraneae efferentis vis. Etenim qui montes aut ex depositis conchyliis, aut ex stratorum natura, indole, ac directionibus parallelis ad mare pertinere certo existimantur, in iis strata quandoque erecta, saepissime vero acclivia videmus ad montis verticem. Huiusmodi autem positio tria suadere videtur; primo strata ea a corporibus effici nequivisse, quae in mari subsederint, ut eamdem a principio haberent acclivitatem; deinde acclivitatem hanc adjuvari nequivisse ab aquarum affluxu, qui semper est quoquomodo tumultuarius; denique immanissimam vim edocet, quae egerit ex maximis altitudinibus strata ipsa, quae in fundo maris esse debuerunt ad libellam composita, dimoverit, truserit sursum, aptissimeque hinc inde ad latera obliquarit, aut vero etiam erexerit.

359 Novi quidem autumare aliquos eas voragines, e quibus explicat se vulcanorum vis, atque actio, modicam habere sub tellure altitudinem; verum ii viderint, ne fundum crateris, ubi est vulcani ostium, sumant pro centro. Certe Amiltonus, ut mittam alia, fluxilem e vulcano lapideam massam vidit fundo maris profundiorem.

360 Jam vero, ut ad montes nostros redeam, Grounerus qua parte accedi ad ipsos potest, vulcanorum vestigia agnovit in iis praesertim, qui a Veragris ad nos pertinent. At-

que, si aliquid mihi licet addere ex observationibus meis, duas innuam, unam, in quam forte incidi, cum barometrum efferrem ad fastigium *Mombarone*. Scilicet dum repebamus per latus eius montis ortivum, prope ipsum, in quo contendebamus, callem, stratum ex silice planissimum, vidimus ad dexteram eius callis partem sursum inclinatum ad verticem montis. Stratum autem hoc narrabat nobis vetus in iis alpibus Upilio ante paucos annos patuisse a fulminibus, quemadmodum ipse referebat, qui asperam ex ea montis parte crustam disjecerant. Vere autem inter descendendum ingentia silicea saxa ad imum eius plani acervatim provoluta observavi; atque memini, me ignem excussisse ex facie eorum saxorum lucidiore, quae debuerat esse plano illi contermina, non item ex facie adversa, quae erat jam opacata ab alterna, diutissimaque caloris, atque frigoris vi. Video autem naturae studiosos in hanc ferme omnes opinionem convenire, siliceam massam actuosissimi ignis vi fluxisse.

361 Observationem aliam habebam Andratis, cum illic fixas observarem. Saepissime telescopium dirigebam ad parvos lacus, qui Eporedia non longe distant ad boream; atque eos a cavatis monticulis, atque asperis, cuiusmodi esse solent crateres vulcanorum, comprehendi singulos perbelle videbam. Accedebat vulgatissima in iis regionibus opinio, eorum lacuum aliquem profunditate esse tanta, quanta explorari non posset. Denique eos lacus esse exstinctorum vulcanorum reliquias ea etiam res mihi facile suadebat, quod prope Eporediam publica, quae tum erat, via, continuato flu-

xili saxo, cui *Lava* est hodie nomen, ad ingentes tractus strata videretur.

ARTICULUS VI.

Aliquae ex novo barometro altitudines.

362 Illo ipso anno 1764, quo gradus mensionem absolveramus, die decimaquinta augusti cum Colletto (Canonica enim aegrotabat) repebam ad fastigium *Mombarone* barometro instructus pro exploranda eius montis altitudine, atque instrumentis aliis, quae evehi illuc poterant, ad positiones, altitudinesque proxime conjectandas eorum, qui inde ad boream sequuntur, montium. Verum vix equos in summa, quae dicitur a valle nigra, alpe dimiseramus, et saxosum praeruptum callem pedibus, imo et manibus arripueramus, continuo tonare, fulgurare Andratis sub pedibus, mox pluvia etiam irruere in nos procellosa. Attigimus tamen alacres imum, uti appellant, *Mombarone* cornu. Illic ego sub exstante saxo humi pronus manibus coepi dimovere maceriam, ut barometrum erigerem, et aquae rivos excipere in dorsum depluentes. Barometro observato, consultoque etiam thermometro, desilivimus ad alpem a valle nigra. Ibi tugurium subivimus per humilem portam, quae eadem fenestra est tecto contermina; assedimus humi ad ignem, atque in fumo refecimus nos. Collettus die decimaseptima summum ipsum cornu superavit caelo ad glaciem frigido, et a proxima procella admodum ventoso.

363 Scilicet eo anno intempestivum admodum vehemens frigus jam processerat ad hos montes; quare ad montes alios, quemadmodum constitueramus, non sumus progressi, sed nec habitis eo anno observationibus fidebam admodum ob caeli inclementiam. Itaque quoniam et barometri mei, de quo supra (num. 164), experimentum facere avebam, nepotem misi nuperrime, qui altitudines mercurii expendit Eporediae, Andratis, et in summo cornu *Mombarone*, caelo, si alias unquam, nitidissimo, atque tranquillo. Barometrum in ea summitate vacuitatem supra mercurium in clauso tubo tenuit absolutissimam; imo illo apte inclinato, mercurius e tubo aperto, etsi tubi diameter superaret lineas duas, non prodibat, nisi immisso ferreo filo. In reditu prope Andratas operarius, qui barometrum gestabat, per mollissimam in declivi solo lubricam herbam, graviter excidit; desiluit adeo frustulum vitri a summa clausi tubi camera; sed barometrum quodque aliud illisum similiter, fuisset omnino disruptum. Mobilitatem mercurii in barometro hoc nostro, quae res ad perfectionem facit, oscillationes commendant, quas ubi semel percepit mercurius, tenet diutius, quam in barometris aliis.

364 Ceterum ecce observationes.

I		II	III	IV
Taurini 31 augusti				
hora VI pomeridiana.				
barom.	5312			
thermom.	— 11			
	5301		+ 7	
Eporediae hora eadem.				
barom.	5240	361	+ 14	61, 64.
thermom.	— 12			
	5228		+ 7	
Taurini 1 septembris				
hora VII matutina.				
barom.	5330			
thermom.	— 13			
	5317		+ 9	
Andratis hora ferme eadem.				
barom.	4976	1779	+ 15	301, 47.
thermom.	— 10			
	4966		+ 6	

I		II	III	IV
Taurini 2 septembris hora VII matutina				
barom.	5308			
thermom.	— 10			
	5298		+ 5	
Mombarone hora eadem				
barom.	4112	6616	— 4	1098, 17.
thermom.	— 2			
	4110		— 9	

365 Hae observationes sunt emendatae juxta praeceptiones clarissimi De-Luc. Itaque columna prima exhibet primo locum depressiorem, et horam observationis; deinde altitudinem barometri observatam exactam ad decimas sextas lineae partes, postmodum variationem eius altitudinis thermometro expensam, quo D. De-Luc metitur expansionem mercurii; denique mercurii altitudinem edit correctam ab ea variatione. Eadem pergit eadem exhibere pro loco elatiore.

366 Columna altera continet differentias logarithmorum altitudinum mox correctarum ductas in numerum 6, atque divisas per 1000; ita enim numeri pedum habentur, neglectis eorum partibus.

367 Columna tertia exponit ex alio thermometro calorem medii atmosphaerae caloris duplum.

368 Columna quarta altitudinem stationis elatioris supra Taurinum constituit in hexapedis. Scilicet ex praeceptione D. De-Luc differentiae logarithmorum expositae in columna II, mox ductae in calorem medio duplum, qualis recensetur columna III, et divisae per 1000 dant partem addendam columnae II, vel ab ea demendam, ut habeantur in pedibus altitudines accuratiores; eas placuit mihi exhibere in hexapedis, et centesimis, ad quam mensuram exegimus mensuras alias nostras omnes.

369 Observationum praestantiam commendat consensus altitudinis Andratarum ex his elicitae cum altitudine eadem quadrante capta; differentia enim, quae non pertingit ad hexapedas 4, prorsus evanescit, si loca barometri ad vallum, et ad superiorem in aedibus Brunerii contignationem referantur.

370 Interea vero observationes hae ipsae, quamquam numero paucae, si tamen cum iis considerationibus conferantur, quas paullo ante afferebam de boreorum montium dimensionibus universe, illa videntur confirmare, quae conjectabam de eorum vi; eos videlicet angulo adhuc maiore pendulum sectoris fuisse attracturos, si massa telluris aequabilem ubique densitatem obtineret.

371 Etenim observatam a nobis penduli declinationem non ne solus efficeret eorum montium primus *Mombarone*? Non ne sphaera ipsi suffici potest radio hex. saltem quatercentum? Hac in substitutione altitudo montis minuitur hexapedis 235: probabile autem est minui ipsum aequaliter in amplitudine; cer-

te minuitur multo magis in productione; atque haec omnia, quae monti fiunt vis suae decrementa, eam vim aequare videntur, qua sphaera praestat, quod pars aliqua massae prope acclivem eius sursum a centro superficiem pendulo propior sit futura, quam mons. Quod enim attinet ad partem massae a centro deorsum, quae est in monte ad austrum porrectior, quam in sphaera, illius vis a vi librari videtur massae illi debita, qua prae rotundata sphaera est mons etiam ad boream basi sua solidior. Praeterea tenendum Andratas impendere in rupe praerupta.

372 Atqui sphaera illa declinationem penduli a nobis observatam quamproxime efficeret. Nam junctis cathetis duobus, altero tendente in centrum telluris, altero directo in sphaeram montis vicariam, effectoque illo ad hunc, uti radius telluris ad 400, seu uti 8140 ad 1 circiter, eae exponent vires, quibus pendulum trahetur in sphaeram telluris, et in sphaeram montis vicariam, utpote quae vires in sphaerarum superficiebus sunt uti radii. Pendulum autem actum binis iis viribus suspendetur in hypothenusa, adeoque angulo ad sphaeram montis vicariam aberrabit, cuius tangens ad radium erit quemadmodum 1 ad 8140, qui 25″ superabit, scilicet angulum observato a nobis ferme aequalem.

373 Atque his rebus circa boreas animadversis, adhuc libens commentaria haec non dimittebam, nisi aliqua pariter observarem circa alpes maritimas, quae extrema sua parte, qua ad vada Sabatia proxime finiuntur, polygono adstant ad austrum. Ac primo positio ipsa Montisregalis videtur paullo expressius significanda; quae urbs in subalpinis nulli secunda

censetur coeli salubritate, amoenitate soli, civium frequentia, post Augustam Taurinorum singulari, et vero etiam eorumdem ingenio, atque fide. Civium pars collem tenet; sed pars longe maxima, eaque actuosissima in planis degit, uti appellant, quae a meridie per occasum ad boream usque collem ambiunt, ob expeditum, quod ibi est, a mari commercium, et ob eximias, quas alluens Ellerus fluvius offert aedificiis plurimis opportunitates, praesertim sericeis. Itaque, quando nos in colle sectorem locavimus a planis elato hexapedas 84 circiter, haec modica elatio principio consideranda videtur, ceu ea, quae minimulam aliquam pendulo attulerit ad alpes maritimas propensionem; quemadmodum dixi de tanto maiore Andratarum supra agrum Eporediensem altitudine.

374 Jam vero quemadmodum dispar est haec terminorum polygoni supra interjectam planitiem altitudo; ita maxime dispari conditione sunt, quae polygonum concludunt alpes. Andratis *Mombarone*, uti dixi, impendet quam proxime; contra collis Monregalensis itinere horae unius saltem recedit a radicibus alpium maritimarum, quasi temperatiore in coelo amoenissimos colles exordiens, qui juxta ortivam plagam concludunt agrum subalpinum omnem, atque inde late etiam ad Astam Pompeiam, et ad Statiellenses vagantur Baccho amicissimi, et Pomonae.

375 Praeter eam maritimarum alpium a colle Monregalensi distantiam est etiam apprime consideranda modica earum prae Penninis altitudo: cuius rei geometricam quasi mensionem exhibent nobis limites nivis. Penninae summae stant perpetuo nive candidae magna parte altitudinis suae, etiam cum

calor gliscit vehementior; contra in maritimis invalescente aestate nix omnis deliquescit. Atque hic vix temperem mihi, quin verbum dicam de pulcherrimo, in quo ipsa hac, qua isthaec ego scribo hora, mirifice oblector obtutu. Siquidem ex electrica in colle Garzegna specula, porrecto prope Montemregalem ad plagas omnes loco, sole oriente, coelum a superiorum dierum pluvia (dies est septembris decimanona) intueor, si alias unquam, nitidissimum, et alpes a prima autumnali nive candidas circumspecto. Ea nullibi, quoad video, pertingit ad pomiferos montes, et linea finitur sinuosa ipsa quidem, sed quae, aequatis distantiis, ad libellam ubique pertinet ferme eamdem, confinia quasi definiens, ultra quae aër rarior calorem non coërcet fluxioni aquae necessarium. Sed, quod me pro mea maxime delectat re, est ipsa montis *Rosa* ad boream, et nostrarum ad austrum maritimarum alpium consideratio; etenim in illo nix ad montis usque radices, prout a me videntur, (neque illae interjecto monte alio impediuntur) pertingit quam proxime; in istis vero vix summa fastigia a nive albicant, eaque rara admodum. Neque vero maris viciniae tribuenda videtur differentia haec omnis. Etenim *Mombarone* mons primus in radicibus montis *Rosa* ab aestivo calore nivem dimittit omnem, etsi alpibus, de quibus hic dico, maritimis est ipse elatior.

376 Atque dudum quidem antea habebam perspectas observationes his similes; praeterea ex communissimo monticolarum sermone, et ex itineribus etiam ad Savonam, Oneliam, Niceam meis plane cognoveram alpes maritimas prae Penninis extenuari plurimum, eamque ob rem, et vero etiam ob

satis magnum earundem recessum a statione Monregalensi, ingentem pendulo ad austrum declinationem afferre non debuisse. Verum rem generatim manifestam avebam certius pervidere observationibus singularibus, et aliquo calculi quasi elemento aestimare.

377 Quare die 7 septembris Montemregalem veni quasi feriaturus in alpibus, et continuo cum cognato, et nepote (Canonica enim alia curabat Taurini) adivi cellam sectoris, ibique explorata temporaria acus magneticae declinatione, ex penultima, quae est in praealta Ecclesiae Metropolitanae turri contignatione (in suprema enim metuebamus a ferris) vidimus meridianam spectare ad monticulum in alpium radice nomine *Moncervetto*. Igitur constituimus eo tendere, meridianam producere ad montes sequentes, singulos scandere, observare adjacentes, atque ita progredi ad mare.

378 Neque vires a calore, et vero etiam ab aetate proxime elanguescentes continebant me, quin in equum jam proxime insilirem experturus, num per montes, uti olim, possem adhuc reptare; sed coelum repente mutatum fecit, ut cognatum, et nepotem dimiserim solos; etenim differendo fiebant omnia deteriora. Ii spatio horarum quatuor assecuti sunt *Moncervetto*; sed ob densam caliginem nec meridianam illinc producere potuerunt, nec callem tentare sunt ausi non ante tritum. Itaque progressi juxta fluvium *Cossalia* in casis dormierunt *alla Botera*, et pergentes a meridiana vera eo ferme angulo declinare, quo falsa declinat in chartis topographicis spatio horarum quinque montem superarunt, qui unus in eo calle occurrebat altissimus, vulgo *la colla di Ormea*. Ipse, in

quo superarunt, locus, dicitur *il piano de' termini*; sed quando a latere montem efferri adhuc altius audierunt (etenim caligabant adhuc omnia) post horae quadrantem ipsum ibi sunt assecuti, ubi eminet maxime, et mons dicitur *di Valbella*. Iverunt inde ad mare, superato monte alio minus elato, et nihil ipsis fuit reliquum, nisi ut reditum pararent leniore via; etenim coelum a caligine vergebat ad pluviam.

379 Ego vero interea Garzegnae barometrum observabam, cuius infra cellam sectoris depressionem jam antea provideram, quemadmodum et eius cellae super urbem in planis altitudinem aestimaveram; sed hic observationes afferam postmodum diligentius habitas.

380 Scilicet Breduli in urbe plana in aedibus Nepotis, coelo late sereno, tranquilloque

	I	II	III	IV
18 sept. hora VIII mat.				
barom. . . .	5148			
thermom. . . .	— 7			
	5141		— 2	
Garzegnae hora XI mat.				
barom. . . .	5104	203	— 13	33, 50.
thermom. . . .	— 3			
	5101		— 11	
In cella sectoris hora IX $\frac{1}{4}$ matut.				
barom. . . .	5043	203	— 22	51, 16.
thermom. . . .	— 3			
	5040		— 11	

381 Quare altitudo sectoris super plana urbis, quam etiam nos nosse intererat, uti dixi, concluditur 84, 66. Haec autem a libella exstitit 83, 98; neque hanc semihexapedae differentiam magni ego facio pro ea, de qua hic agitur re. Potest autem ipsa emergere ex caussis pluribus. Primo quod observationes barometri hora differunt; deinde quod huius altitudines uno ego thermometro emendo collato cum iis, quae

exhibet De-Luc, atque eam negligo emendationis partem, quae altitudini mercurii supra, vel infra pollices 27 deberetur. Denique nec certo scio, utrum nullus a libella exstiterit error, neque eo ventum a nobis adhuc est, ut ad hexapedae partes altitudines quasque barometro exigi semper posse existimem.

382 Provideram similiter altitudinem eius cellae supra Taurinum acceptis illinc quotidianis, quas cum habitis in cella conferrem, observationibus.

	I	II	III	IV
Taurini 9 septembris				
hora 9 matutina.				
barom.	5276			
thermom. . . .	— 13			
	5263		+ 8	
In cella sectoris h. XI $\frac{3}{4}$.				
barom. . . .	5084	917	— 3	152, 50.
thermom. . . .	— 3			
	5081		— 11	

quae altitudo a quadrante observata vix modica differt, qua eae, in quibus Taurini dego, aedes a vallo differunt altitudine.

383 Veniens ad observationes in itinere ad mare habitas ordiar a mari

	I	II	III	IV
Arascii 14 septemb.				
hora 8 $\frac{1}{2}$ pomerid.				
barom. . . .	5360			
thermom. . . .	— 4			
	5356		+ 3	
Garzegnae hora eadem				
barom. . . .	5084	1383	— 3	229, 83.
thermom. . . .	— 5			
	5079		— 6	

	I	II	III	IV
Finalii 15 septembris				
hora 1 ½ pomerid.				
barom. . . .	5368			
thermom. . . .	— 11			
	5357		+ 5	
Garzegnae h. 1 pomerid.				
barom. . . .	5078	1414	— 4	234, 83.
thermom. . . .	— 4			
	5074		— 9	

384 Quarum altitudinum media 232, 33
aucta altitudine sectoris supra Garzegnam . . . 51, 16

edit altitudinem sectoris supra mare 283, 49
Itaque pro huius altitudinis magnitudine valentius pendulum in ora maris ad alpes maritimas attraheretur, quam quod attractum sit Monteregali.

385 Sed ipsa haec Montisregalis supra mare altitudo minuta altitudine sectoris supra Taurinum per barometrum inventa 152, 50

profert altitudinem Taurini supra mare 130, 99
aequalem assumtae (*num.* 120).

386 Etiam Oneliae barometrum observatum est, at in viridario est observatum altitudine a mari non admodum certa; a puteo, qui illic effodiebatur, conjectata illa est hexapedas tres; verum hac etiam altitudine addita, summa hexapedis adhuc quinque deficeret ab altitudine Arascii observata, et Finalii.

387 Denique observationes hic exequar, quae in ipsa ad mare per alpes via habitae sunt in montibus dumtaxat duae ob coeli inclementiam, una supra *Moncervetto*, altera supra montem *di Valbella*.

I		II	III	IV
Garzegnae 10 septembris				
hora 1 $\frac{1}{2}$ pomeridiana.				
barom. . . .	5148			
thermom. . . .	— 10			
	5138		+ 4	
In summo *Moncervetto*				
hora eadem.				
barom. . . .	4831	1648	+ 5	276, 00.
thermom. . . .	— 8			
	4823		+ 1	

388 Quae, demta altitudine sectoris supra Garzegnam 51, 16, minuitur ad hexapedas 224, 84; atque altitudo haec

prae modica magnitudine sua, et pro satis magna ad iter horarum quatuor distantia edocet eum monticulum vi pollere ad grave trahendum omnino exigua; itinere enim horarum trium itur ad eius montis pedem.

389 Sed haec scribenti succurrit mihi montem *Rivoera* me adolescentem conscendisse, quem unum in minima a Monteregali ad meridiem distantia altitudine judicavissem prae vicinioribus aliis maxima, et etiam prae iis, qui aequali Monteregali distarent intervallo. Mitto observatum. Horis tribus itur ad *Montaldo* dispersum juxta eum montem oppidum; hora una superata est praelongo, et leni calle reliqua montis altitudo, imo et ad crucem ventum est in scopulo parumper prominente juniperis convestito; atque vel ea res de modica montis altitudine commonefecit observatores, quod reliquum a scopulo montis fastigium aretur omne, et sit segeti habilissimum. Observationes autem ad me allatae sunt huiusmodi

I		II		III	IV
390 Garzegnae 29 sept.					
hora 11 matut.					
barom. . . .	5166				
thermom. . . .	— 5				
	5161		— 5		
Montaldo hora 9 matut.					
barom. . . .	4992	904		— 12	149, 00.
thermom. . . .	— 7				
	4985		— 7		
Rivoera hora 11 matut.					
barom. . . .	4856	699		— 10	116, 34.
thermom. . . .	— 3				
	4853		— 3		

391 Quare altitudo *Rivoera* supra Garzegnam . 265, 34, et supra cellam sectoris . . . . 214, 18. decem hexapedis minor ea altitudine, quae *Moncervetto* contingit, monticulo secundum meridianam primo, a qua *Rivoera* plures gradus declinat ad ortum.

392 Iter ergo persequendo ad mare ab imo *Moncervetto* sesquihora itur ad aliquas juxta fluvium *Cossalia* casas *la bottera*; inde

per semihoram via juxta fluvium eumdem procedit adhuc ferme plana; postmodum vero horis ferme quinque ascenditur ad montem *di Valbella* calle, quem muli ad dorsum usque *pian de' termini* gradu vix superant frequenter intermisso, at superant tamen. Atque ex observationibus haec concluditur eius altitudo.

	I	II	III	IV
Garzegnae 11 septemb.				
hora 10 matut.				
barom. . . .	5175			
thermom. . . .	— 10			
	5165		+ 5	
In monte *di Valbella*				
hora 1 $\frac{1}{2}$ pomerid.		5062	— 5	839, 50.
barom. . . .	4256			
thermom. . . .	— 3			
	4253		— 10	

393 Itaque altitudo montis *di Valbella* supra cellam sectoris 788, 34 hexapedis aliquot est minor altitudine *Mombarone* supra Andratas. Sed praeter hanc, quae esset omnino modica, differentiae aliae *Mombarone* ipso monte *di Valbella* declarant longe actuosiorem. Primo, quod altitudo hexapedarum 240 circiter, qua Andratae agro Eporediensi supereminent, confe-

rat ipsa etiam, uti dicebam superius, ad declinationem penduli Andratensis in alpes Penninas. Demus autem altitudinem collis Monregalensis non adeo praerupti super subjecta urbis plana adjuvasse similiter declinationem penduli Monregalensis ad alpes maritimas; atque altitudo *Mombarone* supra illum agrum altitudinem montis *di Valbella* super haec urbis plana superabit hexapedis plusquam 160; quae est pars plusquam sexta totius altitudinis, qua mons *di Valbella* planis urbis supereminet. Pono massam montis *di Valbella* prae massa *Mombarone*, quae, si cetera essent similia, minui deberet in ratione altitudinis triplicata, minui in ratione eius dimensionis simpla; atque id ea praesertim de caussa pono, quod dorsum montis *di Valbella* juxta parallelum suum appareat magis continuatum, quam fastigium *Mombarone*; atque in ea ipsa hypothesi *Mombarone* monte *di Valbella* erit adhuc actuosior ad pendulum trahendum.

394 Sed deinde magnam his pendulorum declinationibus afferre debuerunt differentiam distantiae montium. Nam chartae topographicae ponunt verticis *Mombarone* ab Andratis distantiam circiter quadruplo illa minorem, qua dorsum montis *di Valbella* distat Monteregali. Itaque, si centra, in quae coëunt attrahentes vires, ponantur distare similiter (centrum vero illud in *Mombarone*, qui prope Andratas continuo incipit efferre sese, videtur in ea distantia sequi proportionem minorem constituta, illa nempe minorem, quam sequatur distantia centri attractionis, si ita appellare fas est, montis *di Valbella*, qui radices supra Montemregalem jacit in distantia

tanto maiore, vis *Mombarone* hanc ob caussam erit decies et sexies maior vi montis *di Valbella*.

395 Denique *Mombarone* est mons primus in Penninis assurgentibus, uti saepe dixi, usque et usque magis ad montem *Rosa*. Contra mons *di Valbella* primus est, qui in maritimis occurrerit in tanta altitudine, atque idem ferme ultimus; nam qui efferuntur deinceps montes alii duo, in iis quidem ob venti impetum barometrum non est observatum, at depressiores communiter perhibentur.

396 Equidem si juxta meridianam progredi licuisset, atque montes juxta eam directionem conscendere singulos, et vero etiam observare adjacentes, quemadmodum constitueramus, nullus dubito, quin continuatum maritimarum dorsum observatum fuisset in loco aliquanto elatiore, et vis adeo harum alpium ad gravia trahenda appareret aliquanto maior. Verum nunquam non appareret, uti arbitror, haec vis maritimarum vi penninarum tanto minor, quanto gradus, qui ex arcu Taurinum inter, et alpes maritimas concluditur, minor gradu exstitit, qui ex arcu Taurinum inter, et Penninas infertur.

397 Atque haec ea ferme sunt, quae hac in re probabiliter providimus pro eo, quod nancisci potuimus in alpibus vere obiter considerandis otium. Unum tamen est quod, partim ex allatis observationibus, partim ex eorum auctoritate, qui de nostris alpibus scripserunt, aut de montibus exterarum gentium, videor satis certo posse affirmare: nullam fortasse in tellure universa esse regionem, in qua montium ad gravia deflectenda vires futurae sint valentiores, quam in regione hac nostra. Etenim is ipse ab Academicis Parisinis celebratis-

simus

simus *Chimboraço*, qui mons in America quotquot aut illic, aut alibi sunt observati, omnium altissimus perhibetur; attamen is supra illam in eius latere stationem, ex qua eius actio in pendulum quadrantis est observata, ultra hexapedas 1173 non efferebatur. Atque is ipse, quamquam libellam maris hexapedis 3217 vertice superat suo; attamen Quiti libellam, quae urbs est in amoenissima inter eos montes planitie, non superat, nisi hexapedis 1767. Nobis autem mons *Rosa* Andratas superat hexapedis 1906; Taurinum vero, quae urbs in hac re Quito respondere videtur, hexapedis superat plusquam 2200. Equidem nos fixas observavimus Andratis in ingenti a monte *Rosa* distantia. Verum quid vetat observari easdem a Veragris in distantia tanto minore?

398 Interea, ut redeam ad *Chimboraço*, praestantiam montis *Rosa* in massa significat distantia duarum stationum, ex quibus actionem montis illius definiverunt Academici Parisini. Etenim, constituta prima quamproxime versus centrum montis, recesserunt ad stationem aliam hexap. 3070; censuerunt-que vix unam decimam tertiam eius actionis partem superesse, quam mons in statione prima exeruisset. At in monte *Rosa* a distantia hac vix deficit (*a*) sola ipsa verticis amplitudo; amplitudo autem basis illam certe longe superat.

399 Denique accedit montes in America meridiani directionem sequi, quae res facit, ut magna saltem parte librare ipsi debeant vires suas, dum actio eorum exploratur ex declinatione fixarum; si autem haec ex ascensione recta inquiratur, quaestio evadit tanto impeditior, quanto angulus petitus a tempore eo incertior est, qui ab arcu definitur. Con-

tra nobis Penninae alpes ab ortu ad occasum protenduntur, ut ad declinationem ex una parte augendam, minuendam ex alia aptissime positae videantur.

400 Atque in hac maxima gravitatis in montes expendendae opportunitate, optima haec videtur futura ulterioris inquisitionis via, quam dudum antea proponebam, cum aeque ac voluntas, valebant vires: scilicet si polygonum adductum ad alpes Penninas, et maritimas producatur ultra ambas ad Veragros, et ad mare, et fixae observentur in utroque Penninarum, et maritimarum latere, et in aliquo, quod nos fecimus, interjectae planitiei puncto intermedio. Quod si rei deinde, quomodocumque ea obvenerit, alia adhuc confirmatio desideretur, quidni arcum, qui velit, non metiatur per colles juxta ortivam huius nostrae regionis plagam, quae ab alpibus maxime recedat?

(a) *Montem* Rosa *dum considero e colle Garzegnae, video verticem ipsius amplitudine plane ingenti; verumtamen subdubito, ne, dum hanc ex Topographi indicatione metiebamur e specula Taurinensi, fastigia aliqua continuatorum montium inter ea accensuerimus, quae certe numero plura pertinent ad verticem montis illius, et ob quorum fortasse multitudinem hoc* Rosae *nomen est illi inditum. Verum ea re videt quivis conjecturas has nostras parum turbari; neque enim id nosse interest, cuia sit in data distantia, et positione massa, sed quanta. Ad distantiam vero eius montis quod attinet, quamdiu quadrantem asportavimus per stationes, nequivimus ex dua-*

bus earum sat dissitis in fastigium montis Rosa *collineare, quod agnosceremus esse certo idem; nam eorum fastigiorum multitudo incertam faciebat in stationibus diversis speciem cuiusque. Itaque chartis topographicis indulgere debuimus in ea distantia conjectanda. Sed plane in omni hoc de montibus sermone non agitur, quemadmodum in polygono, de geometrica, absolutissimaque magnitudinum definitione, sed de aestimatione rerum praeterpropter vera.*

INDEX.

CAPUT I *Basis.*

CAPUT II *Quadrans.*

CAPUT III *Polygonum, et arcus terrestris.*

pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
5	12	calibeos . . coclea	chalibeos . . cochlea
7	2	caepimus	cepimus
16	6	pollicem unum lineas tres	pollices tres lineam unam
17	26	CB	CD
18	21	demta . . . a summa . .	addita . . . summae
21	17	EB ∓ *c*F	EB ∓ CF
22	15	*ab*	A*b*
27	16	R*ur* --- *ur*	R*sr* . . . *sr*
51	19	FA	*f*A
101	9	355. 13. 10	355. 13. 16
102	penult.	11. 42. 43	11. 42. 33
ibid.		M*m* 2625, 62 . . .	M*m* 2626, 62
110	24	1823, 62	1822, 62
112	3		
118	penult.	*ur*	*ut*
124	2	D*fo*	D*f*O
145	15	1. 4. 8, 42	1. 4. 8, 32.
146	1	Cigni	Cycni
155	5	Taurinum inter . . .	Andratas inter
172	9	qui	quae
179	7	aedificiis	opificiis

In fig. II tab. I cuspidi circini litera A adscripta intelligatur, et in fig. XXX tab. II litera *m* prope M.

Imprimatur

F. Johannes Dominicus Piselli Ord. Praed. S. T. M. Vicarius Gen. S. Officii Taurini.

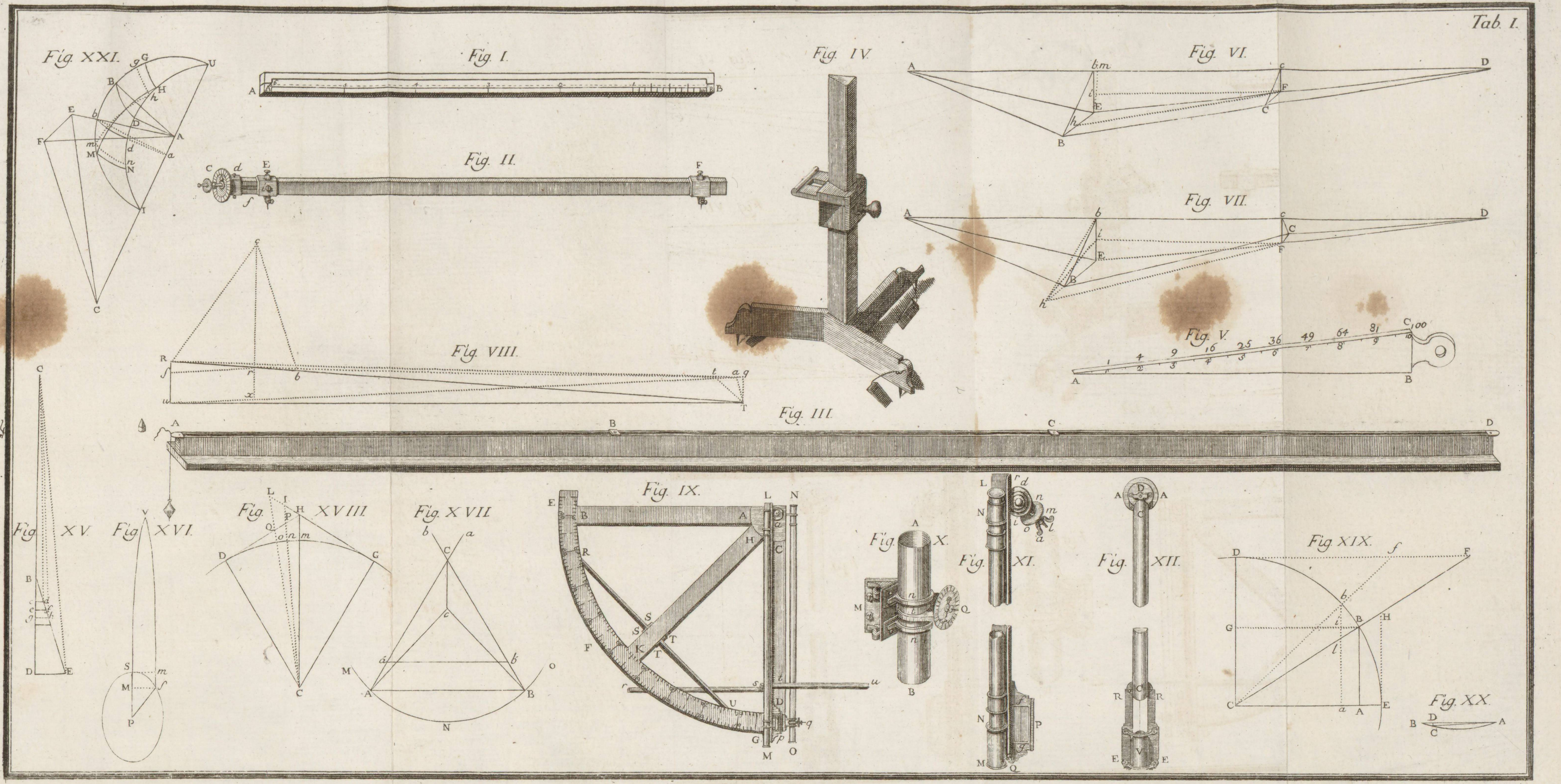
V. Mussa AA. LL. P.

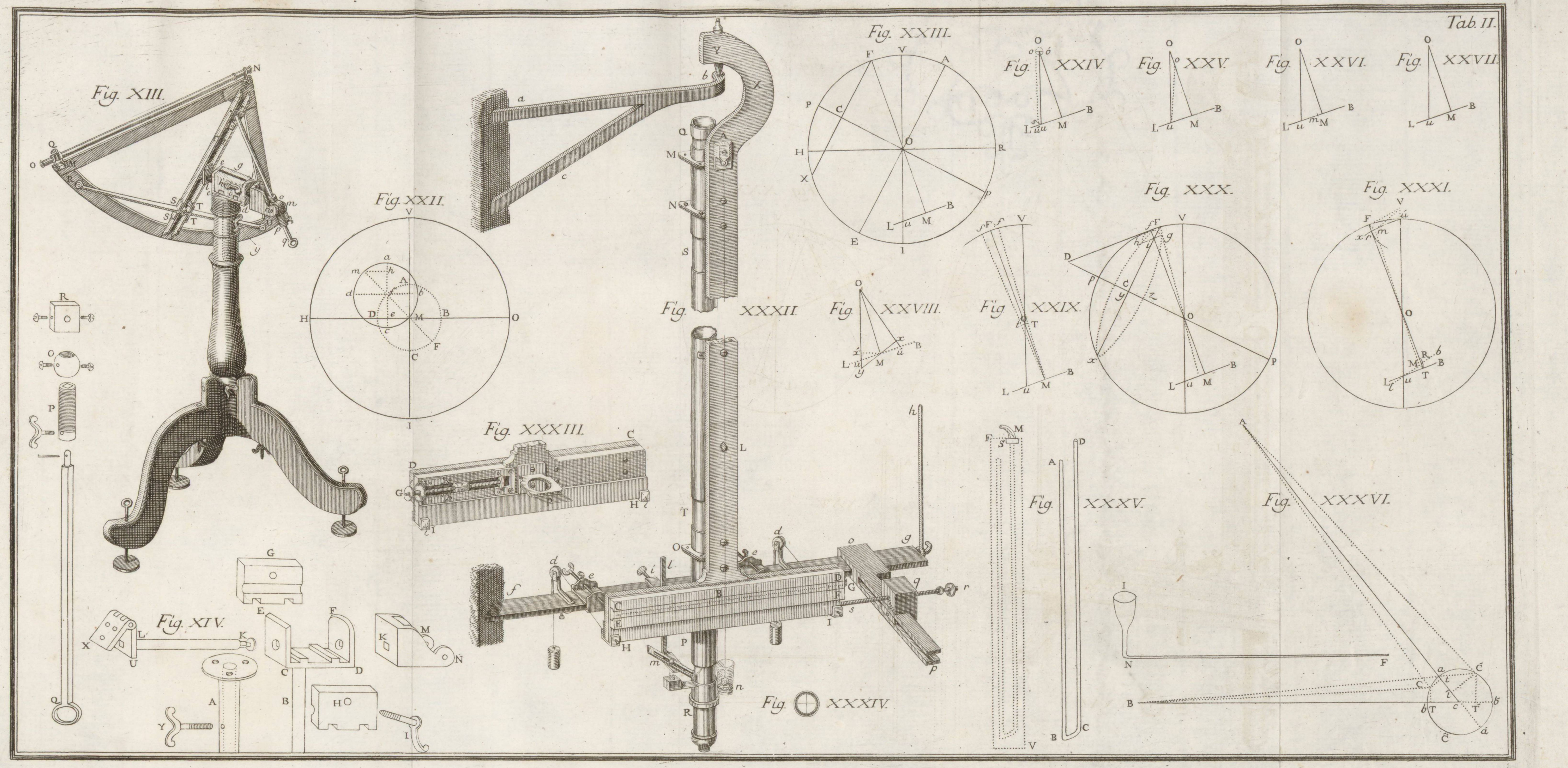
V. Se ne permette la stampa.

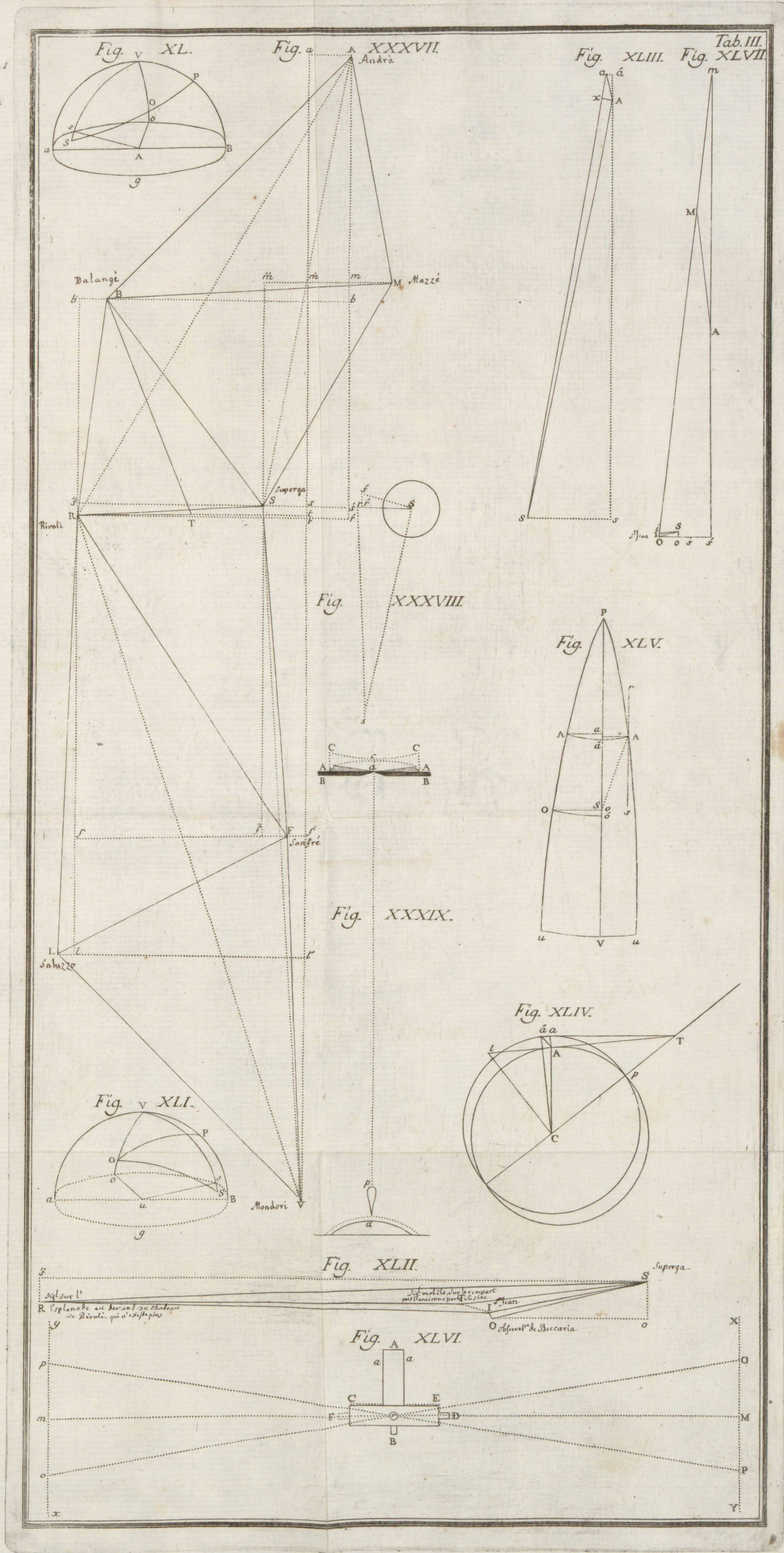
Galli per S. E. il Sig. Conte Caissotti di S. Vittoria Gran Cancelliere.

Fig VIII

r. pièce de marbre enseveli près de Rivoli
t pièce de marbre enseveli près de Turin
R Esplanade au devant du chateau de Rivoli, où Beccaria avait elevé un signal
c signal sur une colline près de Rivoli.
a Sigl temporaire qui n'existe plus
ta. prolongement de la base mesurée materiellem
q. point conclu par les ΔΔ.
T Sigl. temporaire près l'ancienne porte Susine.




Tab. II.
Fig. XIII
Fig. XIV
Fig. XXII
Fig. XXIII
Fig. XXIV
Fig. XXV
Fig. XXVI
Fig. XXVII
Fig. XXVIII
Fig. XXIX
Fig. XXX
Fig. XXXI
Fig. XXXII
Fig. XXXIII
Fig. XXXIV
Fig. XXXV
Fig. XXXVI


Tab. III.
Fig. XL.
Fig. XXXVII.
Andrà
Balangé
Mazzé
Superga
Rivoli
Fig. XXXVIII.
Sanfré
Saluzzo
Mondovi
Fig. XXXIX.
Fig. XLI.
Fig. XLII.
Superga
Fig. XLIII.
Fig. XLVII.
Fig. XLV.
Fig. XLIV.
Fig. XLVI.

THÉORIE
DU MOUVEMENT
ET
DE LA FIGURE ELLIPTIQUE
DES PLANETES;

Par M. DE LA PLACE, *de l'Académie Royale des Sciences & de celle de Turin; Examinateur des Eléves & Aspirans du Corps Royal de l'Artillerie, Inspecteur & Examinateur des Eléves de l'Ecole du Génie de la Marine.*

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,

Imprimeur Ordinaire du Roi, &c. rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXIV. [1784]

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

PRÉFACE.

LA pesanteur s'étend à l'infini dans l'espace, en diminuant dans la raison du quarré des distances au centre de la Terre. Cette diminution est presque insensible au sommet des plus hautes montagnes dont l'élévation est toujours fort petite relativement au rayon du globe terrestre; mais à la moyenne distance de la Lune, qui, suivant les observations de sa parallaxe, est à-peu-près soixante fois plus grande que ce rayon, la pesanteur est trois mille six cent fois moindre que sur la Terre. Un calcul très-simple fait voir que la pesanteur ainsi affoiblie par la distance, est en équilibre avec l'effort que fait la Lune à chaque instant, pour s'éloigner par la tangente de son orbite; ainsi le mouvement de ce satellite dans une orbe presque circulaire, est le résultat d'une force primitivement imprimée, & de l'action continuelle de la pesanteur. Sans la resistance que l'atmosphère oppose au mouvement des corps, un projectile lancé horisontalement du sommet d'une montagne, avec une vîtesse d'environ quatre mille soixante toises par seconde, deviendroit un satellite

de la Terre ; cette vîteſſe excéde conſidérablement celles que nous pouvons produire, & les corps projettés à la ſurface de la Terre avec des vîteſſes beaucoup moindres, décrivent en vertu de leur peſanteur , de petits arcs elliptiques qui ſe confondent ſenſiblement avec des paraboles. C'eſt dans cette hypothèſe que l'on a déterminé les loix du mouvement des projectiles; mais on doit obſerver que la même force qui les ramene à la ſurface de la Terre, retient la Lune dans ſon orbite, & que la même analyſe s'applique indiſtinctement à tous ces corps, en n'y faiſant changer que les données relatives à la diſtance & à la vîteſſe primitivement imprimée.

La figure ſphérique de tous les aſtres indique viſiblement qu'à leur ſurface, comme à celle de la Terre, les corps ſont animés par la peſanteur, & tous les phénomenes céleſtes dépoſent en faveur d'une gravitation univerſelle, proportionnelle aux maſſes, & réciproque au quarré des diſtances. Le Soleil dont la maſſe eſt beaucoup plus grande que celle des autres corps de notre ſyſtême planétaire, les entraîne autour de lui dans des ellipſes dont il occupe un des foyers ; les quarrés des tems de leurs révolutions ſont comme les cubes de leurs moyennes diſtances à cet aſtre ; & les aires que trace le rayon vecteur mené de ſon centre à celui de chaque

planète, ſont proportionelles aux tems employés à les décrire. L'obſervation ſeule a fait connoître à Kepler, ces loix fondamentales qui ont enſuite conduit Newton, par une marche géométrique & néceſſaire, à la découverte de la peſanteur univerſelle. Les ſatellites de Jupiter & de Saturne ſe ſont trouvés obéir à ces loix ; étendues aux comètes, elles ont repréſenté leurs mouvemens avec autant de préciſion que ceux des planètes, dont ils ne différent que par la grande excentricité des orbites qui rend les comètes inviſibles à nos yeux, lorſquelles ſont dans leurs aphélies, & qui permet de confondre avec des paraboles, la partie de leurs orbites, voiſine du périhélie. Toutes les courbes du ſecond ordre pouvant réſulter de la loi de la peſanteur, l'obſervation ſembleroit devoir nous offrir des comètes mues dans des hyperboles ; mais on peut ſuppoſer avec vraiſemblance que s'il exiſte de ſemblables comètes, elles ont depuis longtems diſparu, & que nous n'obſervons aujourd'hui que celles qui mues dans des orbes rentrantes, ſent ramenées ſans ceſſe à des intervalles plus ou moins grands, dans les régions de l'eſpace, voiſines du Soleil. Il eſt très-remarquable que les orbites des corps céleſtes ſoient ou preſque circulaires ou fort excentriques, ſans que les nuances intermédiaires ayent lieu dans la Nature, & que les mouvemens des planètes

& de leurs ſatellites ſoient dirigés dans le même ſens & ſur des plans peu inclinés les uns aux autres, tandis que les comètes ſe meuvent indifféremment dans toutes les directions & ſous toutes les inclinaiſons poſſibles à l'Ecliptique : ces phénomènes tiennent aux cauſes du mouvement primitif des planètes & des comètes, ſur leſquelles l'obſervation ne peut rien nous apprendre.

Puiſque tous les corps céleſtes peſent vers le Soleil, cet aſtre doit peſer à ſon tour vers chacun d'eux, ſuivant cette grande loi de la Nature, qui balance les actions de toute eſpece, par des réactions égales & contraires. Les planètes peſent également vers leurs ſatellites, & généralement vers tous les corps qu'elles attirent. On doit donc conſidérer toutes les molécules de la matière, comme les foyers d'autant de forces attractives proportionnelles aux maſſes, & réciproques aux quarrés de diſtances. Les mouvemens céleſtes étant le réſultat de ces forces & de vîteſſes primitives, la multiplicité des attractions rendroit la détermination de ces mouvemens impoſſible, ſans une circonſtance heureuſe qui a lieu dans notre ſyſtême planétaire, & qui tient aux rapports des maſſes & des diſtances des différens corps qui le compoſent. Leur diſpoſition eſt telle que chacun d'eux eſt ſollicité par une force conſidérable & par de très-petites forces qui ne font qu'altérer un peu ſes effets;

ainsi la masse du Soleil étant excessivement grande relativement à celles des planètes & des comètes, ces corps se meuvent à très-peu-près, comme s'ils n'obéissoient qu'à leur pesanteur vers cet astre ; & les mouvemens des satellites autour de leur planète principale, seroient considérablement troublés par une attraction aussi puissante, si la proximité de la planète ne rendoit par cette action à-peu-près égale à celle que le Soleil exerce sur la planète elle-même. On peut donc dans la recherche des mouvemens célestes, ne considérer d'abord que l'effet de la force principale, & déterminer ensuite par des approximations successives, les effets des forces perturbatrices. En suivant ce procédé, cette recherche qui, prise dans la rigueur, semble surpasser les forces de l'esprit humain, devient possible par voie d'approximation, & les résultats de l'analyse peuvent atteindre à la précision des observations.

C'est ainsi que les Géomètres de ce siècle ont déterminé les inégalités nombreuses de la Lune & des satellites de Jupiter ; la Lune sollicitée par une double pesanteur vers le Soleil & vers la Terre, les satellites de Jupiter soumis à son action, à leur attraction réciproque & à celle du Soleil, ne décrivent point des ellipses constantes autour de leur planète principale : la position de leurs nœuds & de leurs apogées, l'incli-

naiſon de leurs orbites, leurs excentricités, leurs grands axes varient ſans ceſſe; la théorie a non-ſeulement donné ſur toutes ces inégalités, des réſultats conformes aux obſervations; mais en les faiſant mieux connoître, elle a fourni les moyens d'en dreſſer des Tables très-préciſes. Les mêmes inégalités s'obſervent, quoique d'une maniere moins ſenſible, dans les mouvemens des planètes; les comètes en éprouvent de très-remarquables d'une révolution à l'autre, par l'action des planètes & principalement de Jupiter & de Saturne, & le retour de la comète de 1759, annoncé d'après la théorie de leurs attractions, & confirmé par l'événement, a porté cette théorie au plus haut degré d'évidence. L'action des comètes, d'autant plus ſenſible ſur une planète, qu'elle eſt plus éloignée du Soleil, paroît ſe manifeſter dans quelques irrégularités du mouvement de Saturne; mais le nombre, les maſſes des comètes, & les élémens de leurs orbites ſont encore trop peu connus, pour pouvoir aſſujétir leurs attractions à l'analyſe. Enfin, l'analogie nous porte à croire que l'action du Soleil n'eſt pas renfermée dans les limites du ſyſtême planétaire, & qu'elle s'étend juſques aux Étoiles, enſorte que tous ces aſtres ſont ſoumis à la loi générale de la peſanteur. La diſtance immenſe qui les ſépare, affoiblit leur action mutuelle, & rend leurs mouvemens preſque inſenſibles; on commence

cependant

cependant à les obſerver dans quelques-unes des Étoiles les plus brillantes, & il eſt extrêmement vraiſemblable que ces aſtres & le Soleil lui-même décrivent, en vertu de leur gravitation réciproque, des orbes immenſes dont la nature ne pourra être déterminée que par les obſervations d'un grand nombre de ſiècles.

Les phénomenes que nous venons d'expoſer, ſont indépendans de la figure & de la conſtitution intérieure des corps céleſtes; ils tiennent aux mouvemens reſpectifs de leurs centres de gravité; l'attraction univerſelle produit encore des effets très-remarquables dans les mouvemens de leurs parties autour de ces centres & dans leurs figures. La peſanteur à la ſurface des aſtres, eſt le réſultat des attractions de toutes leurs molécules; ces attractions combinées avec la force centrifuge de leurs vîteſſes de rotation, leur donnent une figure elliptique applatie, & font croître la peſanteur, de l'équateur aux pôles, proportionnellement au quarré du ſinus de la latitude; l'hétérogénéïté des parties qui ſont à leur ſurface peut altérer ces loix; mais au milieu de toutes les irrégularités qui en réſultent à la ſurface de la Terre, on reconnoît toujours l'empreinte d'une figure & d'une loi de peſanteur, régulières & conformes à la théorie de la gravitation univerſelle. L'action des corps étrangers ſur les fluides qui recouvrent les aſtres, doit

y exciter des oſcillations continuelles & faire varier à chaque inſtant leur figure ; ce phénomène s'obſerve ſur la Terre, ſous le nom de *flux & reflux de la mer ;* il a ſa cauſe dans l'action du Soleil & de la Lune ſur les eaux de l'Océan, & comme la poſition reſpective de ces deux aſtres eſt aſſujettie à des variations périodiques remarquables par les diverſes phaſes de la Lune, les loix des oſcillations de la mer doivent être relatives à ces phaſes, ce qui eſt conforme aux obſervations de tous les tems. L'atmoſphère éprouve des mouvemens ſemblables, mais trop peu ſenſibles pour avoir encore été déterminés ; on y parviendra peut-être un jour, à l'aide d'inſtrumens plus parfaits, & en obſervant dans des lieux & dans des circonſtances favorables. Si le corps étranger qui attire un aſtre, répond conſtamment au-deſſus du même point de ſa ſurface, ſon action influe d'une maniere conſtante ſur la figure de l'aſtre qu'il attire ; telle eſt la poſition de la Terre relativement à la Lune, & l'on a quelques raiſons de ſoupçonner que la même diſpoſition a lieu généralement entre les planètes & leurs ſatellites. Il en réſulte un allongement dans le diamètre des ſatellites, qui prolongé, va rencontrer le centre de la planète principale, & relativement à la Lune ſuppoſée fluide & homogène, l'effet de l'action de la Terre ſur ſa figure eſt trois fois plus

grand que celui de ſon mouvement de rotation.

Ces légeres ellipticités de la figure des corps céleſtes les empêchent de s'attirer exactement, comme ſi leurs maſſes étoient réunies à leurs centres de gravité; les réſultantes de leurs attractions mutuelles paſſent à une petite diſtance de ces centres, & font un peu varier leurs mouvemens de rotation, & la poſition de leur équateur. Cette cauſe produit dans la Terre, les deux phénomènes connus ſous les noms de *préceſſion des équinoxes*, & *de mutation de l'axe terreſtre*; dans la Lune, elle fait coincider le moyen mouvement de rotation de ce ſatellite avec ſa révolution moyenne autour de la Terre, & la poſition moyenne des nœuds de ſon équateur avec ceux de ſon orbite; mais un réſultat très-important, & qui tend à maintenir l'ordre de cet Univers, eſt qu'au milieu de toutes les perturbations que les corps céleſtes éprouvent en vertu de leur action mutuelle, leurs moyens mouvemens de rotation & de révolution ſont inaltérables, dans les hypothèſes reçues ſur l'action de la peſanteur.

La gravitation de toutes les parties de la matiere a paru ſe manifeſter dans l'action des montagnes ſur les corps ſuſpendus à l'extrêmité d'un fil vertical; on a même eſſayé de déterminer par la déviation de ce fil, le rapport de la moyenne denſité de la Terre, à celle des corps pla-

cés à sa surface, & l'on a trouvé cette densité quatre fois & demie plus grande que celle de l'eau commune; mais les observations de ce genre sont si délicates, & dépendent de tant d'élémens si difficiles à bien connoître, que pour être assuré de leur exactitude, il est nécessaire de les répéter sur plusieurs montagnes. Dans les corps d'une grandeur peu considérable, la force attractive de la matière est insensible; elle reparoît dans leurs élémens sous une infinité de formes différentes, & avec une activité si grande, qu'il est difficile de croire que ce soit la même force qui fait graviter les corps célestes les uns vers les autres. La solidité des corps, leur crystallisation, la réfraction & la diffraction de la lumiere, l'élévation & l'abaissement des fluides dans les tubes capillaires, & généralement toutes les combinaisons chimiques sont le résultat de forces attractives dont les loix n'ont pas encore été bien déterminées. Leur connoissance est le principal objet de la Chimie, & ce ne sera qu'au moment où elles seront suffisamment observées pour y appliquer l'analyse, que cette science aura le degré de perfection auquel l'Astronomie s'est élevée par la découverte de la gravitation universelle. Aucun moyen ne paroît plus propre à cet objet, que l'équilibre entre les affinités des corps & la force répulsive de la chaleur; quelques expériences déja faites par cette méthode donnent lieu

d'eſpérer qu'un jour, les loix des affinités ſeront auſſi parfaitement connues que celles de la peſanteur.

Tel eſt le précis des découvertes que Newton & les Géometres de ce ſiècle ont faites dans l'Aſtronomie phyſique. Si l'on compare la grandeur des objets qu'elle embraſſe, avec la petiteſſe de l'homme & celle du globe qu'il habite; la grande variété des phénomènes céleſtes, avec la ſimplicité de la loi dont ils dérivent; ſi l'on conſidere d'ailleurs la profondeur des méthodes qu'il a fallu inventer pour ſoumettre ces phénomènes à l'analyſe, & l'accord toujours conſtant des réſultats du calcul avec les obſervations; on ſera forcé de reconnoître qu'aucune autre ſcience ne fait autant d'honneur à l'eſprit humain. Dans l'ignorance de la vraie conſtitution de cet Univers, l'homme ſéduit par les illuſions des ſens & de l'amour-propre, s'eſt regardé long-tems comme le centre du mouvement des aſtres, & ſon orgueil a été puni par les vaines frayeurs qu'ils lui ont inſpirées; en faiſant tomber le voile qui lui cachoit le ſyſtême du monde, il s'eſt vu loin du centre de l'Univers, placé ſur une planète preſque imperceptible dans la vaſte étendue du ſyſtême ſolaire qui lui-même n'eſt qu'un point inſenſible dans l'immenſité de l'eſpace; mais les connoiſſances ſublimes auxquelles il eſt parvenu ſur ces grands objets, ſont bien propres à le conſoler du

peu de place qu'il occupe dans la nature. Il ne s'agit point ici de ſyſtêmes enfantés par une imagination brillante, & démentis par l'expérience; les réſultats que nous venons de préſenter, ſont appuyés ſur les deux baſes des connoiſſances humaines, l'obſervation & le calcul, & le tems ne fera qu'ajouter aux preuves qui les établiſſent. La théorie du mouvement de la Terre en a reçu une confirmation nouvelle; la ſimplicité de cette théorie avoit entraîné la plupart des Aſtronomes en ſa faveur; mais la découverte du principe de la peſanteur univerſelle, l'a portée au plus haut degré d'évidence dont les ſciences phyſiques ſoient ſuſceptibles. On peut accroître de deux manieres, la probabilité d'une théorie; en diminuant le nombre des hypothèſes ſur leſquelles elle eſt fondée, & en augmentant le nombre des phénomènes qu'elle explique; or le principe de la peſanteur a procuré ces deux avantages à la théorie du mouvement de la Terre. Comme il en eſt une ſuite néceſſaire, il n'ajoute aucune ſuppoſition nouvelle à cette théorie; mais pour expliquer les mouvemens apparens des aſtres, Copernic admettoit trois mouvemens diſtincts dans la Terre, l'un autour du Soleil, un autre de révolution ſur elle-même, enfin un troiſieme mouvement des pôles de la Terre autour de ceux de l'écliptique; le principe de la peſanteur les fait tous

dépendre d'un ſeul imprimé à la Terre dans une direction qui ne paſſe pas par ſon centre d'inertie. En vertu de ce mouvement, elle tourne ſur elle-même & autour du Soleil; elle prend une figure applatie vers ſes pôles, & l'action du Soleil & de la Lune ſur cette figure, fait mouvoir l'axe de la Terre autour des pôles de l'écliptique. La découverte de ce principe a donc réduit au plus petit nombre poſſible, les ſuppoſitions ſur leſquelles Copernic fondoit ſa théorie. Elle a d'ailleurs l'avantage de lier cette théorie à tous les phénomènes aſtronomiques; ſans elle, l'ellipticité des orbites planétaires, les loix que les Planètes & les Comètes ſuivent dans leurs mouvemens autour du Soleil, leurs perturbations, les inégalités nombreuſes de la Lune & des Satellites de Jupiter, la préceſſion des équinoxes, la nutation de l'axe de la terre, la libration de la Lune, enfin le flux & le reflux de la mer, ne ſeroient que des réſultats de l'obſervation, iſolés entre-eux. C'eſt une choſe véritablement digne d'admiration, que de voir des phénomènes auſſi diſparates dériver tous d'une même loi qui les enchaîne au mouvement de la Terre, de maniere que ce mouvement étant une fois admis, on eſt conduit par une ſuite de raiſonnemens géométriques, à ces phénomènes. Chacun d'eux fournit donc une preuve de ſon exiſtence, & ſi l'on conſidére que ce ne ſont point des phénomènes particu-

liers qui laiſſent toujours lieu de douter ſi quelque effet non obſervé ne démentiroit pas la théorie qui les explique ; mais qu'il s'agit de la poſition & des mouvemens des corps céleſtes, à chaque inſtant & dans tout leur cours ; il ſera impoſſible de ſerefuſer à l'enſemble de ces preuves, & de ne pas convenir que rien n'eſt mieux démontré dans la Philoſophie naturelle, que le mouvement de la Terre, & la loi générale de la peſanteur en raiſon des maſſes, & réciproque au quarré des diſtances.

Maintenant, quelle eſt la cauſe de cette gravitation de toutes les parties de la matiere ? Par quelle force les Planètes ont-elles été primitivement lancées dans l'eſpace ? Ce ſont des queſtions que l'obſervation & la théorie n'ont pu réſoudre. Les mouvemens des corps céleſtes ne font connoître que la loi des forces qui les animent, & leurs vîteſſes primitives étant les conſtantes arbitraires qu'introduit l'intégration des équations différentielles de leurs orbites, l'obſervation ne peut que donner ces conſtantes, ſans indiquer les cauſes qui les ont déterminées. Ainſi nous manquons de moyens pour remonter à la cauſe de la peſanteur & à l'état primitif du ſyſtême de la Nature, & nous devons nous borner à examiner les effets qui réſultent de la diſpoſition préſente des corps céleſtes, & de la loi de leur gravitation mutuelle.

En considérant la maniere dont les Géomètres l'ont employée dans leurs théories, on voit qu'ils sont partis des deux suppositions suivantes, savoir, que la force de la pesanteur se répand instantanément dans l'espace, & qu'elle agit également sur les corps en repos, & sur ceux qui déja mus dans sa direction, semblent se soustraire en partie à son activité. Ces deux hypothèses sont très-approchées, mais il y a tout lieu de présumer qu'elles ne sont pas rigoureuses. Ce qui se transmet dans l'espace, paroissant devoir répondre successivement à ses différens points, une communication instantanée est peu vraisemblable. Nous n'avons cependant aucun moyen pour mesurer la durée de la propagation de la pesanteur, parce que l'attraction du Soleil ayant une fois atteint les Planètes, cet astre continue d'agir sur elles, comme si sa force attractive se communiquoit dans un instant aux extrêmités du système planétaire; le tems qu'elle peut employer à parvenir à la Terre, est donc présentement insensible. Il n'en est pas ainsi de la petite différence qui probablement existe dans l'action de la pesanteur sur les corps, suivant la nature de leurs mouvemens. Le calcul m'a fait voir qu'il en résultoit une accélération dans les moyens mouvemens des Planètes autour du Soleil, & des Satellites autour de leurs Planètes prin-

cipales ; les obſervations paroiſſent l'indiquer dans le moyen mouvement de la Lune, quoiqu'elle ſoit inexplicable dans les hypothèſes reçues ſur l'action de la peſanteur ; & ſi l'équation ſéculaire dont M. Mayer a fait uſage dans ſes Tables de la Lune, eſt véritable & dûe à la cauſe précédente, je trouve qu'il faudroit ſuppoſer à ce ſatellite, pour ſe ſouſtraire entiérement à ſa peſanteur vers la Terre, une vîteſſe vers le centre de cette Planète, ſept millions de fois environ plus grande que celle de la lumiere. Cette activité prodigieuſe de la peſanteur a de quoi nous ſurprendre, & il eſt bien certain qu'elle ne peut être moindre, puiſqu'elle ſeroit infinie, ſi l'équation ſéculaire de la Lune n'exiſtoit pas, ou ſi elle étoit produite par d'autres cauſes. C'eſt au tems ſeul à nous inſtruire ſur cet objet intéreſſant, & ſur tous ceux qui dépendent des inégalités ſéculaires des mouvemens céleſtes ; car les obſervations les plus anciennes qui nous ſoient parvenues, ne remontent pas au-delà de trois mille ans, & il n'y a guère qu'un ſiècle, que l'on apporte dans la maniere d'obſerver, la préciſion néceſſaire pour déterminer des élémens auſſi délicats.

Une des propriétés les plus remarquables de la loi de peſanteur qui a lieu dans la Nature, eſt de terminer les orbites des corps céleſtes par des lignes du ſecond ordre, & leurs figures par des ſurfaces du ſecond ordre,

du moins lorſqu'on fait abſtraction des petites inégalités qui troublent leurs mouvemens & leurs figures. Cette propriété m'a fait naître depuis long-tems l'idée d'expoſer dans un ouvrage particulier, les principaux réſultats du mouvement & de la figure elliptiques des Planètes; mais entraîné par d'autres occupations, j'aurois entiérement renoncé à ce travail, ſans le déſir qu'un Magiſtrat * également diſtingué par ſon rang, par ſa naiſſance, & par ſes lumieres, m'a témoigné pluſieurs fois, de voir les propriétés des mouvemens elliptiques & paraboliques, déduites de la ſeule conſidération des équations différentielles du ſecond ordre qui déterminent à chaque inſtant, le mouvement des corps céleſtes autour du Soleil. C'eſt uniquement dans la vue de ſatisfaire un Amateur auſſi éclairé des ſciences & en particulier de l'Aſtronomie, que j'ai compoſé le Traité ſuivant; il l'a fait imprimer dans la perſuaſion qu'il pourroit intéreſſer les Géomètres & les Aſtronomes; je déſire qu'ils accueillent avec la même indulgence, cet Ouvrage qui ſans la circonſtance dont je viens de parler, n'auroit jamais vu le jour.

Il eſt diviſé en deux Parties: dans la premiere, je remonte des équations différentielles du mouvement des Planetes, à la nature de ce mouvement & des orbites qu'elles

* M. de Saron, Préſident du Parlement, Honoraire de l'Académie Royale des Sciences.

décrivent; je fais voir comment leurs élémens naiſſent de l'intégration ſucceſſive de ces équations. Je donne enſuite les moyens de déterminer par approximation, le mouvement elliptique, dans les deux cas d'une ellipſe très-excentrique, & d'une ellipſe preſque circulaire, ce qui embraſſe toute la théorie du mouvement des Planètes & des Comètes. Les élémens des orbites des Planètes étant altérés par leur action mutuelle, je préſente leurs variations ſéculaires ſous la forme la plus ſimple qu'elles puiſſent avoir. J'expoſe enſuite les élémens de la Planète que M. Herſchel vient de découvrir; ce ſont les mêmes que j'ai communiqués à l'Académie des Sciences & aux Aſtronomes, dans le mois de Janvier de 1782, à la longitude près du nœud de l'orbite & à ſon inclinaiſon que j'ai depuis rectifiées au moyen d'une obſervation très-intéreſſante de cette Planète, faite par M. Mayer en 1756. Le fameux problême de la détermination des orbites des Comètes eſt un des objets les plus intéreſſans de la théorie du mouvement elliptique, & le plus compliqué de tous. J'en donne une ſolution nouvelle qui me conduit à une méthode ſimple & uſuelle pour déterminer leurs élémens: pour en faciliter l'uſage, je préſente l'application que M. Mechain en a faite à la ſeconde des deux Comètes qu'il a découvertes en 1781. Enfin je termine cette Partie, par la démonſtration d'un

théorême général & intéreſſant ſur le mouvement elliptique, & par la méthode de déterminer les maſſes des Planètes qui ont des ſatellites.

La ſeconde Partie de cet Ouvrage, eſt uniquement deſtinée aux Géomètres. Je commence par expoſer une théorie complette des attractions des ſphéroïdes elliptiques, ſur des points quelconques. On avoit déja déterminé ces attractions, dans le cas où ces points ſont placés dans l'intérieur ou à la ſurface des ſphéroïdes ; mais lorſque le point attiré eſt ſitué au-dehors, toutes les méthodes connues donnent l'expreſſion de l'attraction des ſphéroïdes, ſous la forme d'une double intégrale définie qu'il ſeroit très-difficile de ramener à une ſimple intégrale, & beaucoup plus encore de réduire à une expreſſion finie. Je parviens dans tous les cas, au moyen d'un uſage aſſez remarquable de la théorie des différences partielles, à faire dépendre l'attraction d'un ſphéroïde ſur un point quelconque ſitué au-dehors, de celle d'un nouveau ſphéroïde dont la ſurface paſſeroit par ce point, & qui auroit le même centre, la même poſition des axes, & les mêmes excentricités que le premier. Je donne enſuite les expreſſions des attractions d'un ſphéroïde elliptique, ſur un point placé à ſa ſurface ou dans ſon intérieur, & je fais voir qu'il eſt impoſſible de les ramener à une forme plus ſimple, enſorte que la

théorie des attractions des sphéroïdes elliptiques sur des points quelconques, est réduite par ces recherches, à la plus grande simplicité dont elle est susceptible. Cette théorie me conduit à déterminer la figure des sphéroïdes elliptiques homogènes en équilibre; pour y parvenir, je considère généralement les loix de l'équilibre d'une masse fluide sollicitée par des forces quelconques, & je démontre que si ces forces sont produites par la force centrifuge du mouvement de rotation de cette masse supposée homogène, par l'attraction des ses propres molécules, & par celle d'un nombre quelconque de corps très-éloignés; elle pourra être en équilibre avec un figure elliptique dont je détermine la nature & la loi de pesanteur qui a lieu à sa surface. Cette analyse appliquée à la Lune supposée fluide & homogène, donne l'allongement de son diamètre dirigé vers la Terre, quatre fois plus grand que celui du diamètre de son équateur, qui lui est perpendiculaire. En supposant ensuite que tous les corps étrangers disparoissent & que la masse fluide soit uniquement sollicitée par l'attraction de ses parties & par la force centrifuge de son mouvement de rotation, je fais voir qu'il y a toujours pour un mouvement de rotation donné, deux figures elliptiques & non davantage, qui satisfont à l'équilibre; que la durée de la rotation a une limite au-delà de la-

quelle l'équilibre eſt impoſſible avec une figure elliptique ; que relativement aux maſſes de même denſité que la Terre, cette limite eſt de 2 heures 25′ 17″, enſorte que l'équilibre ne peut ſubſiſter avec une durée moindre ; enfin que cette limite augmente comme la racine quarrée du rapport de la moyenne denſité de la Terre à celle de la maſſe fluide.

Lorſqu'une maſſe fluide a un mouvement de rotation plus rapide que celui qui convient à l'équilibre, elle doit en s'allongeant vers l'Equateur, diminuer ſa vîteſſe de rotation ; & l'on conçoit que s'il exiſte, comme dans tous les fluides connus, une force d'adhérence entre ſes molécules, elle ſe fixera après un grand nombre d'oſcillations, à une figure elliptique avec laquelle l'équilibre pourra ſubſiſter. Je parviens à déterminer généralement cette figure, & le mouvement de rotation quelle finira par prendre, quelle qu'ait été d'ailleurs l'impulſion primitive donnée au fluide.

La figure elliptique ne doit être conſidérée que comme une ſolution particuliere du problême général où l'on ſe propoſe de déterminer toutes les figures avec leſquelles une maſſe fluide homogène qui tourne ſur elle-même, & dont toutes les parties s'attirent, peut être en équilibre. Je réprends *à priori* ce problême, & pour le ſimplifier, je ſuppoſe conformément à ce qui a

lieu dans la Nature, la figure du ſphéroïde, infiniment peu différente de la ſphère. Quoique cette conſidération rende le problême incomparablement plus ſimple, je n'ai pu cependant le réſoudre encore ; mais je ſuis parvenu à un théorême intéreſſant ſur les attractions d'un ſphéroïde quelconque, l'attraction étant comme une puiſſance indéfinie de la diſtance : ce théorême donne immédiatement la loi de la peſanteur à la ſurface des ſphéroïdes homogènes en équilibre dont toutes les parties ſont animées par des forces quelconques très-petites, ce qui eſt d'autant plus remarquable, que la figure de ces ſphéroïdes, dont cette loi paroît dépendre, reſte inconnue.

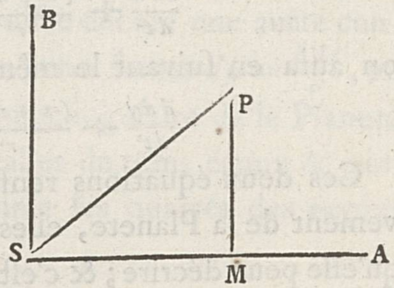
Enfin, je termine cette Partie, par la recherche des loix de peſanteur dans leſquelles une ſphère attire les points ſitués au-dehors, comme ſi toute ſa maſſe étoit réunie à ſon centre. Cette propriété qui convient à la loi de la Nature, contribue à la ſimplicité des mouvemens céleſtes; elle appartient encore à la loi de peſanteur proportionelle à la ſimple diſtance, & à toutes les loix compoſées dont l'expreſſion eſt une fonction linéaire de cette loi de peſanteur & de celle de la Nature.

PREMIERE

PREMIERE PARTIE.

Théorie du mouvement elliptique des Planetes.

I.



SOIT S le centre du Soleil; P, celui de la Planete; SA, & SB, deux droites perpendiculaires l'une à l'autre dans le plan du mouvement relatif de la Planete autour du Soleil. En abaissant PM, perpendiculairement sur SA, soit $SM = x$, $PM = y$, & $SP = r$; cela posé,

La force avec laquelle le Soleil & la Planete tendent à se réunir, est égale à la force attractive du Soleil sur la Planete, plus à celle de la Planete sur le Soleil; ensorte que si l'on nomme 1, la masse du Soleil, & m, la masse de la Planete, on aura $\frac{1+m}{r^2}$, pour la force qui sollicite la Planete vers le Soleil supposé immobile, & qui par conséquent la fait circuler autour de cet astre. Cette force décomposée suivant SA, sera $\frac{(1+m).x}{r^3}$; & suivant SB, ou PM, elle sera $\frac{(1+m).y}{r^3}$.

A

Maintenant, ſi l'on nomme dt, l'élément du tems; la vîteſſe de la Planete parallélement aux x, ſera $\frac{dx}{dt}$. Sans la force qui ſollicite continuellement la Planete, cette vîteſſe ſeroit conſtante; mais la force $\frac{(1+m).x}{r^3}$, y produit une variation d'autant plus grande, qu'elle agit plus long-tems; ainſi pour avoir cette variation pendant l'inſtant dt, il faut multiplier $\frac{(1+m).x}{r^3}$ par dt; mais comme la force agit en ſens contraire des x, & tend à les diminuer, il faut lui donner le ſigne —; on aura de cette maniere, $-\frac{(1+m).x.dt}{r^3}$ pour la variation de la vîteſſe $\frac{dx}{dt}$, ou, ce qui revient au même, pour $d.\frac{dx}{dt}$, donc $d.\frac{dx}{dt} = -\frac{(1+m)x.dt}{r^3}$; & par conſéquent, ſi l'on regarde l'élément du tems comme conſtant, on aura,

$$\frac{ddx}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} = 0; \quad (1)$$

on aura en ſuivant le même procédé,

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{(1+m).y}{r^3} = 0; \quad (2)$$

Ces deux équations renferment toute la théorie du mouvement de la Planete, elles ont lieu pour toutes les courbes qu'elle peut décrire; & c'eſt de leurs intégrations ſucceſſives, que nous allons voir naître les élémens qui déterminent l'orbite de cette Planete.

II.

Si l'on multiplie d'abord l'équation (1) par ydt^2, & qu'on la retranche enſuite de l'équation (2) multipliée par xdt^2, on aura la ſuivante

$$0 = xddy - yddx$$

dont l'intégrale eſt

$$xdy - ydx = hdt; \quad (3)$$

h, étant une constante arbitraire ; c'est ce dont il est facile de s'assurer par la différentiation.

Soit φ, l'angle PSM, on aura $x = r$ cos. φ ; & $y = r$ sin. φ ; d'où l'on tire

$$dx = dr.\ \text{cos}.\ \varphi - r\,d\varphi.\ \text{sin}.\ \varphi$$
$$dy = dr.\ \text{sin}.\ \varphi + r\,d\varphi.\ \text{cos}.\ \varphi$$

partant

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\varphi = h\,dt.$$

Or, $r^2\,d\varphi$, est le double de la petite surface que trace le rayon vecteur r, durant l'élément de tems dt ; cette surface est donc proportionelle au tems ; & par conséquent l'aire décrite par le rayon vecteur de la Planete, croît proportionnellement au tems, ce qui est la premiere loi de Kepler.

L'équation $r^2\,d\varphi = h\,dt$, nous offre encore une autre conséquence ; car en la mettant sous cette forme $d\varphi = \frac{h\,dt}{r^2}$, on voit que les variations du mouvement angulaire de la Planete autour du Soleil, dans des intervalles de tems égaux & très-petits, sont réciproquement comme les quarrés des rayons vecteurs.

III.

Reprenons maintenant les équations (1) & (2) ; en multipliant la premiere par dx, & en l'ajoutant à la seconde multipliée par dy, on aura,

$$0 = \frac{dx.ddx + dy.ddy}{dt^2} + \frac{(1+m)}{r^3}.(x\,dx + y\,dy)$$

Or on a $x^2 + y^2 = r^2$, ce qui donne $x\,dx + y\,dy = r\,dr$; l'équation précédente devient ainsi

$$0 = \frac{dx.ddx + dy.ddy}{dt^2} + (1+m).\frac{dr}{r^2}$$

équation dont l'intégrale eſt

$$\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2} - \frac{(1+m)}{r} = f;\ (4)$$

f étant une conſtante arbitraire. Les équations différentielles du ſecond ordre (1) & (2), ſe trouvent ainſi ramenées aux équations différentielles (3) & (4) du premier ordre, ce qui a introduit deux conſtantes arbitraires f & h, qui ſont fonctions des élémens de l'orbite de la Planete. Voyons maintenant s'il n'eſt pas encore poſſible de ramener les équations (3) & (4) à des équations finies.

I V.

Pour cela, nous prendrons au lieu de l'équation (3) ſon équivalente $r^2.d\varphi = h\,dt$; ou $dt = \frac{r^2.d\varphi}{h}$. Nous obſerverons enſuite que $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2$, & qu'ainſi, $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{h^2\,dr^2}{r^4.d\varphi^2} + \frac{h^2}{r^2}$; l'équation (4) deviendra conſéquemment

$$\frac{h^2.dr^2}{2r^4.d\varphi^2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{(1+m)}{r} = f$$

partant

$$d\varphi = \frac{h.dr}{r^2\sqrt{2f + \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

ſoit $r = \frac{1}{u}$, on aura $-du = \frac{dr}{r^2}$, ce qui change l'équation précédente dans celle-ci,

$$d\varphi = \frac{-h.du}{\sqrt{2f + 2.(1+m).u - h^2u^2}};$$

Si l'on ſuppoſe $u = \grave{u} + \frac{(1+m)}{h^2}$, & $q^2 = \frac{2f}{h^2} + \frac{(1+m)^2}{h^4}$, on aura

$$d\varphi = \frac{-d\grave{u}}{\sqrt{q^2 - \grave{u}^2}},$$

l'intégrale du premier membre de cette équation eſt, $\varphi + A$, A étant une conſtante arbitraire. L'intégrale de $\frac{-d\grave{u}}{\sqrt{q^2-\grave{u}^2}}$ eſt, ang.

cos. $\frac{\dot{u}}{q}$; donc $\varphi + A =$ ang. cos. $\frac{\dot{u}}{q}$, c'est-à-dire $\frac{\dot{u}}{q} = \text{cos.}(\varphi + A)$;
partant $\dot{u} = q \,.\, \text{cos.}(\varphi + A) = u - \frac{1+m}{h^2} = \frac{1}{r} - \frac{(1+m)}{h^2}$; d'où l'on tire

$$r = \frac{1}{\frac{1+m}{h^2} + q \,.\, \text{cos.}(\varphi + A)} \quad (5)$$

V.

Si l'on nomme r, le rayon vecteur mené d'un des foyers d'une section conique à la courbe ; v, l'angle que fait ce rayon avec la partie de l'axe comprise entre le foyer & le sommet le plus voisin ; $e\,a$, l'excentricité ; on a généralement

$$r = \frac{a\,.\,(1 - e^2)}{1 + e\,.\,\text{cos.}\,v}$$

en observant de faire $e = 1$, pour la parabole ; a négatif & $e > 1$, pour l'hyperbole. La comparaison de cette équation avec l'équation (5) donnera

$$\varphi + A = v$$

$$\frac{1+m}{h^2} = \frac{1}{a\,.\,(1 - e^2)} ; \; q = \frac{e}{a\,.\,(1 - e^2)}.$$

Les deux dernieres équations donnent

$$e = \frac{h^2 \,.\, q}{1+m}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{(1+m)\,.\,(1 - e^2)}{h^2} = \frac{(1+m)\,.}{h^2}\left\{1 - \frac{h^4 \,.\, q^2}{(1+m)^2}\right\} = \frac{-2f}{1+m},$$

en substituant au lieu de q^2, sa valeur $\frac{2f}{h^2} + \frac{(1+m)^2}{h^4}$. On aura ainsi le grand axe & l'excentricité, en fonctions des constantes arbitraires f & h.

Réciproquement, on aura f & h, en fonctions de a & de e ; car on a d'abord

$$f = -\frac{(1+m)}{2a} ;$$

ensuite, l'équation $e = \frac{h^2\, q}{1+m}$, donne $e^2 = \frac{h^4 \,.\, q^2}{(1+m)^2}$; d'où l'on

tire, en ſubſtituant au lieu de q^2, ſa valeur,

$$e^2 = \frac{2fh^2}{(1+m)^2} + 1;$$

partant

$$h^2 = \frac{(e^2-1).(1+m)^2}{2f} = (1+m).(1-e^2).a$$

l'équation (4) devient ainſi

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} = 0; \quad (6)$$

l'équation $r^2\,d\varphi = h\,dt$, devient

$$r^2 d\varphi = dt.\sqrt{(1+m).(1-e^2).a}; \quad (7)$$

l'équation (6) donne en y ſubſtituant $dr^2 + r^2 d\varphi^2$, au lieu de dx^2+dy^2,

$$r^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2(1+m)}{r} - \frac{(1+m)}{a} - \frac{dr^2}{dt^2}$$

& ſi l'on ſubſtitue au lieu de $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ ſa valeur $\frac{(1+m).(1-e^2).a}{r^4}$ tirée de l'équation (7) on aura,

$$(1-e^2).a = 2r - \frac{r^2}{a} - \frac{r^2.dr^2}{(1+m).dt^2}; \quad (8)$$

$(1-e^2).a$, étant le demi-parametre de la ſection conique. Enfin on a

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)}; \quad (9)$$

a, étant le demi-grand axe de la ſection conique; ea, ſon excentricité, & A étant l'angle que fait le grand axe avec l'axe des abſciſſes.

V I.

Il ſuit de l'analyſe précédente que la Planete décrit une ſection conique dont le Soleil occupe un des foyers, *ce qui eſt la ſeconde loi de Kepler*. Examinons préſentement dans quels cas, cette ſection eſt une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole.

Pour cela, concevons un corps de même maſſe que la Planete, & ſe mouvant autour du Soleil, dans une orbe circulaire, à une diſtance que nous prendrons pour unité de

distance ; on aura dans cette hypothèse $e = 0$, $a = r = 1$; & si l'on nomme ensuite dz, l'arc différentiel que ce corps décrit durant l'instant dt, l'équation (7), donnera en y changeant $d\varphi$ en dz,

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1 + m} ;$$

mais $\frac{dz}{dt}$, est la vîtesse réelle de ce corps ; en nommant donc μ, cette vîtesse on aura,

$$1 + m = \mu^2.$$

Maintenant, si dans l'équation (6) on observe que $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ exprime le quarré de la vîtesse de la Planete, & que l'on désigne par V, cette vîtesse ; on aura en substituant μ^2, au lieu de $1 + m$,

$$V^2 = \mu^2 . \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Dans l'ellipse a, est positif, il est infini dans la parabole, & négatif dans l'hyperbole ; ainsi dans la premiere courbe, on a $V < \mu \sqrt{\frac{2}{r}}$; dans la seconde courbe, $V = \mu \sqrt{\frac{2}{r}}$, & dans la troisieme, on a $V > \mu . \sqrt{\frac{2}{r}}$. La section décrite par la Planete, sera donc ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant que l'on aura $V <=> \mu \sqrt{\frac{2}{r}}$, & il est remarquable que la direction du mouvement primitif de la Planete, n'influe point sur l'espece de la section conique qu'elle décrit.

Il suit encore de ce qui précéde, qu'à la même distance du Soleil, les vîtesses sont moindres dans l'ellipse, & plus grandes dans l'hyperbole, que dans la parabole.

Si l'on suppose que la Planete se meut dans un cercle, à la distance r du Soleil ; l'équation trouvée ci-dessus entre V & μ donnera en y changeant a en r,

$$V = \mu . \sqrt{\frac{1}{r}} :$$

d'où il ſuit que les vîteſſes dans des cercles différens, ſont réciproquement comme les racines quarrées de leurs rayons. Dans la parabole, $V = \mu . \sqrt{\frac{2}{r}}, = \mu \sqrt{\frac{1}{r}} . \sqrt{2}$; ainſi 1° dans les différens points de cette courbe, les vîteſſes ſont réciproques aux racines quarrées des rayons vecteurs; 2° la vîteſſe de la Planete eſt à celle qu'elle auroit, ſi elle décrivoit un cercle dont le rayon fût égal à ſon rayon vecteur r, comme $\sqrt{2}$, eſt à l'unité.

V I I.

Reprenons l'équation,

$$V^2 = \mu^2 . \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

& ſuppoſons qu'à l'origine du mouvement, on ait $V = 0$, auquel cas la Planete tombe en ligne droite vers le Soleil; on aura à cette origine $\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = 0$, ou $\frac{1}{a} = \frac{2}{r}$; ſuppoſons enſuite que parvenue à la diſtance r' du Soleil, elle ait acquis la vîteſſe V', on aura

$$V'^2 = \mu^2 \left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a}\right) = 2\mu^2 \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

c'eſt l'expreſſion générale du quarré de la vîteſſe de la Planete, ſi en partant de la diſtance r du Soleil, elle tombe en ligne droite de la hauteur $r - r'$. En l'égalant à la quantité $\mu^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ qui exprime le quarré de la vîteſſe de la Planete à l'extrêmité du rayon r, lorſqu'elle ſe meut dans une ſection conique dont a eſt le demi-grand axe, on aura

$$\frac{2}{r'} - \frac{2}{r} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a};$$

d'où l'on tire

$$r - r' = \frac{r . (2a - r)}{4a - r}.$$

On a aux deux ſommets de l'ellipſe, $r = a(1 \pm e)$, le ſigne ſupérieur étant

étant relatif à l'aphélie, & le ſigne inférieur, au périhélie; donc à ces points

$$r - r' = \frac{a.(1-e^2)}{3 \mp e}$$

d'où il ſuit que la vîteſſe de la Planete dans ces deux points, eſt égale à celle qu'elle acquerroit en tombant en ligne droite de ces points vers le Soleil, de la hauteur $\frac{a(1-e^2)}{3 \mp e}$.

En faiſant $e = 0$, on voit que la vîteſſe de la Planete dans le cercle dont le rayon eſt a, eſt égale à celle qu'elle acquerroit en partant de cette diſtance, & en tombant vers le Soleil d'une hauteur égale au tiers du rayon.

Si l'on fait $a = \infty$, on aura généralement $r - r' = \frac{1}{2} r$; donc la vîteſſe de la Planete à un point quelconque de la parabole, eſt égale à celle qu'elle acquerroit, ſi en partant de ce point, elle tomboit vers le Soleil, de la hauteur $\frac{1}{2} r$, ou de la moitié de ſa diſtance à cet aſtre.

VIII.

Juſqu'ici nous n'avons qu'une équation finie, pour déterminer le mouvement de la Planete, ſavoir l'équation (9). Pour en trouver une ſeconde, nous obſerverons que l'équation (7) donne en y ſubſtituant au lieu de r, ſa valeur tirée de l'équation (9),

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}.(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}} \cdot \frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2}$$

partant

$$t + C = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}} \cdot \int \frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2}$$

C, étant une conſtante arbitraire. Il ne s'agit plus maintenant que d'intégrer la fonction différentielle $\frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2}$.

Pour y parvenir, ſoit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varpi = k\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}.(\varphi + A);$$

on a, comme l'on ſait,

$$\tfrac{1}{2}.d\varphi = \frac{d.\text{tang.}\ \frac{1}{2}.(\varphi+A)}{1+\text{tang.}\ \frac{1}{2}(\varphi+A)^2} = \frac{\frac{1}{k}.d\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\varpi}{1+\frac{1}{k^2}\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\varpi^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}k.d\varpi}{1+(k^2-1).\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2};$$

on a enſuite

$$1+e.\text{coſ.}(\varphi+A) = 1-e+2e.\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(\varphi+A)^2.$$

& l'équation $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\varpi = k.\text{tang.}\ \frac{1}{2}(\varphi+A)$, donne

$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}.(\varphi+A)^2 = \frac{k^2.\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2}{1+(k^2-1).\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2}$$

donc

$$1+e.\text{coſ.}(\varphi+A) = \frac{1-e+[k^2.(1+e)+e-1].\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2}{1+(k^2-1).\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2};\ (\mu)$$

& par conſéquent

$$\frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2} = \frac{k.d\varpi.[1+(k^2-1).\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2]}{[1-e+[k^2.(1+e)+e-1].\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varpi^2]^2}.$$

Comme nous ſommes libres de diſpoſer de k, à volonté, nous le ſuppoſerons tel que l'on ait, $k^2.(1+e)+e-1=0$, ce qui donne

$$k = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

& nous aurons après toutes les réductions

$$\frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2} = \frac{d\varpi.[1-e.\text{coſ.}\ \varpi]}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

& en intégrant

$$\int \frac{d\varphi}{[1+e.\text{coſ.}(\varphi+A)]^2} = \frac{\varpi - e.\text{ſin.}\ \varpi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

partant $t+C = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}}.[\varpi - e.\text{ſin.}\ \varpi];$ (10)

ϖ étant donné en φ, au moyen de l'équation,

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}.\varpi = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}.(\varphi+A) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}.v;$$

$\varphi + A$, ou v, étant la diſtance angulaire de la Planete à ſon périhélie.

Nous voilà donc parvenus à deux équations finies (9) & (10), qui ſont les intégrales complettes des équations différentielles (1) & (2). On voit que les intégrations ſucceſſives ont introduit quatre conſtantes arbitraires a, e, A & C; comme cela doit être.

Les deux premieres ſont données par les deux premieres intégrations, & déterminent la nature de la ſection conique; la troiſieme détermine ſa poſition, & la quatrieme détermine la poſition primitive de la Planete ſur cette courbe.

Suppoſons que la courbe ſoit rentrante ou elliptique; que φ croiſſe de 360°, & par conſéquent que $\frac{1}{2}(\varphi + A)$ croiſſe de 180°: il eſt aiſé de voir que ϖ croîtra pareillement de 360°. Soit T, l'accroiſſement correſpondant de t; l'équation (10) donnera

$$t + T + C = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}} . [\varpi + 360° - e . \sin. \varpi];$$

en retranchant de cette équation, l'équation (10), on aura

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}} . 360°}{\sqrt{1+m}}.$$

C'eſt l'expreſſion du tems que la Planete emploie à revenir au même point; ou, ce qui revient au même, du tems de ſa révolution.

Donc ſi l'on ſuppoſe pluſieurs Planetes dont les maſſes ſoient m, m', m'', &c. mues dans des ellipſes dont les demi-grands axes ſoient a, a', a'', &c. & que l'on nomme T, T', T'', &c. les tems de leurs révolutions; on aura, en négligeant leur action réciproque les unes ſur les autres,

$$T : T' : T'' : \&c :: \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}} : \frac{a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m'}} : \frac{a''^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m''}} : \&c.$$

partant, si l'on suppose les masses m, m', m'', &c. infiniment petites, ou nulles, relativement à celle du Soleil; on aura,

$$T^2 : T'^2 : T''^2 : \&c. :: a^3 : a'^3 : a''^3 : \&c.$$

c'est-à-dire, que les quarrés des tems des révolutions seront comme les cubes des demi-grands axes, ou des moyennes distances des Planetes au soleil; ce qui est la troisieme loi de Kepler. Cette loi est fort approchée dans notre systême planétaire; mais l'action des Planetes les unes sur les autres & sur le Soleil, empêche qu'elle ne soit rigoureuse.

I X.

Supposons que l'origine des ϖ soit au périhélie, & que l'on prenne pour l'origine du tems t, l'instant du passage de la Planete par ce point; l'équation (10) donnera en y faisant $m = 0$,

$$t = a^{\frac{3}{2}} . (\varpi - e \text{ sin. } \varpi); \quad (11)$$

on aura ensuite

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} \varpi = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} . \text{tang. } \tfrac{1}{2} . v; \quad (12)$$

v étant la distance angulaire de la Planete, au périhélie; enfin on aura

$$r = \frac{a . (1 - e^2)}{1 + e . \text{cos}. v}.$$

On peut avoir une autre expression de r, en observant que l'équation (μ) de l'article précédent donne, en y changeant $\varphi + A$, en v, & en y substituant au lieu de k^2, sa valeur,

$$1 + e . \text{cos}. v = \frac{1 - e^2}{1 - e . \text{cos}. \varpi};$$

d'où l'on tire

$$r = a . (1 - e . \text{cos}. \varpi); \quad (13).$$

Les équations (11), (12) & (13) renferment toute la théorie du mouvement elliptique, & il est facile de s'assurer que

l'angle, ϖ, eſt ce que les Aſtronomes ont nommé *Anomalie excentrique*. Le tems t, les angles ϖ & v, & la diſtance rectiligne a, étant des quantités hétérogènes, l'uſage des équations précédentes pourroit préſenter quelques difficultés; mais on doit obſerver que ſi l'on imagine une ſeconde Planete mue dans un cercle dont le rayon ſoit pris pour unité de diſtance, les équations (11) & (12) donneront en y faiſant $e = 0$, $a = 1$;

$$t = v.$$

On pourra donc au lieu du tems t, ſubſtituer l'angle que décrit cette ſeconde Planete autour du Soleil; la diſtance a, ne ſera plus alors qu'un nombre abſtrait qui exprimera le rapport du demi-grand axe de l'ellipſe, à la diſtance que l'on a priſe pour unité de diſtance. De cette maniere, il ne reſtera dans les équations précédentes, que des quantités homogènes & comparables entre elles.

Lorſque l'angle v, ou l'anomalie vraie ſera donnée, il ſera facile d'en conclure le tems t, & le rayon vecteur correſpondant; car l'équation (12) donnera l'angle ϖ, au moyen de l'angle v; & les équations (11) & (13) donneront t & r, au moyen de l'angle ϖ; mais ſi le tems t, ou ce qui revient au même, ſi l'anomalie moyenne étoit donnée, il ſeroit impoſſible d'avoir directement l'angle v, & le rayon vecteur; car il faudroit au moyen de l'équation (13) avoir directement la valeur de ϖ en t, ce qui ne ſe peut, l'équation dont il s'agit étant tranſcendante. On pourra cependant avoir fort aiſément cette valeur, par des eſſais, ou par la méthode des ſuites; ce dernier moyen eſt d'autant plus praticable relativement aux corps céleſtes, que leurs orbites ſont ou preſque circulaires, ou fort excentriques; dans l'un & l'autre cas, on peut avoir par

des ſuites très-convergentes, les valeurs de ϖ & de r, lorſque t eſt donné ; c'eſt ce que nous allons développer dans les articles ſuivans.

X.

Pour y parvenir plus facilement, voici quelques théoremes généraux ſur le développement des fonctions en ſéries, théoremes qui ſont d'un grand uſage dans les applications de l'analyſe.

Suppoſons que l'on ſe propoſe de développer une fonction quelconque u de e, ſuivant les puiſſances de e; on aura une ſérie de cette forme

$$u = q + e \,.\, q^{(1)} + e^2 \,.\, q^{(2)} + e^3 \,.\, q^{(3)} + \&c.$$

q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, &c. étant des quantités indépendantes de e, qu'il faut déterminer. Or il eſt viſible d'abord qu'en faiſant $e = 0$, on aura $u = q$; d'où il ſuit que q eſt ce que devient u, lorſqu'on y fait $e = 0$; on aura enſuite en différentiant l'équation précédente, n fois de ſuite par rapport e,

$$\frac{d^n \,.\, u}{de^n} = 1.2.3\ldots n \,.\, q^{(n)} + 2.3\ldots\overline{n+1} \,.\, e \,.\, q^{(n+1)} + \&c;$$

on aura donc en ſuppoſant $e = 0$, $q^{(n)} = \frac{d^n \,.\, u}{1.2.3\ldots n \,.\, de^n}$. Cette équation ayant lieu quelque ſoit n, on aura $q^{(1)} = \frac{du}{de}$, pourvu que l'on ſuppoſe $e = 0$, dans cette derniere quantité ; on aura pareillement & dans la même ſuppoſition $q^{(2)} = \frac{d^2 u}{1.2.de^2}$; $q^{(3)} = \frac{d^3 u}{1.2.3.de^3}$: &c. partant, ſi l'on déſigne par U, $\frac{dU}{de}$, $\frac{d^2 U}{de^2}$, &c. ce que deviennent u, $\frac{du}{de}$, $\frac{d^2 \,.\, u}{de^2}$, &c. lorſqu'on y fait $e = 0$, on aura

$$u = U + e \,.\, \frac{dU}{de} + \frac{e^2}{1.2} \,.\, \frac{d^2 U}{de^2} + \frac{e^3}{1.2.3} \,.\, \frac{d^3 U}{de^3} + \&c. \quad (a)$$

u étant ſuppoſé être fonction de pluſieurs variables ϖ, e, t,

&c. si l'on représente sa différentielle pas $p\,d\varpi + q\,de + r\,dt +$ &c. il est clair que $p\,d\varpi$ sera la différentielle de cette fonction, prise en ne faisant varier que ϖ; que $q\,de$ sera sa différentielle prise en ne faisant varier que e, &c. On exprime communément p, par $\left(\frac{du}{d\varpi}\right)$; q, par $\left(\frac{du}{de}\right)$; &c. ensorte que $\left(\frac{du}{d\varpi}\right)$, désigne le coëfficient de $d\varpi$, dans la différentielle de u, ou ce qui revient au même, la différence de u, prise en ne faisant varier que ϖ, & divisée par $d\varpi$; par cette raison, on la nomme *différence partielle*, & les équations qui renferment de semblables différences, sont ce que l'on apppelle, *équations aux différences partielles*. Cela posé.

Soit $u = \varphi.(\varpi + e)$, $\varphi\,(\varpi + e)$ étant une fonction quelconque de $\varpi + e$; on aura évidemment $\left(\frac{du}{d\varpi}\right) = \left(\frac{du}{de}\right)$ & généralement, $\left(\frac{d^n . u}{d\varpi^n}\right) = \left(\frac{d^n . u}{de^n}\right)$, c'est-à-dire que la différence n^{ieme} de u, prise par rapport à ϖ, & divisée par $d\varpi^n$, est égale à la différence n^{ieme} de cette variable, prise par rapport à e, & divisée par de^n; or on a dans la supposition de $e = 0$, $\left(\frac{d^n u}{d\varpi^n}\right) = \frac{d^n . \varphi\,(\varpi)}{d\varpi^n}$; cette derniere quantité est donc égale à $\left(\frac{d^n U}{de^n}\right)$; la formule (a) donnera ainsi

$$\varphi\,(\varpi + e) = \varphi\,(\varpi) + e . \frac{d . \varphi\,(\varpi)}{d\varpi} + \frac{e^2}{1.2} . \frac{d^2 . \varphi\,(\varpi)}{de^2} + \frac{e^3}{1.2.3} . \frac{d^3 . \varphi\,(\varpi)}{de^3} + \&c. \quad (b)$$

Considérons présentement une fonction quelconque u de ϖ, ϖ étant une fonction de t & de e, donnée par l'équation

$$t = \varpi - e . z$$

dans laquelle z est une fonction de ϖ. Pour développer u dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de e, il faut déterminer les valeurs de U, $\left(\frac{dU}{de}\right)$, $\left(\frac{d^2 U}{de^2}\right)$; &c. ce qui présente quelque difficulté, en ce que u n'est pas immédiate-

ment fonction de e; il ne renferme les variables e & t, qu'autant que la quantité ϖ dont il est fonction, les renferme; ensorte que

$$\left(\frac{du}{de}\right)=\left(\frac{du}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi}{de}\right);\ \left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{du}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi}{dt}\right);$$

or si l'on différentie l'équation $t=\varpi-ez$, uniquement par rapport à ϖ, & à e, on aura

$$0=d\varpi-z\,de-e.\left(\frac{dz}{d\varpi}\right).d\varpi$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{d\varpi}{de}\right)=\frac{z}{1-e.\left(\frac{dz}{d\varpi}\right)}.$$

Si l'on différentie ensuite l'équation $t=\varpi-ez$, uniquement par rapport à ϖ, & à t, on aura

$$dt=d\varpi-e\left(\frac{dz}{d\varpi}\right).d\varpi$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)=\frac{1}{1-e.\left(\frac{dz}{d\varpi}\right)}$$

partant

$$\left(\frac{d\varpi}{de}\right)=z.\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)$$

on aura donc

$$\left(\frac{du}{de}\right)=z.\left(\frac{du}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi}{dt}\right);$$

& par conséquent

$$\left(\frac{du}{de}\right)=z.\left(\frac{du}{dt}\right)$$

ainsi la même équation aux différences partielles qui existe entre e, t, & ϖ, subsiste encore entre e, t, & une fonction quelconque u de ϖ.

On peut mettre l'équation $\left(\frac{du}{de}\right)=z.\left(\frac{du}{dt}\right)$ sous cette forme,

$$\left(\frac{du}{de}\right)=\frac{d.\int z\left(\frac{du}{d\varpi}\right).d\varpi}{dt};\quad (r)$$

en

en la différentiant par rapport à e, on aura

$$\left(\frac{d^2 u}{de^2}\right) = \frac{d^2 . \int z \left(\frac{du}{d\varpi}\right) d\varpi}{dt . de};$$

mais si dans l'équation (r), on change u, dans $\int z \left(\frac{du}{d\varpi}\right) d\varpi$, elle donnera

$$\frac{d . \int z \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{de} = \frac{d . \int z^2 \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{dt}$$

partant

$$\left(\frac{d^2 u}{de^2}\right) = \frac{d^2 . \int z^2 \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{dt^2}.$$

En différentiant cette équation par rapport à e, on aura

$$\left(\frac{d^3 u}{de^3}\right) = \frac{d^3 . \int z^2 . \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{dt^2 . de}.$$

L'équation (r) donne en y changeant u, dans $\int z^2 \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi$

$$\frac{d . \int z^2 \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{de} = \frac{d . \int z^3 . \left(\frac{du}{d\varpi}\right) d\varpi}{dt}$$

partant

$$\left(\frac{d^3 u}{de^3}\right) = \frac{d^3 . \int z^3 . \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{dt^3}.$$

En suivant ce procédé, on aura généralement

$$\left(\frac{d^n u}{de^n}\right) = \frac{d^n . \int z^n . \left(\frac{du}{d\varpi}\right) . d\varpi}{dt^n} = \frac{d_{n-1} . z^n \left(\frac{du}{d\varpi}\right) \left(\frac{d\varpi}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

& par conséquent

$$\left(\frac{d^n . u}{de^n}\right) = \frac{d^{n-1} . z^n . \left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}}.$$

Si l'on suppose e=o, dans les deux membres de cette équation; le premier deviendra $\left(\frac{d^n U}{de^n}\right)$; dans le second, z & u seront ce que deviennent ces quantités, lorsque $e = o$; or cette supposition

donne $\varpi = t$; ſoient donc Z & U, ce que deviennent z & u lorſqu'on y change ϖ en t, on aura

$$\left(\frac{d^n . U}{de^n}\right) = \frac{d^{n-1} . Z^n . \left(\frac{dU}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

la formule (a) donnera par conſéquent

$$u = U + eZ.\left(\frac{dU}{dt}\right) + \frac{e^2}{1.2.dt} d.Z^2.\left(\frac{dU}{dt}\right) + \frac{e^3}{1.1.3.dt^2} d^2.Z^3.\left(\frac{dU}{dt}\right) + \&c; \quad (c)$$

& l'on aura cet avantage que les quantités $U, Z^2.\left(\frac{dU}{dt}\right)$, &c. que l'on doit différentier par rapport à t, ſont immédiatement fonctions de cette variable. *Voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1777, pag. 99 & ſuiv.*

XI.

Reprenons maintenant l'équation (11) de l'article IX, $t = a^{\frac{3}{2}} (\varpi - e\, ſin.\, \varpi)$, & ſuppoſons pour plus de ſimplicité $a = 1$, enſorte que l'on ait,

$$t = \varpi - e . ſin.\, \varpi.$$

Pour avoir la valeur de r en t, dans une ſuite ordonnée par rapport aux puiſſances de e; on obſervera que $r = 1 - e.\, coſ.\, \varpi$; il ne s'agit donc que de réduire dans une pareille ſuite, la valeur de $coſ.\, \varpi$; or on a dans ce cas $u = coſ.\, \varpi$, $z = ſin.\, \varpi$; il faut donc ſuppoſer dans la formule (c) de l'article précédent, $U = coſ.\, t$; $Z = ſin.\, t$, ce qui donne

$$coſ.\, \varpi = coſ.\, t - e . ſin.\, t^2 - \frac{e^2}{1.2.} . \frac{d . ſin.\, t^3}{dt} - \frac{e^3}{1.2.3} . \frac{d^2 . ſin.\, t^4}{dt^2} - \&c.$$

partant

$$r = 1 - e . coſ.\, t + e^2 . ſin.\, t^2 + \frac{e^3}{1.2} . \frac{d . ſin.\, t^3}{dt} + \frac{e^4}{1.2.3} . \frac{d^2 . ſin.\, t^4}{dt^2} + \&c.$$

or on a

$$ſin.\, t^2 = \frac{1 - coſ.\, 2t}{2}$$

$$ſin.\, t^3 = \frac{3 . ſin.\, t - ſin.\, 3t}{2^2}$$

$$ſin.\, t^4 = \frac{3 - 4 . coſ.\, 2t + coſ.\, 4t}{2^3}$$

&c.

on aura donc en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre e^4 inclusivement, ce qui est suffisant pour toutes les Planetes,

$$r = 1 + \frac{1}{2}e^2 - (e - \frac{3}{8}e^3).\cos.t - (\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4).\cos.2t - \frac{3}{8}.e^3\cos.3t - \frac{1}{3}e^4.\cos.4t.$$

Pour déterminer l'anomalie vraie v de la Planete, en anomalie moyenne t; nous reprendrons l'équation (7) de l'article V. Si l'on y change $d\varphi$ en dv, & que l'on y fasse $m=0$, & $a=1$ on aura

$$dv = \frac{dt.\sqrt{(1-e^2)}}{r^2}.$$

Mais on a $r = 1 - e.\cos.\varpi$, & l'équation $t = \varpi - e\,\sin.\varpi$, donne $dt = d\varpi.(1 - e.\cos.\varpi)$; on aura donc en substituant au lieu de r & dt, ces valeurs,

$$dv = \frac{d\varpi.\sqrt{(1-e^2)}.}{1 - e.\cos.\varpi}$$

& par conséquent

$$v = \sqrt{(1-e^2)}.\int \frac{d\varpi}{1 - e.\cos.\varpi}$$

en changeant donc dans la formule (c) de l'article précédent U, dans $\int \frac{dt}{1 - e\cos.t}$, & Z, dans $\sin.t$, on aura

$$v = \sqrt{1-e^2}.\left(\int \frac{dt}{1-e.\cos.t} + \frac{e.\sin.t}{1-e.\cos.t} + \frac{e^2}{1.2.dt}.d.\frac{\sin.t^2}{1-e\cos.t} + \frac{e^2}{1.2.3.dt^2}d^2.\frac{\sin.t^3}{1-e\cos.t} + \&c.\right)$$

or on a, en négligeant les puissances de e supérieures e^4,

$$\frac{1}{1+e.\cos.t} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.\left\{\begin{array}{l} 1 + e.(1+\frac{1}{4}e^2).\cos.t + \frac{e^2}{2}.(1+\frac{1}{2}e^2).\cos.2t \\ + \frac{e^3}{4}.\cos.3t + \frac{e^4}{8}.\cos.4t\ \&c. \end{array}\right\}$$

en substituant cette valeur dans l'équation précédente, & négligeant les puissances supérieures à e^4, on trouvera

$$v = t + (2e - \frac{1}{4}e^3).\sin.t + (\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}.e^4).\sin.2t + \frac{13}{12}.e^3.\sin.3t + \frac{109}{96}.e^4\sin.4t.$$

On doit observer que dans ces expressions de r & de v, la moyenne distance de la Planete au soleil est prise pour unité;

& que t eſt ſon anomalie moyenne comptée du perihélie. Si l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne étoient comptées de l'aphélie, il ſuffiroit de changer e dans $-e$, dans les formules précédentes, ainſi que dans les équations (11), (12) & (13) de l'art. IX.

X I.

Conſidérons maintenant le cas des orbites fort excentriques, & dans leſquelles par conſéquent e différe peu de l'unité. Soit alors $1 - e = \alpha$, α étant un très-petit coëfficient; l'équation (12) de l'article IX, deviendra

$$tang. \tfrac{1}{2} \varpi = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} . tang. \tfrac{1}{2} v:$$

Or on a par la théorie des ſuites,

$$\tfrac{1}{2}\varpi = tang. \tfrac{1}{2}\varpi - \tfrac{1}{3} tang. \tfrac{1}{2}\varpi^3 + \tfrac{1}{5} . tang. \tfrac{1}{2}\varpi^5 - \&c.$$

on aura donc en ſubſtituant au lieu de tang. $\frac{1}{2}\varpi$, ſa valeur,

$$\varpi = 2 . \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} . tang. \tfrac{1}{2} v . \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\alpha}{3.(2-\alpha)} . tang. \tfrac{1}{2} v^2 \\ + \dfrac{\alpha^2}{5.(2-\alpha)^2} . tang. \tfrac{1}{2} . v^5 - \&c. \end{array} \right\}$$

ſi dans l'équation $t = a^{\frac{3}{2}} . (\varpi - e\, ſin. \varpi)$, on met au lieu de $ſin. \varpi$, ſa valeur en ſérie,

$$\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3 + \tfrac{1}{120} . \varpi^5 - \&c.$$

elle deviendra,

$$t = a^{\frac{3}{2}} \left[(1-e)\varpi + \tfrac{1}{6} . e\varpi^3 - \tfrac{1}{120} . e\varpi^5 + \&c. \right];$$

en ſubſtituant au lieu ϖ, ſa valeur en v, & au lieu de e, $1 - \alpha$; on aura

$$t = \frac{2\, a^{\frac{3}{2}} . \alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2-\alpha}} . tang. \tfrac{1}{2} v \left[1 - \frac{\alpha}{3.(2-\alpha)} . tang. \tfrac{1}{2} v^2 + \&c. \right];$$

$$+ \tfrac{8}{6} . \frac{a^{\frac{3}{2}} . \alpha^{\frac{3}{2}}}{(2-\alpha)^{\frac{3}{2}}} . (1-\alpha) . tang. \tfrac{1}{2} v^3 . \left(1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} . tang. \tfrac{1}{3} v^2 + \&c. \right)$$

$$- \frac{32 . a^{\frac{3}{2}}\, \alpha^{\frac{5}{2}}}{120 . (2-\alpha)^{\frac{5}{2}}} . (1-\alpha) . tang. \tfrac{1}{2} v^5 . (1 - \&c.)$$

+ &c.

& si l'on réduit cette expression de t, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de α, on aura

$$t = a^{\frac{3}{2}} . \alpha^{\frac{3}{2}} . \sqrt{2} . tang. \tfrac{1}{2} v . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 \\ + \alpha . \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{1}{5}\, tang. \tfrac{1}{2} v^5\right) \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

il est visible que $\alpha a = a . (1 - e)$, & que $a\,(1 - e)$ est la distance périhélie de la Planete : soit D cette distance, l'équation précédente deviendra

$$t = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} . tang. \tfrac{1}{2} v . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 \\ + (1 - e) . \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{1}{5}\, tang. \tfrac{1}{2} v^5\right) \\ + \&c. \end{array} \right\} (14).$$

Cherchons présentement l'expression du rayon vecteur, & pour cela, reprenons l'équation

$$r = a . (1 - e . cos. \varpi);$$

si l'on y substitue au lieu de $cos. \varpi$, sa valeur en série,

$$1 - \tfrac{1}{2} \varpi^2 + \tfrac{1}{24} . \varpi^4 - \&c.$$

& au lieu de ϖ, sa valeur en $tang. \frac{1}{2} v$, que nous avons donnée ci-dessus, on aura,

$$r = \alpha a + \frac{2 \alpha a (1 - \alpha)}{2 - \alpha}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 . \left(1 - \frac{2 \alpha}{3 . (2 - \alpha)} . tang. \tfrac{1}{2} v^2 + \&c.\right)$$

$$- \frac{2 \alpha^2 . a . (1 - \alpha)}{3 . (2 - \alpha)^2} . tang. \tfrac{1}{2} v^4 . (1 - \&c.) + \&c.$$

en ordonnant cette expression par rapport aux puissances de α, on aura

$$r = \alpha a . \left[1 + tang. \tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} \alpha . tang. \tfrac{1}{2} v^2 . (1 + tang. \tfrac{1}{2} v^2) + \&c.\right]$$

or on a, $\alpha a = D$, & $1 + tang. \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{cos. \frac{1}{2} v^2}$; partant

$$r = \frac{D}{cos. \tfrac{1}{2} v^2} . \left(1 - \frac{(1 - e)}{2}\, tang. \tfrac{1}{2} v^2 + \&c.\right). (15)$$

Les équations (14) & (15) sont exactes aux quantités près de l'ordre $(1 - e)^2$, & cette approximation est suffisante pour les Cometes. Si l'on y suppose $1 - e = 0$, on aura le cas du

mouvement parabolique; elles deviennent alors

$$t = D^{\frac{3}{2}} . \sqrt{2} . \left(tang. \tfrac{1}{2} \upsilon + \tfrac{1}{3} \, tang. \tfrac{1}{2} \upsilon^3 \right)$$

$$r = \frac{D}{cos. \frac{1}{2} \upsilon^{2}} .$$

On aura au moyen de la premiere, le tems t, lorsque l'anomalie υ sera donnée, & réciproquement on aura l'anomalie υ, lorsque t sera connu. La seconde équation donnera le rayon vecteur r, lorsque l'on aura l'anomalie υ.

Il résulte de la premiere, que les tems correspondans à la même anomalie, dans différentes paraboles, sont entre eux comme les racines quarrées des cubes des distances périhélies; d'où il suit que si l'on a calculé ces tems, pour une parabole dont la distance périhélie soit prise pour unité de distance, on aura les tems correspondans à la même anomalie dans une parabole quelconque, en multipliant les premiers, par la racine quarrée du cube de la distance périhélie de cette parabole. C'est sur ce principe qu'est fondée la Table du mouvement des Cometes.

Si dans une parabole dont la distance périhélie est prise pour l'unité, on nomme T le tems correspondant a 90° d'anomalie, on aura

$$T = \tfrac{4}{3} . \sqrt{2} ;$$

on aura donc pour une parabole quelconque

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} . T.}{4} . \left(tang. \tfrac{1}{2} \upsilon^3 + 3 . tang. \tfrac{1}{2} \upsilon \right).$$

Supposons maintenant que l'on cherche l'anomalie υ correspondante au tems t, dans une ellipse fort excentrique; l'équation (14) donne

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \, T}{4} \left\{ \begin{array}{l} tang. \frac{1}{2} \upsilon^3 + 3 . tang. \frac{1}{2} \upsilon \\ + (1 - e) . \left(\frac{3}{4} tang. \frac{1}{2} \upsilon - \frac{3}{4} \, tang. \frac{1}{2} \upsilon^3 - \frac{3}{5} \, tang. \frac{1}{2} \upsilon^5 \right) \end{array} \right\} ;$$

cela posé, on cherchera par la Table du mouvement des Cometes,

l'anomalie v qui répond au tems t, dans une parabole dont D feroit la diftance périhélie. Soit U, cette anomalie, & $U+x$ l'anomalie vraie dans l'ellipfe, x étant un très-petit angle ; fi l'on fubftitue dans l'équation précédente, $U+x$ au lieu de v; qu'on la réduife en férie, par rapport aux puiffances de x, & que l'on néglige le quarré de x, & le produit de x par $1-e$, on aura

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}}.T}{4}.(tang.\tfrac{1}{2}U^3 + 3\,tang.\tfrac{1}{2}U)$$

$$+\frac{D^{\frac{3}{2}}.T}{4}.\left\{\begin{array}{l} x.d.\dfrac{(tang.\frac{1}{2}U^3+3\,tang.\frac{1}{2}U)}{dU} \\ +(1-e)\left(\frac{3}{4}.tang.\frac{1}{2}.U - \frac{3}{4}.tang.\frac{1}{2}U^3 - \frac{3}{5}.tang.\frac{1}{2}U^5\right); \end{array}\right.$$

mais on a par la fuppofition,

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}}.T}{4}.(tang.\tfrac{1}{2}U^3 + 3\,tang.\tfrac{1}{2}U)$$

donc

$$0 = x.d.\frac{(tang.\frac{1}{2}U^3 + 3\,tang.\frac{1}{2}U)}{dU}$$

$$+(1-e).\left(\tfrac{3}{4}\,tang.\tfrac{1}{2}U - \tfrac{3}{4}\,tang.\tfrac{1}{2}U^3 - \tfrac{3}{5}\,tang.\tfrac{1}{2}.U^5\right)$$

on a enfuite,

$$\frac{d.(tang.\frac{1}{2}U^3 + 3\,tang.\frac{1}{2}U)}{dU} = \frac{3}{2.cof.\frac{1}{2}U^4};$$

en fubftituant donc au lieu du petit arc x, fon finus, & au lieu de tang. $\frac{1}{2}.U$, fa valeur $\frac{fin.\frac{1}{2}U}{cof.\frac{1}{2}U}$, on aura

$$fin.\,x = \tfrac{1}{10}.(1-e).tang.\tfrac{1}{2}.U\,(4 - 3\,cof.\tfrac{1}{2}U^2 - 6.cof.\tfrac{1}{2}U^4).$$

Il feroit utile de former une Table des logarithmes de

$$\tfrac{1}{10}\,tang.\tfrac{1}{2}U.(4 - 3\,cof.\tfrac{1}{2}.U^2 - 6.cof.\tfrac{1}{2}U^4);$$

Il fuffiroit alors de leur ajouter le logarithme de $1-e$, pour avoir celui de *fin.* x, & l'on auroit ainfi très-facilement la correction à faire à l'anomalie calculée dans la parabole, pour avoir l'anomalie vraie dans l'ellipfe.

Nous venons d'expofer les principales propriétés du mouve-

ment des Planetes & des Cometes, en les déduisant de la seule intégration des équations différentielles du second ordre (1) & (2) de l'article I. Newton est parvenu à la plûpart de ces propriétés, par la synthèse, & sa théorie est un chef-d'œuvre; mais aujourd'hui l'Astronomie Physique a pris de tels accroissements, que l'analyse précédente peut être regardée comme élémentaire, relativement aux théories profondes dont les Géométres de ce siécle l'ont enrichie, & qui sont inaccessibles à la synthèse.

XIII.

Au lieu de rapporter, comme nous l'avons fait, le mouvement de la Planete au plan même de son orbite, nous aurions pû le rapporter à un plan fixe quelconque; & dans ce cas, en nommant z, la hauteur du centre de la Planete, au-dessus de ce plan, nous aurions eu par l'article I, pour déterminer cette variable, l'équation $0 = \frac{ddz}{dt^2} + \frac{1+m}{r^3} z$; ensorte que x, y, z, étant les trois coordonnées de la Planete rapportées au plan fixe, son mouvement auroit été déterminé par les trois équations différentielles du second ordre,

$$0 = \frac{ddx}{dt^2} + \frac{1+m}{r^3} . x$$

$$0 = \frac{ddy}{dt^2} + \frac{1+m}{r^3} . y$$

$$0 = \frac{ddz}{dt^2} + \frac{1+m}{r^3} . z$$

Leurs intégrales auroient renfermé six constantes arbitraires, & par conséquent deux de plus que dans l'analyse précédente; ces deux nouvelles arbitraires auroient déterminé la position du plan de l'orbite de la Planete sur le plan fixe; mais il est plus

plus ſimple de conſidérer d'abord le mouvement de la Planete ſur le plan même de ſon orbite, & de déterminer enſuite la poſition de cette orbite ſur le plan invariable, en fixant 1° la poſition de la ligne d'interſection des deux plans, ou ce qui revient au même, la poſition du nœud aſcendant de l'orbite; 2° l'inclinaiſon de l'orbite ſur le plan fixe. Les Aſtronomes prennent pour ce dernier plan, celui de l'écliptique ou de l'orbite de la terre, à une époque donnée.

La détermination de l'orbite d'une Planete dépend donc des cinq élémens ſuivans; ſavoir, le grand axe de l'orbite, ſon excentricité, la poſition de ſon aphélie, la poſition de ſon nœud aſcendant ſur le plan fixe, l'inclinaiſon de ſon orbite ſur le même plan. La détermination du mouvement de la Planete exige de plus que l'on connoiſſe ſa poſition ſur l'orbite, à un inſtant donné; ces ſix quantités ſont les conſtantes arbitraires qu'introduit l'intégration des trois équations différentielles précédentes.

Sans l'action mutuelle des Planetes les unes ſur les autres, les élémens de leurs orbites ſeroient invariables; mais ils changent continuellement en vertu de leurs attractions réciproques; ces variations ſont peu ſenſibles pendant un petit nombre d'années; elles le deviennent dans l'eſpace d'un ſiécle. On les a nommées *inégalités ſéculaires*, parce que leur périodes ſont de pluſieurs ſiécles, ce qui les diſtingue des *inégalités périodiques* qui ſe rétabliſſent après un petit nombre de révolutions des Planetes. Nous allons préſenter ici ces inégalités ſéculaires, ſous leur forme la plus ſimple, de maniere que tout Calculateur pourra ſans peine déterminer leurs valeurs numériques.

Conſidérons les variations ſéculaires que produit l'action

de la Planete p', dans les élémens de l'orbite de la Planete p; pour cela ſoit m', le rapport de la maſſe de la Planete p' à celle du ſoleil;

a, la moyenne diſtance de p, au ſoleil;

$e.a$, l'excentricité de ſon orbite;

L, la longitude de ſon aphélie à une époque donnée;

Γ, la longitude de ſon nœud aſcendant ſur le plan fixe, à la même époque;

γ, l'inclinaiſon de ſon orbite ſur le même plan.

Soient a', $e'.a'$, L', Γ' & γ' les mêmes quantités relativement à la Planete p'; ſoit encore $\frac{a'}{a} = n$;

$$b = \frac{1}{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8^2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^4 \\ + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{12^2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^6 + \&c. \end{array} \right\}$$

$$c = \frac{3n}{(1+n^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{4\cdot(3^2-1)}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right) \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^4 \\ + \left(1 + \frac{3}{4\cdot(3^2-1)}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{4(7^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{2n}{1+nn}\right)^6 + \&c. \end{array} \right\}$$

La loi de ces ſéries eſt viſible; pour déterminer b & c à leur moyen, on pourra prendre dans chacune, la ſomme des dix ou douze premiers termes, & conſidérer le reſte de la ſérie, comme formant une progreſſion géométrique qu'il ſera facile de ſommer; on aura ainſi dans tous les cas, ces valeurs avec une préciſion ſuffiſante.

Soit enfin i, les nombres des révolutions de la Planete p, depuis l'époque donnée; il faudra faire i négatif, ſi l'on veut remonter aux tems antérieurs à cette époque; cela poſé. (*Voyez le Tome VII. des Mémoires des Sçavans Etrangers, page 221.*)

Table des inégalités séculaires du mouvement de la Planete p, *produites par l'action de la Planete* p'.

Accroissement de l'équation du centre

$$m'.i.360^\circ.e'.\text{sin.}(L'-L).[c.(1+nn)-3bn].$$

Mouvement moyen de l'aphélie suivant l'ordre des signes,

$$m'.i.360^\circ.\left[\tfrac{1}{4}nc-\tfrac{1}{2}.\frac{e'}{e}.\text{cos.}(L'-L).[c.(1+nn)-3bn]\right]$$

Diminution de l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe,

$$\tfrac{1}{4}m'.i.360^\circ.nc\gamma'.\text{sin.}(\Gamma'-\Gamma)$$

Mouvement rétrograde du nœud sur le plan fixe,

$$\tfrac{1}{4}m'.i.360^\circ.nc.\left[1-\frac{\gamma'}{\gamma}.\text{cos.}(\Gamma'-\Gamma)\right]$$

La variation du grand axe, est nulle, & par conséquent, l'équation séculaire du moyen mouvement est nulle.

En réunissant toutes les variations que chaque Planete produit dans les élémens de l'orbite de la Planete *p*, leurs sommes donneront les variations entieres de ces élémens.

Les formules précédentes supposent que l'excentricité & l'inclinaison des orbites sont peu considérables, ce qui est vrai relativement aux Planetes; elles ne peuvent d'ailleurs servir pour un tems illimité, parce qu'elle ne sont à-proprement parler, que les différentielles des équations séculaires des Planetes, qui sont fonctions de sinus & de cosinus d'angles croissans très-lentement. J'ai donné ailleurs la méthode de remonter de ces différentielles, aux fonctions qui les produisent par leur développement en séries; mais dans l'usage de l'Astronomie, il est plus simple de considérer ces différentielles qui peuvent s'étendre à quelques siécles avant & après l'époque que l'on a choisie.

Si l'on fixe dans ce siécle, l'époque d'où l'on commence à compter les variations des élémens des Planetes, ou ce qui revient au même, l'origine des i; on aura pour la diminution de l'obliquité de l'écliptique produite par l'action de la Planete p', sur la terre que nous représenterons par p.

$$\tfrac{1}{4} m' . i . 360° . n c \gamma' . \sin. \Gamma';$$

i, étant le nombre des révolutions de la terre depuis l'époque; γ' étant l'inclinaison de l'orbite de p' sur l'écliptique, & Γ' étant la longitude de son nœud ascendant. La somme de toutes les diminutions résultantes de l'action de chaque Planete, donnera la diminution entiere de l'obliquité de l'écliptique. La longitude du nœud ascendant de chaque Planete, est actuellement moindre que 180°; ensorte que pour chacune d'elles, $\sin. \Gamma'$ est positif; il n'y en a donc pas une seule qui ne contribue à diminuer l'obliquité de l'écliptique; ainsi cette diminution est incontestable, du moins, en faisant abstraction de l'action des Cometes; mais l'ignorance où nous sommes sur les masses de quelques-unes des Planetes & particulièrement sur celle de Vénus, nous empêche de fixer la véritable quantité de cette diminution, dont la connoissance précise est conséquemment réservée aux siécles à venir.

XIV.

On trouve dans les divers Ouvrages d'Astronomie, les élémens des orbites des Planetes; leur nombre paroissoit fixé depuis long-tems à six, lorsqu'au mois de Mars 1781, M. Herschel apperçut au moyen d'un Télescope d'une très-grande force, un astre ayant un disque sensible, & dont l'apparence étoit différente de celle que présentent les Cometes lors-

qu'elles ont une très-foible lumiere. Son mouvement par jour étoit d'environ $1' \frac{1}{2}$ en longitude, il étoit presque nul en latitude. Lorsque cette découverte parvint en France, j'appliquai à cet astre considéré comme une Comete, une nouvelle méthode pour déterminer les orbites des Cometes, dont j'étois alors occupé ; je trouvai quatre paraboles qui satisfaisoient aux premieres observations ; dans deux de ces paraboles, la distance de la Comete à la terre étoit peu différente de la moyenne distance de la terre au soleil ; quelques jours d'observation suffirent pour les exclure ; dans les deux autres, la distance de la Comete à la terre étoit 18 ou 19 fois plus grande que la moyenne distance du soleil à la terre ; il fallut un intervalle de quelques mois pour les rejetter. Les variations que de nouvelles observations apportoient sans cesse aux élémens de ces paraboles, me firent soupçonner dès le mois d'Août 1781, que l'astre dont il s'agit, étoit mû dans une orbé presque circulaire d'un très-grand rayon. Je dois observer ici que M. le Président de Saron a le premier reconnu le grand éloignement de cet astre, dont il s'étoit assuré par des moyens fort ingénieux. Le calcul des observations dans l'hypothese circulaire étant extrêmement simple, il nous fut facile de déterminer les élémens de l'orbite, & nous trouvâmes qu'ils satisfaisoient parfaitement aux observations. Cet accord se soutint durant toute l'année 1781, & une partie de l'année 1782 ; mais sur la fin de cette même année, des observations faites avec soin commencerent à s'éloigner de l'hypothese circulaire, & à indiquer l'ellipticité de l'orbite. Je cherchai alors une méthode analytique pour déterminer directement l'orbite elliptique d'une Planete, par quatre observations peu distantes entre-elles ; & M. Mechain ayant

bien voulu me communiquer quatre excellentes obſervations faites par lui, dont l'une ſe rapportoit au 11 Mai 1781, & les trois autres étoient les deux oppoſitions de 1781 & de 1782, & une obſervation intermédiaire du 13 Mai 1782, j'appliquai cette méthode à ces obſervations, & j'en tirai les élémens ſuivans dont je fis part à l'Académie & aux Aſtronomes dans le mois de Janvier 1783. J'ai depuis déterminé l'inclinaiſon de l'orbite, & la longitude du nœud, au moyen d'une obſervation très-intéreſſante dont je parlerai ci-après. La moyenne diſtance du ſoleil à la terre eſt priſe pour l'unité.

Elémens de l'orbite de la Planete Herſchel.

Demi grand axe de l'orbite.	19,0818
Rapport de l'excentricité au demi grand axe.	0,047587
Ce rapport réduit en ſecondes.	9815″ ½
Plus grande équation du centre.	5° 27′ 11″
Anomalie moyenne ſur l'orbite, comptée de l'aphélie, le premier Janvier 1782, à midi tems moyen à Paris.	102° 59′ 31″
Longitude de l'aphélie ſur l'orbite à la même époque.	353° 22′ 59″
Longitude du nœud aſcendant au même inſtant.	73° 1′ 0″
Inclinaiſon de l'orbite.	46′ 12″
Logarithme du nombre de ſecondes que la Planete décrit en un jour par ſon moyen mouvement.	1, 6290783

Le tems de la révolution de la Planete eſt de $30445^{\text{jours}}, 75$, c'eſt-à-dire, d'un peu plus de 83^{ans} un tiers.

De là il eſt aiſé de conclure que ſi l'on nomme u, le moyen mouvement de la Planete ſur l'orbite compté depuis l'aphélie ; ϖ ſon anomalie excentrique ; v, ſon anomalie vraie, ces deux angles étant pareillement comptés de l'aphélie, & r ſon rayon vecteur ; les équations (11), (12) & (13) de l'Article IX, donneront en y changeant e, dans $-e$, & en y ſubſtituant u, au lieu de $\frac{t}{a^{\frac{3}{2}}}$, & au lieu de a & de e, leurs valeurs relatives à la Planete *Herſchel*,

$$u = \varpi + 9815''\tfrac{1}{2} \,.\, \sin.\, \varpi$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} v = 0{,}953493 \,.\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2} \varpi$$

$$r = 19{,}0818 + 0{,}908045 \,.\, \cos.\, \varpi.$$

Au moyen de ces trois équations, on calculera facilement le mouvement de cette Planete ſur ſon orbite.

Du moment où l'on a reconnu que l'aſtre découvert par M. Herſchel étoit une Planete, on a ſoupçonné qu'elle avoit été obſervée comme étoile, par les Aſtronomes qui ſe ſont ſpécialement occupés des étoiles zodiacales ; enſorte que quelques-unes des étoiles indiquées dans les catalogues, doivent manquer à la place que ces catalogues leur aſſignent. C'eſt ce que M. Bode, Aſtronome de Berlin, a vérifié relativement au catalogue de Mayer. La 964ieme étoile du catalogue zodiacal de cet illuſtre Aſtronome ne ſe trouve point dans l'endroit du ciel où elle étoit alors, ni même dans les environs ; & comme ſa poſition coincide à-peu-près avec celle que devoit avoir la Planete *Herſchel*, à l'époque où l'on peut ſuppoſer que Mayer a fait ſon obſervation, M. Bode en a conclu avec beaucoup de vraiſemblance, que c'eſt cette Planete que Mayer avoit obſervée, ſans en reconnoître le mouvement, parce

qu'il avoit négligé de déterminer plusieurs fois sa position. Pour tirer parti de cette observation importante, il falloit avoir l'instant précis auquel elle répond; or on a trouvé dans les manuscrits de Mayer, que cet instant étoit le 25 Septembre 1756, à 10 heures 21′ 18″ tems moyen à Paris. Lorsque cette époque nous fut connue, je calculai cette observation d'après les élémens précédens que j'avois communiqués deux mois auparavant à l'Académie, & je trouvai par un hazard auquel je devois peu m'attendre vu le peu d'intervalle des observations dont j'avois fait usage, qu'ils la représentoient à quelques secondes près, ce qui établit ces deux choses; 1° que l'astre observé par Mayer, est la Planete même de M. Herschel; 2° que les élémens qui viennent d'être rapportés, sont fort approchés. C'est en comparant l'observation de Mayer avec les observations récentes & en prenant un milieu entre les résultats, que j'ai conclu la position du nœud, & l'inclinaison de l'orbite.

XV.

Les élémens des orbites des Planetes étant connus à très-peu-près, il ne s'agit plus, pour perfectionner leur théorie, que de les corriger par d'excellentes observations, en y appliquant les méthodes différentielles; mais lorsqu'une Comete commence à paroître, on n'a aucune donnée sur les élémens de son orbite, si l'on excepte le grand axe que l'on peut supposer infini sans erreur sensible, ensorte que l'orbite peut être considérée comme parabolique dans la partie dans laquelle la Comete est visible. Il faut donc tirer des observations, les autres élémens de l'orbite: or le mouvement apparent des Cometes étant compliqué de leur mouvement propre & du mouvement de l'observateur, le problême de la détermination de

de ces élémens, présente de grandes difficultés qu'il n'a pas encore été possible de résoudre rigoureusement; on est ainsi forcé de recourir aux approximations parmi lesquelles il faut choisir celle qui présente à la fois le calcul le plus simple & les résultats les plus précis; la méthode suivante m'a paru réunir ces avantages.

Reprenons les trois équations différentielles du second ordre qui déterminent (Article XIII.) le mouvement d'un corps autour du soleil, dans la supposition où sa masse est infiniment petite relativement à celle du soleil prise pour unité.

$$\left.\begin{aligned} \frac{ddx}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= 0. \\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= 0. \\ \frac{ddz}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= 0. \end{aligned}\right\} (K)$$

Supposons que le plan des x & des y, soit le plan même de l'écliptique; que l'axe des x, soit la ligne menée du centre du soleil au premier point d'*aries*, à une époque donnée; que la ligne des y, soit la ligne menée du centre du soleil au premier point du *cancer*; enfin que les z, positifs, soient du même côté que le pole boréal de l'écliptique; nommons ensuite x' & y', les coordonnées de la terre rapportées aux mêmes axes; ρ, la distance de la Comete à la terre, projettée sur le plan de l'écliptique; α, sa longitude géocentrique, & θ, sa latitude géocentrique, les latitudes australes devant être supposées négatives. On aura

$$\begin{aligned} x &= x' + \rho . \cos. \alpha \\ y &= y' + \rho . \sin. \alpha \\ z &= \rho . \text{tang}. \theta. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie la premiere des équations différentielles (K),

par *ſin.* α, & que l'on en retranche la ſeconde multipliée par *coſ.* α, on aura

$$0 = \sin.\alpha . \frac{ddx}{dt^2} - \cos.\alpha . \frac{ddy}{dt^2} + \frac{x.\sin.\alpha - y.\cos.\alpha}{r^3}$$

d'où l'on tire en ſubſtituant pour x & y, les valeurs que nous venons de trouver,

$$\sin.\alpha . \frac{ddx'}{dt^2} - \cos.\alpha . \frac{ddy'}{dt^2} + \frac{y'.\sin.\alpha - y'.\cos.\alpha}{r^3}$$

$$- 2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) = 0.$$

Maintenant, la terre étant retenue dans ſon orbite, comme la Comete, par l'attraction du ſoleil, ſi l'on nomme R, ſon rayon vecteur, on aura

$$\frac{ddx'}{dt^2} + \frac{x'}{R^3} = 0; \ \frac{ddy'}{dt^2} + \frac{y'}{R^3} = 0$$

ce qui donne

$$\sin.\alpha . \frac{ddx'}{dt^2} - \cos.\alpha . \frac{ddy'}{dt^2} = \frac{y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha}{R^3};$$

on aura donc

$$(y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha).\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - 2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) = 0.$$

Soit A, la longitude de la terre vue du ſoleil, on aura $x' = R.\cos.A$; $y' = R.\sin.A$; partant, $y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha = R.\sin.(A - \alpha)$; l'équation précédente donnera ainſi

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{R.\sin.(A-\alpha)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{\rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}; \ (a')$$

Si l'on multiplie la premiere des équations différentielles (K) par *tang.* θ. *coſ.* α, & la ſeconde par *tang.* θ. *ſin.* α, & que l'on retranche de leur ſomme, la troiſieme équation; on aura

$$0 = \tan.\theta.\left(\cos.\alpha . \frac{ddx}{dt^2} + \sin.\alpha . \frac{ddy}{dt^2}\right) + \tan.\theta.\left(\frac{x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha}{r^3}\right)$$

$$- \frac{ddz}{dt^2} - \frac{z}{r^3}.$$

En ſubſtituant pour x, y & z, leurs valeurs, cette équation deviendra

$$\frac{-2\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left(\frac{d\theta}{dt}\right)-\rho.\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)}{cos.\,\theta^2}-\frac{2\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.sin.\,\theta-\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 tang.\,\theta}{cos.\,\theta^3}$$

$$+tang.\,\theta.\left\{\left(\frac{ddx'}{dt^2}+\frac{x'}{r^3}\right).cos.\,\alpha+\left(\frac{ddy'}{dt^2}+\frac{y'}{r^3}\right).sin.\,\alpha\right\}=0;$$

or on a

$$\left(\frac{ddx'}{dt^2}+\frac{x'}{r^3}\right).cos.\,\alpha+\left(\frac{ddy'}{dt^2}+\frac{y'}{r^3}\right).sin.\,\alpha=(x'cos.\,\alpha+y'.sin.\,\alpha).\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)$$

$$=R.cos.\,(A-\alpha).\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)$$

partant,

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)=-\rho.\left\{\frac{\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)}{2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}+\left(\frac{d\theta}{dt}\right).tang.\,\theta+\frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 sin.\,\theta.\,cos.\,\theta}{2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right\}$$

$$+\frac{R.\,sin.\,\theta\;cos.\,\theta}{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}.cos.\,(A-\alpha).\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right);\;(b')$$

On a vu, (Article VI), que le quarré de la vîteſſe dans la parabole eſt égale à $\frac{2}{r}$; il eſt viſible d'ailleurs que le quarré de cette vîteſſe eſt égal à $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$; on aura ainſi,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2}{r}=0;$$

enſorte que les Cometes étant ſuppoſées décrire des orbites paraboliques, on pourra faire uſage de cette équation pour déterminer leurs élémens; en y ſubſtituant donc au lieu de x, y, z, leurs valeurs précédentes en x', y', ρ, θ & α, elle donnera

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left\{\frac{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).tang.\,\theta+\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{cos.\,\theta^2}\right\}^2$$

$$+2.\frac{dx'}{dt}.\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).cos.\,\alpha-\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).sin.\,\alpha\right\}$$

$$+2.\frac{dy'}{dt}.\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\mathit{fin}.\,\alpha+\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\mathit{cof}.\,\alpha\right\};\ (X)$$

$$+\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2}-\frac{2}{r}=0;$$

on a enſuite,

$$\frac{dx'}{dt}=\left(\frac{dR}{dt}\right).\mathit{cof}.\,A-R.\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{fin}.\,A$$

$$\frac{dy'}{dt}=\left(\frac{dR}{dt}\right).\mathit{fin}.\,A+R.\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{cof}.\,A$$

d'où l'on tire,

$$2.\frac{dx'}{dt}\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\mathit{cof}.\,\alpha-\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\mathit{fin}.\,\alpha\right\}$$

$$+2\frac{dy'}{dt}.\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\mathit{fin}.\,\alpha+\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\mathit{cof}.\,\alpha\right\}$$

$$=2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left\{\left(\frac{dR}{dt}\right).\mathit{cof}.\,(A-\alpha)-R\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{fin}.\,(A-\alpha)\right\}$$

$$+2\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left\{\left(\frac{dR}{dt}\right).\mathit{fin}.\,(A-\alpha)+R\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{cof}.\,(A-\alpha)\right\}.$$

$\left(\frac{dR}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dA}{dt}\right)$, ſont donnés par la théorie du mouvement de la terre; pour en faciliter le calcul, ſoit H, la longitude de l'aphélie de la terre; ſon anomalie vraie comptée de l'aphélie, ſera $A-H$; en déſignant donc par E, ſon excentricité, on aura par l'Article V, en y changeant e, dans $-E$; $\varphi+A$, dans $A-H$, r dans R & en y ſuppoſant $a=1$,

$$R=\frac{1-E^2}{1-E.\,\mathit{cof}.\,(A-H)}$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{-E.(1-E^2).\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{fin}.\,(A-H)}{[1-E.\,\mathit{cof}.\,(A-H)]^2}=\frac{-E.R^2\left(\frac{dA}{dt}\right).\mathit{fin}.(A-H)}{1-E^2};$$

or l'équation (7) de l'Article V, donne en y changeant $d\varphi$, en dA, r, dans R, e, dans $-E$, & en y ſuppoſant $m=0$

$$R^2\left(\frac{dA}{dt}\right)=\sqrt{1-E^2}$$

partant

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{-E.\,\text{ſin.}\,(A-H)}{\sqrt{1-E^2}}.$$

Si l'on nomme R', le rayon vecteur correſpondant à la longitude $90^\circ + A$, de la terre, on aura

$$R' = \frac{1-E^2}{1+E.\,\text{ſin.}\,(A-H)}$$

ce qui donne

$$E.\,\text{ſin.}\,(A-H) = \frac{1-E^2-R'}{R'}$$

& par conſéquent,

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{R'+E^2-1}{R'.\sqrt{1-E^2}};$$

en négligeant le quarré E^2, de l'excentricité de l'orbite terreſtre, on aura

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{R'-1}{R'} = R'-1$$

parce que R' ne différe de l'unité, que d'une quantité de l'ordre E; on aura enſuite

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{1}{R^2}.$$

Enfin l'équation (6) de l'Article V, donnera en y changeant x & y, dans x' & y'; & en y faiſant $m=0$, $a=1$, & $r=R$,

$$\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2} = \frac{2}{R} - 1 = \frac{1}{R^2} - \left(\frac{1}{R}-1\right)^2$$

on aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre E^2,

$$\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2} = \frac{1}{R^2};$$

ces valeurs ſubſtituées dans l'équation (X), la changeront dans celle-ci,

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left\{\frac{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\,\text{tang.}\,\theta + \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\text{coſ.}\,\theta^2}\right\}^2$$

$$+2\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left\{(R'-1).\,\text{coſ.}\,(A-\alpha) - \frac{\text{ſin.}\,(A-\alpha)}{R}\right\} \quad ;\ (c')$$

$$+2\rho\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left\{(R'-1).\,\text{ſin.}\,(A-\alpha) + \frac{\text{coſ.}\,(A-\alpha)}{R}\right\} + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r} = 0.$$

On a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; en ſubſtituant donc au lieu de x, y, z, leurs valeurs, on aura

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos.\theta^2} + 2\rho . R . \cos.(A - \alpha) + R^2; \quad (f')$$

Suppoſons que $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ & $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ ſoient connus, les quatre équations précédentes (a'), (b'), (c') & (f') donneront les valeurs de r, ρ & $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$; on aura même une équation de plus que d'inconnues, parce que la ſuppoſition de l'orbite parabolique à donné l'équation (c'), qui n'auroit plus lieu ſi l'orbite étoit ou une ellipſe ou une hyperbole ; dans ces deux cas, les valeurs de r, ρ, & $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$, ſeront données au moyen des équations (a'), (b') & (f').

Comme on eſt aſſuré que les Cometes décrivent à très-peu-près, des paraboles, il eſt avantageux de ſe ſervir de l'équation (c') qui eſt indépendante des ſecondes différences $\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)$, & $\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)$, car c'eſt principalement ſur les valeurs de ces différences, que les erreurs des obſervations ont le plus d'influence. Il faudra donc faire uſage des équations (a'), (c') & (f'), ſi la valeur de $\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)$, eſt plus grande que celle de $\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)$, ou ce qui revient au même, ſi la variation du mouvement en longitude, eſt plus grande que celle du mouvement en latitude ; mais ſi cette derniere variation eſt plus grande que la premiere, il faudra employer les équations (b'), (c') & (f').

Lorſqu'on aura ainſi déterminé ρ, $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ & r, on en conclura facilement la diſtance perihélie au moyen de l'équation (8) de l'Article V, car ſi l'on y ſuppoſe a infini, le demi paramétre $(1 - e^2)\,a$, ſera égal au double de la diſtance

periphélie que nous désignerons par D; en faisant donc $m = o$, & a infini, cette équation donnera,

$$D = r - \tfrac{1}{2}.\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2.$$

Si l'on différentie l'équation (f'), & que l'on y substitue au lieu de $\left(\frac{dA}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dR}{dt}\right)$, leurs valeurs que nous avons trouvées précédemment, on aura

$$\frac{rdr}{dt} = \frac{\rho}{cos.\,\theta^2}.\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\,tang.\,\theta\right\}$$
$$+ R.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\,cos.(A - \alpha) + \rho.\,R.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\,sin.(A - \alpha)$$
$$+ \rho.\left\{(R' - 1).\,cos.(A - \alpha) - \frac{sin.(A - \alpha)}{R}\right\} + R.(R' - 1);$$

cette valeur substituée dans l'expression de D, donnera la distance periphélie; elle a de plus l'avantage de faire connoître par son signe, si la Comete a déja passé par son periphélie, ou si elle s'en approche; car, il est clair que dans le premier cas, $\frac{rdr}{dt}$, est positif, & que dans le second, il est négatif.

L'anomalie v, de la Comete, se déterminera au moyen de l'équation, $cos.\,\frac{1}{2}v^2 = \frac{D}{r}$, que nous avons trouvée dans l'article XII, & la table du mouvement des Cometes donnera le tems employé à décrire cet angle; ce tems ajouté, ou retranché de l'instant que l'on a choisi pour époque, suivant que $\frac{rdr}{dt}$, sera négatif ou positif, donnera l'instant du passage de la Comete par ce point; il sera facile ensuite, d'en conclure les autres élémens de l'orbite.

Toute la difficulté se réduit donc à déterminer les valeurs de $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ & $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$. La loi du mouvement apparent de la Comete, fera connoître ces valeurs, & les

Géometres y parviendront aiſément au moyen des formules connues, pour avoir les différences infiniment petites, en fonctions des différences finies. Delà réſulte la méthode ſuivante pour déterminer les orbites des Cometes.

X V I.

Méthode générale pour déterminer les orbites des Cometes.

Cette méthode ſera diviſée en deux parties ; dans la premiere, nous donnerons le moyen d'avoir à-peu-près la diſtance perihélie, & l'inſtant du paſſage de la Comete par ce point ; dans la ſeconde, nous déterminerons exactement tous les élémens de l'orbite, en ſuppoſant ceux-ci à-peu-près connus.

Détermination approchée de la diſtance périhélie, & de l'inſtant du paſſage de la Comete par ce point.

1° On choiſira trois ou quatre ou cinq, &c. obſervations de la Comete, également éloignées les unes des autres autant qu'il ſera poſſible ; on pourra embraſſer, avec quatre obſervations, un intervalle de 30 degrés ; avec cinq obſervations, un intervalle de 36 ou 40 degrés, & ainſi du reſte ; mais il faudra toujours que l'intervalle compris entre les obſervations, ſoit d'autant plus grand qu'elles ſont en plus grand nombre, afin de diminuer l'influence de leurs erreurs.

Cela poſé; ſoient ϵ, ϵ', ϵ'', ϵ''', &c. les longitudes géocentriques ſucceſſives de la Comete; γ, γ', γ'', γ''', &c. les latitudes boréales correſpondantes, les latitudes auſtrales devant être ſuppoſées négatives.

négatives. On diviſera la différence $\beta' - \beta$, par le nombre des jours qui ſéparent la ſeconde de la premiere obſervation; on diviſera pareillement la différence $\beta'' - \beta'$, par le nombre des jours qui ſéparent la troiſieme de la ſeconde obſervation; on diviſera encore la différence $\beta''' - \beta''$, par le nombre des jours qui ſéparent la quatrieme de la troiſieme obſervation, & ainſi de ſuite; ſoit $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\beta''$, $\delta\beta'''$, &c. la ſuite de ces quotiens.

On diviſera la différence $\delta\beta' - \delta\beta$, par le nombre des jours qui ſéparent la troiſieme de la premiere obſervation; on diviſera pareillement la différence $\delta\beta'' - \delta\beta'$, par le nombre des jours qui ſéparent la quatrieme de la ſeconde obſervation; on diviſera encore la différence $\delta\beta''' - \delta\beta''$, par le nombre des jours qui ſéparent le cinquieme de la troiſieme obſervation, & ainſi du reſte; ſoit $\delta^2\beta$, $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$, &c. la ſuite de ces quotiens.

On diviſera la différence $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$, par le nombre des jours qui ſéparent la quatrieme de la premiere obſervation; on diviſera pareillement la différence $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$, par le nombre des jours qui ſéparent la cinquieme de la ſeconde obſervation, & ainſi du reſte; ſoit $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$, &c. la ſuite de ces quotiens; on continuera ainſi juſqu'à ce que l'on parvienne à former $\delta^{n-1}.\beta$, n étant le nombre des obſervations employées. Cela fait

2° On prendra une époque moyenne, ou à-peu-près moyenne entre les inſtans des deux obſervations extrêmes, & en nommant i, i', i'', i''', &c. le nombre des jours dont elle précéde chaque obſervation; i, i', &c. devant être ſuppoſés négatifs pour toutes les obſervations antérieures à cette époque; la longitude de la Comete après un petit nombre z

de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule

$$\begin{array}{l} \beta - i.\delta\beta + i.i'.\delta^2.\beta - i.i'.i''\delta^3.\beta + i.i'.i''.i'''.\delta^4.\beta - \&c. \\ + z.\left\{\begin{array}{l} \delta.\beta - (i+i').\delta^2.\beta + (i.i' + i.i'' + i'.i''.).\delta^3.\beta \\ - (i i' i'' + i i' i''' + i.i''.i''' + i'.i''.i''').\delta^4.\beta + \&c. \end{array}\right\}; (p) \\ + z^2.\left\{\begin{array}{l} \delta^2\beta - (i+i'+i'').\delta^3.\beta + (i.i' + i.i'' + i.i''' + i'.i'' + i'.i''' + i''.i''').\delta^4.\beta \\ - \&c. \end{array}\right\} \end{array}$$

Les coëfficiens de $-\delta.\beta$, $+\delta^2\beta$, &c. dans la partie indépendante de z, sont 1° le nombre i, 2° le produit des deux nombres i, & i'; 3° le produit des trois nombres i, i', i'', &c.

Les coëfficiens de $-\delta^2.\beta$, $+\delta^3.\beta$, $-\delta^4.\beta$, &c. dans la partie multipliée par z, sont 1° la somme des deux nombres i & i'; 2° la somme des produits deux à deux, des trois nombres i, i', i''; 3° la somme des produits trois à trois, des quatre nombres i, i', i'', i''', &c.

Les coëfficiens de $-\delta^3\beta$, $+\delta^4\beta$, $-\delta^5\beta$, &c. dans la partie multipliée par z^2, sont 1° la somme des trois nombres i, i', i''; 2° la somme des produits deux à deux, des quatre nombres i, i', i'', i'''; 3° la somme des produits trois à trois, des cinq nombres i, i', i'', i''', i'''', &c.

En opérant de la même maniere sur les latitudes de la Comete, sa latitude après le nombre z de jours depuis l'époque, sera exprimée par la formule suivante,

$$\begin{array}{l} \gamma - i.\delta\gamma + i.i'.\delta^2.\gamma - i.i'.i''.\delta^3.\gamma + i.i'.i''.i'''.\delta^4\gamma - \&c. \\ + z.\left\{\begin{array}{l} \delta\gamma - (i+i').\delta^2\gamma + (i.i'. + i.i'' + i'.i'').\delta^3\gamma \\ - (i.i'i'' + i.i'.i''' + i.i''.i''' + i'.i''.i''').\delta^4\gamma \\ + \&c. \end{array}\right\}; (q) \\ + z^2.\left\{\begin{array}{l} \delta^2.\gamma - (i+i'+i'').\delta^3.\gamma + (i.i' + i.i'' + i.i''' + i'.i'' + i'.i''' + i''.i''').\delta^4\gamma \\ - \&c. \end{array}\right\} \end{array}$$

Cela posé; on aura α, égal à la partie indépendante de z, dans la formule (p).

En réduisant en secondes, le coëfficient de z, & en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes, le loga-

rithme 3,5500072, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par *a*.

En réduisant en secondes le coëfficient de z^2; en prenant ensuite le logarithme du double de ce nombre de secondes, & en retranchant de ce logarithme, le suivant, 1,7855894, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par *b*.

On aura ensuite θ, égal à la partie indépendante de z dans la formule (*q*).

En réduisant en secondes, le coëfficient de z, dans cette formule, & en en-retranchant 3,5500072, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par *h*.

En réduisant en secondes, le coëfficient de z^2, dans cette même formule, & en retranchant 1,7855894, du logarithme du double de ce nombre de secondes, on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par *l*.

C'est de la précision des valeurs de *a*, *b*, *h* & *l*, que dépend l'exactitude de la méthode suivante, & comme leur formation est très-simple, il faut choisir & multiplier les observations, de maniere à les obtenir avec toute la rigueur que ces observations comportent. Ces quantités sont les différentielles $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ & $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, que nous avons exprimées pour plus de simplicité, par les lettres précédentes.

Si le nombre des observations est impair, on pourra fixer l'époque à l'instant de l'observation moyenne, ce qui dispensera de calculer les parties indépendantes de z, dans les deux formules précédentes; car il est visible que ces parties sont respectivement égales à la longitude, & à la latitude de l'observation moyenne.

Pour éclaircir ce qui vient d'être dit, par un exemple, nous choiſirons la ſeconde Comete que M. Mechain a découverte, en 1781, & dont il a calculé l'orbite d'après cette méthode; les obſervations que ce Savant Aſtronome a choiſies pour cet objet, ſont rapportées à la même heure du jour, ſavoir à 8 heures 29′ 44″ tems moyen à Paris; voici ces obſervations.

	Longitude géocentrique de la Comete.		*Latitude boréale.*
1781. Nov. 14	$307^\circ\ 14'\ 45'' = \beta$	....	$55^\circ\ 17'\ 9'' = \gamma$
17	$306^\circ\ 57'\ 32'' = \beta'$	....	$44^\circ\ 17'\ 12'' = \gamma'$
19	$306^\circ\ 51'\ 26'' = \beta''$	....	$39^\circ\ 14'\ 48'' = \gamma''$
22	$306^\circ\ 44'\ 53'' = \beta'''$	....	$33^\circ\ 49'\ 1'' = \gamma'''$
25	$306^\circ\ 41'\ 37'' = \beta''''$	....	$29^\circ\ 58'\ 43'' = \gamma''''$.

En prenant pour époque, l'inſtant de l'obſervation moyenne, c'eſt-à-dire, le 19 Novembre à 8 heures 29′ 44″, on a

$$i = -5;\ i' = -2;\ i'' = 0;\ i''' = 3;\ i'''' = 6$$

ce qui donne

$\delta\beta = -5'\ 44'',33$	$\delta\gamma = -3^\circ\ 39'\ 59'',0$
$\delta\beta' = -3'\ 3'',0$	$\delta\gamma' = -2^\circ\ 31'\ 12'',0$
$\delta\beta'' = -2'\ 11'',0$	$\delta\gamma'' = -1^\circ\ 48'\ 35'',667$
$\delta\beta''' = -1'\ 5'',53$	$\delta\gamma''' = -1^\circ\ 16'\ 46'',0$
$\delta^2\beta = 32'',266$	$\delta^2\gamma = 13'\ 45'',4$
$\delta^2\beta' = 10'',4$	$\delta^2\gamma' = 8'\ 31'',267$
$\delta^2\beta'' = 10'',945$	$\delta^2\gamma'' = 5'\ 18'',278$
$\delta^3\beta = -2'',733$	$\delta^3\gamma = -39'',2666$
$\delta^3\beta' = 0'',0681$	$\delta^3\gamma' = -24'',1236$
$\delta^4\beta = 0'',2546$	$\delta^4\gamma = 1'',3766$

La formule (p) donnera donc pour la longitude géocentrique de la Comete après le petit nombre z de jours comptés depuis l'époque,

$$306^\circ\ 51'\ 26'' - 153'',46.\ z + 10'',54.\ z^2$$

& la formule (q) donnera pour l'expreſſion de ſa latitude,

$$39^\circ\ 14'\ 48'' - 7855'',16 . z + 535'',4 . z^2$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 306^\circ\ 51'\ 26''$$

$$a = -0,0432501\,;\ b = 0,345366$$

$$\theta = 39^\circ\ 14'\ 48''$$

$$h = -2,213844\,;\ l = 17,54354.$$

2° On déterminera la longitude de la terre vue du ſoleil, à l'inſtant que l'on a choiſi pour époque ; ſoit A, cette longitude ; R, la diſtance correſpondante de la terre au ſoleil ; & R', la diſtance qui répond à la longitude $90^\circ + A$, de la terre ; on formera les quatre équations,

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos. \theta^2} + 2Rx. \cos. (A - \alpha) + R^2\,; \quad (1)$$

$$y = \frac{R. \sin. (A - \alpha)}{2a} . \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right\} - \frac{bx}{2a}\,; \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} y = & -x. \left\{ h. \tang. \theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2. \sin. \theta. \cos. \theta}{2h} \right\} \\ & + \frac{R. \sin. \theta. \cos. \theta}{2h} . \cos. (A - \alpha). \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right\} \end{aligned} \right\}; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 = & \, y^2 + a^2. x^2 + \left\{ y. \tang. \theta + \frac{hx}{\cos. \theta^2} \right\}^2 \\ & + 2y. \left\{ (R' - 1). \cos. (A - \alpha) - \frac{\sin. (A - \alpha)}{R} \right\} \\ & + 2ax. \left\{ (R' - 1). \sin. (A - \alpha) + \frac{\cos. (A - \alpha)}{R} \right\} \\ & + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}. \end{aligned} \right\}; \quad (4)$$

Pour tirer de ces équations, les valeurs des trois inconnues x, y & r, on commencera par conſidérer ſi, abſtraction faite du ſigne, b eſt plus grand ou moindre que l ; dans le premier cas, on fera uſage des équations (1), (2) & (4) ; on formera une premiere hypothèſe pour x, en le ſuppoſant par exemple, égal à l'unité ; & l'on en tirera au moyen des équations (1) & (2), les valeurs de r & de y ; on ſubſtituera enſuite ces valeurs dans l'équation

(4), & ſi le reſte eſt nul, ce ſera une preuve que la valeur de x, a été bien choiſie; mais ſi ce reſte eſt négatif, on augmentera la valeur de x, & on la diminuera, ſi le reſte eſt poſitif. On aura ainſi au moyen d'un petit nombre d'eſſais, les véritables valeurs de x, y & r; mais comme ces inconnues peuvent être ſuſceptibles de pluſieurs valeurs, il faudra choiſir celle qui ſatisfait exactement ou à-peu-près, à l'équation (3).

Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, ſi l'on a $l > b$, on fera uſage des équations (1), (3) & (4), & alors ce ſera l'équation (2) qui ſervira de vérification.

Ayant ainſi les valeurs de x, y & r, on formera la quantité,

$$P = \frac{x}{cos.\,\theta^2} . [y + hx.\,tang.\,\theta] + Ry.\,cos.\,(A - \alpha)$$

$$+ x.\,\left\{ (R' - 1).\,cos.\,(A - \alpha) - \frac{sin.\,(A - \alpha)}{R} \right\}$$

$$+ Rax.\,sin.\,(A - \alpha) + R.\,(R' - 1).$$

La diſtance perihélie D, de la Comete, ſera

$$D = r - \tfrac{1}{2}.\,P^2.$$

Le coſinus de l'anomélic v de la Comete, ſera donné par l'équation

$$cos.\,\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{D}{r};$$

d'où l'on conclura par la table du mouvement des Cometes, le tems employé à parcourir l'angle v. Pour avoir l'inſtant du paſſage par le perihélie, il faudra ajouter ce tems à l'époque, ſi P eſt négatif, & le ſouſtraire ſi P eſt poſitif, parce que dans le premier cas, la Comete s'approche de perihélie, & que dans le ſecond cas, elle s'en éloigne.

Relativement à la ſeconde Comete de 1781, l'époque étant

fixée comme ci-deſſus, au 19 Novembre à 8 h 29′ 44″, on a à cette époque,

$$A = 57^\circ\ 57'\ 4''$$

$$R = 0,987248;\ R' = 0,988820$$

les équations (1), (2), (3) & (4), deviennent ainſi,

$$r^2 = 1,6673 87 . x^2 - 0,7106137 . x + 0,974653; \ (1)$$

$$y = -11,0665 + \frac{10,6484}{r^3} + 3,9927 . x; \ (2)$$

$$y = 5,771014 . x + \frac{0,03931687}{r^3} - 0,04086053; \ (3)$$

$$0 = y^2 + 0,00187057 . x^2$$
$$+ [0,8169372 . y - 3,691334 . x]^2 - 1,8820446 . y; \ (4)$$
$$+ 0,0324357 . x + 1,026006 - \frac{2}{r}.$$

Comme on a dans ce cas particulier $l > b$, il faut employer les équations (1), (3) & (4); ces trois équations donnent

$$x = 0,39107$$
$$y = 2,258355$$
$$r = 0,9755798.$$

Ces valeurs ſatisfont à l'équation (2), auſſi bien qu'on doit l'attendre d'une équation qui ne peut-être fort exacte, à cauſe du peu de mouvement de la Comete en longitude. En les ſubſtituant dans l'expreſſion de P, on trouve

$$P = -0,185628.$$

Le ſigne négatif de P, fait connoître que la Comete n'a pas encore atteint ſon perihélie. On trouve enſuite la diſtance perihélie $D = 0,9583509$; & l'anomalie v de la Comete, égale à 15° 16′ 24″, ce qui répond à 10 jours, 40334; d'où il ſuit que le paſſage au perihélie, a eu lieu le 29 Novembre à 18 heures 10′ 34″, tems moyen à Paris. Ayant ainſi à-peu-près, la diſtance perihélie & l'inſtant du paſſage de la Comete par ce point, on pourra les corriger par la méthode ſuivante qui a l'avantage d'être indépendante de la connoiſſance approchée des autres élémens de l'orbite.

Détermination exacte des élémens de l'orbite, lorsque l'on connoît à-peu-près, la distance perihélie & l'instant du passage de la Comete par ce point.

3°. On choisira trois observations éloignées de la Comete; en partant ensuite de la distance perihélie, & de l'instant du passage par ce point, déterminés par ce qui précéde, on calculera facilement les trois anomalies de la Comete, & les trois rayons vecteurs correspondans aux instans des trois observations; soient v, v' & v'' ces anomalies, celles qui précédent le passage de la Comete par le perihélie, devant être supposées négatives; soient de plus r, r', r'', les rayons vecteurs correspondans de la Comete; $v'-v$, & $v''-v$ seront les angles compris entre r & r', & entre r & r''; soit U le premier de ces angles, & U' le second.

Nommons encore α, α', α'', les trois longitudes géocentriques observées de la Comete; θ, θ', θ'', ses trois latitudes géocentriques, les latitudes australes devant être supposées négatives; C, C', C'', les trois longitudes correspondantes du soleil; R, R', R'', ses trois distances à la terre; ϵ, ϵ', ϵ'', les trois longitudes héliocentriques de la Comete; ϖ, ϖ', ϖ'', ses trois latitudes héliocentriques. Cela posé

On imaginera la lettre S, au centre du soleil; la lettre T, au centre de la terre; la lettre C, au centre de la Comete, & la lettre C', à sa projection sur le plan de l'écliptique; on aura l'angle STC', en prenant la différence des longitudes géocentriques du soleil & de la Comete; en ajoutant ensuite le logarithme du cosinus de cet angle, avec celui du cosinus de la latitude géocentrique θ, de la Comete, on aura le

le logarithme du cosinus de l'angle STC; on connoîtra donc dans le triangle STC, le côté ST ou R, le côté SC, ou r, & l'angle STC; on aura ainsi par la trigonométrie rectiligne, l'angle CST; on aura ensuite la latitude héliecentrique ϖ de la Comete, au moyen de l'équation,

$$\sin.\varpi = \frac{\sin.\theta.\sin.CST}{\sin.CTS}.$$

L'angle TSC', est le côté d'un triangle sphérique rectangle dont l'hypothénuse est l'angle TSC, & dont un des côtés est l'angle ϖ; delà on tirera facilement l'angle TSC', & par conséquent la longitude héliocentrique ς, de la Comete.

On aura de la même maniere ϖ', ς', ϖ'' & ς'', & les valeurs de ς, ς', ς'', feront connoître si le mouvement de la Comete est direct, ou rétrograde.

Si l'on conçoit les deux arcs de latitude ϖ & ϖ', réunis au pôle de l'écliptique, ils y formeront un angle égal à $\varsigma'-\varsigma$; & dans le triangle sphérique formé par cet angle, & par les côtés, $90°-\varpi$, & $90°-\varpi'$, le côté opposé à l'angle $\varsigma'-\varsigma$, sera l'angle au soleil compris entre les deux rayons vecteurs r & r'. On le déterminera facilement par les analogies connues de la trigonométrie sphérique, ou par la formule suivante,

$$\cos.V = \cos.(\varsigma'-\varsigma).\cos.\varpi.\cos.\varpi' + \sin.\varpi.\sin.\varpi'$$

dans laquelle V, représente cet angle.

En nommant pareillement V', l'angle formé par les deux rayons vecteurs r & r'', on aura

$$\cos.V' = \cos.(\varsigma''-\varsigma).\cos.\varpi.\cos.\varpi'' + \sin.\varpi.\sin.\varpi''.$$

Maintenant, si la distance perihélie & l'instant du passage de la Comete par ce point, étoient exactement déterminés, on auroit

$$V = U \;\&\; V' = U';$$

mais comme cela n'arrivera preſque jamais, on ſuppoſera

$$m = U - V;\ n = U' - V'.$$

Nous obſerverons ici que le calcul du triangle *S T C*, donne pour l'angle *C S T*, deux valeurs différentes, ſavoir *C S T* & $180° - 2.STC - CST$. On aura ainſi deux valeurs différentes, pour chacune des quantités ε, ϖ, ε', ϖ', ε'', ϖ''. Le plus ſouvent, la nature du mouvement de la Comete fera connoître la valeur de *C S T*, dont on doit faire uſage, ſur-tout ſi ces deux angles ſont fort différens; car alors, l'un d'eux placera la Comete plus loin que l'autre de la terre, & il ſera facile de reconnoître par le mouvement apparent de la Comete, à l'inſtant de l'obſervation, lequel des deux doit être préféré; dans un grand nombre de cas, l'un d'eux ſera négatif, & devra par conſéquent être rejetté; mais s'il reſtoit de l'incertitude à cet égard, on pourra toujours déterminer les véritables valeurs de ε, ε', ε'', en obſervant de prendre pour ε & ε', les deux angles qui rendent *V*, très-peu différent de *U*, & de prendre pour ε & ε'', les deux angles qui rendent *V'*, très-peu différent de *U'*.

On fera enſuite une ſeconde hypothèſe dans laquelle, en conſervant le même inſtant du paſſage par le perihélie que ci-deſſus, on fera varier la diſtance perihélie, d'une petite quantité, par exemple, de la cinquantieme partie de ſa valeur, & l'on cherchera dans cette hypothèſe, les valeurs de $U - V$, & de $U' - V'$; ſoit alors

$$m' = U - V;\ n' = U' - V',$$

Enfin, on formera une troiſieme hypothèſe dans laquelle, en conſervant la même diſtance perihélie que dans la premiere, on fera varier d'un demi jour, ou d'un jour plus ou moins, l'inſtant du paſſage par le perihélie. On cherchera dans cette

nouvelle hypothèse, les valeurs de $U - V$, & de $U' - V'$; soit alors

$$m'' = U - V;\ n'' = U' - V'.$$

Cela posé. Si l'on nomme u, le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance perihélie, pour avoir la véritable; & t, le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le perihélie, pour avoir ce véritable instant; on aura les deux équations

$$u.(m - m') + t(m - m'') = m$$
$$u(n - n') + t(n - n'') = n$$

d'où l'on tirera u & t, & par conséquent la distance perihélie corrigée, & le véritable instant du passage de la Comete par ce point.

La correction précédente suppose que ces élémens déterminés par la premiere approximation, sont assez exacts, pour traiter comme infiniment petites, leurs différences d'avec les véritables. Mais si la seconde approximation ne paroissoit pas encore suffisante, on pourroit recourir à une troisieme, en opérant sur les élémens déja corrigés, comme on a fait sur les premiers; il faut seulement avoir l'attention de leur faire subir de plus petites variations. Mais le plus souvent, cette troisieme approximation sera inutile, sur-tout si dans la premiere, on a fait usage de quatre ou cinq observations bien choisies.

On pourra encore, dans la correction des premiers élémens, faire usage des secondes différences, de la maniere suivante. Au lieu de calculer les valeurs de U, U', V, & V' dans trois hypothèses, on les calculera dans cinq hypothèses, savoir 1° avec les élémens trouvés par la premiere approximation; 2° en faisant varier d'une très-petite quantité, la

diſtance perihélie ; 3° en la faiſant varier du double de cette quantité ; 4° en conſervant la même diſtance perihélie que dans la premiere hypothèſe, & en faiſant varier d'un petit intervalle, l'inſtant du paſſage par le perihélie ; 5° en faiſant varier le même inſtant, du double de cet intervalle. Soient m, m', m'', m''', m'''', les valeurs de $U - V$; n, n', n'', n''', n'''' les valeurs de $U' - V'$; pour déterminer alors les valeurs de u & de t, on formera les deux équations,

$$(4m' - 3m - m'').u + (m'' - 2m' + m).u^2 + (4m''' - 3m - m'''').t + (m'''' - 2m''' + m).t^2 + 2m = 0$$

$$(4n' - 3n - n'').u + (n'' - 2n' + n).u^2 + (4n''' - 3n - n'''').t + (n'''' - 2n''' + n).t^2 + 2n = 0.$$

Les valeurs de u & de t, qui ſatisfont à ces équations, ſeront plus préciſes que les précédentes. Quoique le plus ſouvent, cette plus grande préciſion ſoit inutile, il eſt cependant indiſpenſable de former ces équations, toutes les fois que les termes dépendans des ſecondes différences, ſeront du même ordre que ceux qui dépendent des premieres différences, ce qui arrivera par exemple, lorſque dans une des obſervations, le rayon vecteur de la Comete, ſera preſque perpendiculaire au rayon viſuel de la terre à la Comete.

Ayant ainſi, la vraie diſtance perihélie, & le véritable inſtant du paſſage de la Comete par ce point, on en conclura les autres élémens, de cette maniere.

Soit j, la poſition du nœud qui ſeroit aſcendant, ſi le mouvement de la Comete étoit direct ; & φ, l'inclinaiſon de l'orbite ; on aura les ſix équations ſuivantes,

$$\text{tang. } j. = \frac{\text{tang. } \varpi . \text{ ſin. } 6' - \text{tang. } \varpi' . \text{ ſin. } 6}{\text{tang. } \varpi . \text{ coſ. } 6' - \text{tang. } \varpi' . \text{ coſ. } 6}$$

$$\text{tang. } j. = \frac{\text{tang. } \varpi . \text{ ſin. } 6'' - \text{tang. } \varpi'' . \text{ ſin. } 6}{\text{tang. } \varpi . \text{ coſ. } 6'' - \text{tang. } \varpi'' . \text{ coſ. } 6} . \quad (e)$$

$$\text{tang.}\, j = \frac{\text{tang.}\, \varpi' . \text{sin.}\, \beta'' - \text{tang.}\, \varpi'' . \text{sin.}\, \beta'}{\text{tang.}\, \varpi' . \text{cos.}\, \beta'' - \text{tang.}\, \varpi'' . \text{cos.}\, \beta'}$$

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{\text{tang.}\, \varpi}{\text{sin.}\, (\beta - j)}$$

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{\text{tang.}\, \varpi'}{\text{sin.}\, (\beta' - j)}$$

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{\text{tang.}\, \varpi''}{\text{sin.}\, (\beta'' - j)}; \; (e')$$

On peut choiſir à volonté parmi ces formules ; mais il ſera plus exact d'employer celles dont les numérateurs & les dénominateurs ſont les plus grands.

Suppoſons par exemple, que l'on emploie les deux formules (*e*) & (*e'*); il eſt viſible que la tangente de j, peut également appartenir aux deux angles j, & $180° + j$, j, étant le plus petit des angles poſitifs auxquels elle puiſſe appartenir. Pour déterminer celui des deux qu'il faut choiſir, on obſervera que φ, & tang. φ, doivent être poſitifs, & qu'ainſi, ſin. $(\beta'' - j)$ doit être de même ſigne que tang. ϖ'' ; cette condition déterminera l'angle j, & cet angle ſera la poſition du nœud aſcendant, ſi le mouvement de la Comete eſt direct ; mais ſi ce mouvement eſt rétrograde, il faut lui ajouter 180°, pour avoir la poſition de ce nœud.

L'hypothénuſe du triangle ſphérique rectangle dont $\beta'' - j$, & ϖ'', ſont les côtés, eſt la diſtance de la Comete à ſon nœud aſcendant dans la troiſieme obſervation ; & la différence entre cette hypothénuſe & v'', eſt l'intervalle entre le nœud & le perihélie, compté ſur l'orbite.

Appliquons ces réſultats à la ſeconde Comete de 1781, dont nous avons déja déterminé par une premiere approximation, la diſtance perihélie, & l'inſtant du paſſage par ce point. Pour cela, nous ferons uſage des obſervations du 9

Octobre 1781, & des 17 Novembre & 20 Décembre de la même année; ces obſervations donnent

Tems moyen à Paris.

1781.	9 Oct.	à $16^h\ 50'\ 0''$.	$\alpha = 124^\circ\ 27'\ 42''$;	$\theta = 0^\circ\ 11'\ 40''$
	17 Nov.	à $8^h\ 29'\ 44''$.	$\alpha' = 306^\circ\ 57'\ 32''$;	$\theta' = 44^\circ\ 17'\ 12''$
	20 Déc.	à $6\ \ 6'\ 30''$.	$\alpha'' = 306^\circ\ 17'\ 59''$;	$\theta'' = 17^\circ\ 34'\ 25''$

on a de plus

$$C = 197^\circ\ 13'\ 44''\,;\,; \quad Log.\ R = 9,998864$$
$$C' = 235^\circ\ 55'\ 43''\,; \quad Log.\ R' = 9,994602$$
$$C'' = 269^\circ\ 20'\ 35''\,; \quad Log.\ R'' = 9,992748$$

Cela poſé; on formera une premiere hypothèſe dans laquelle la diſtance perihélie ſera, comme on l'a trouvée ci-deſſus, égale à 0,958359, & l'inſtant du paſſage par le perihélie a eu lieu le 29 Novembre à $18^h\ 10'\ 34''$; on trouvera dans cette hypothèſe,

$$v = -61^\circ\ 18'\ 3''\,; \quad v' = -18^\circ\ 7'\ 12''\,; \quad v'' = 29^\circ\ 8'\ 15''.$$

ce qui donne

$$U = 43^\circ\ 10'\ 41''\,; \quad U' = 90^\circ\ 26'\ 18''$$

on trouvera enſuite

$$\beta = 77^\circ\ 5'\ 50''\,; \quad \beta' = 37^\circ\ 26'\ 37''\,; \quad \beta'' = 346^\circ\ 49'\ 52''$$
$$\varpi = 0^\circ\ 10'\ 34''\,; \quad \varpi' = 18^\circ\ 6'\ 32''\tfrac{1}{2}\,; \quad \varpi'' = 27^\circ\ 12'\ 57''$$

d'où l'on tire

$$V = 42^\circ\ 53'\ 2''\,; \quad V' = 90^\circ\ 9'\ 22''$$

partant

$$m = 17'\ 49''\,; \quad n = 16'\ 56''$$

La ſuite des valeurs de β, β', β'', indique viſiblement, un mouvement rétrograde.

On formera enſuite une ſeconde hypothèſe, dans laquelle en conſervant l'inſtant précédent du paſſage par le perihélie, on augmentera la diſtance perihélie, de 0,003. On trouvera dans cette hypothèſe,

$$m' = -33'\ 53''\,; \quad n' = -12'\ 54''.$$

Enfin, on formera une troisieme hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance perihélie que dans la premiere, on fera varier de 0^{jours}, 25, l'instant du passage par la perihélie, que l'on fixera ainsi au 29 Novembre à 12^{heures} 10′ 31″; cette hypothèse donnera,

$$m'' = 48' \; 16'' \; ; \quad n'' = 27' \; 13'';$$

on tirera de ces valeurs, les deux équations suivantes,

$$3102.\; u - 1829.\; t = 1069$$
$$1760.\; u - \;\; 617.\; t = 1016$$

ce qui donne

$$u = 0,881406\; ; \quad t = 0,910400$$

d'où l'on conclut,

La vraie distance perihélie = 0,9609951;

& le véritable instant du passage par le perihélie, le 29 Novembre à 12^{heures} 42′ 46″ tems moyen à Paris.

Pour s'assurer si ces élémens sont fort approchés, on pourra calculer les valeurs correspondantes de m & de n, & voir si elles sont nulles ou très-petites; or on trouvera que dans le cas présent, ces valeurs ne montent qu'à un petit nombre de secondes; car les élémens corrigés donnent par exemple, pour la premiere & la derniere observation,

$$v = -60^\circ \; 56' \; 37''\; ; \quad v'' = 29^\circ \; 19' \; 22''$$
$$\varpi = 10' \; 33'' \tfrac{1}{2}\; ; \quad \varpi'' = 27^\circ \; 11' \; 56'' \tfrac{1}{4}$$
$$\text{б} = 77^\circ \; 2' \; 22\; ; \quad \text{б}'' = 346^\circ \; 38' \; 53''$$

d'où l'on tire

$$V' = 90^\circ \; 15' \; 59''; \; V' = 90^\circ \; 16' \; 3'' \tfrac{1}{2}$$

& par conséquent $m = -4'' \frac{1}{2}$. Ces élémens étant fort approchés, on en tirera au moyen des formules (e) & (e'), la position j, du nœud ascendant, & l'inclinaison de l'orbite, & l'on trouvera

Lieu du nœud ascendant = 77° 22′ 55″

Inclinaison de l'orbite = 27° 12′ 4″.

Pour déterminer le lieu du perihélie, on observera que

$6'' - j = 269^{\circ}\ 15'\ 58''$, d'où l'on tire $269^{\circ}\ 20'\ 50''$, pour la diſtance de la Comete à ſon nœud, comptée ſur l'orbite, au moment de la troiſieme obſervation; en ajoutant à cette diſtance, l'anomalie v'', que la Comete a parcourue d'un mouvement rétrograde depuis ſon paſſage par le perihélie, on aura $298^{\circ}\ 40'\ 12''$, pour la diſtance du perihélie comptée ſur l'orbite, à ſon nœud aſcendant; en ajoutant enſuite à cette diſtance, la longitude de ce nœud, on aura pour la poſition du perihélie ſur l'orbite, $376^{\circ}\ 3'\ 7''$, ou plus ſimplement $16^{\circ}\ 3'\ 7''$. En raſſemblant donc tous ces élémens, on aura pour les véritables élémens de l'orbite de la ſeconde Comete de 1781.

	Diſtance perihélie, ...	0,9609951
29 Nov. 1781.	Tems moyen à Paris du paſſage au perihélie, ...	12h 42′ 46″
	Lieu du perihélie ſur l'orbite.	16° 3′ 7″
	Lieu du nœud aſcendant, ...	77° 22′ 55″
	Inclinaiſon de l'orbite, ...	27° 12′ 4″.

le mouvement de la Comete eſt rétrograde.

XVII.

La ſuppoſition du mouvement parabolique des Cometes n'eſt pas rigoureuſe; elle eſt même infiniment peu probable, vu le nombre infini des cas qui donnent un mouvement elliptique ou hyperbolique, relativement à ceux qui déterminent le mouvement parabolique. Une Comete mue dans une orbe ſoit parabolique, ſoit hyperbolique, ne ſeroit viſible qu'une ſeule fois; ainſi l'on peut ſuppoſer avec vraiſemblance que les Cometes qui décrivent ces courbes, s'il en exiſte quelques-unes, ont depuis long-tems diſparu, de ſorte que nous n'obſervons aujourd'hui, que celles qui mues dans des orbes rentrantes, ſont ramenées ſans ceſſe à des intervalles plus ou moins grands, dans les régions voiſines du ſoleil.

ſoleil. Si elles ont été obſervées avec préciſion & que l'arc viſible de leurs orbites ſoit conſidérable, on pourra déterminer à peu-près par la méthode ſuivante, le tems de leur révolution.

Pour cela ſuppoſons que l'on ait quatre excellentes obſervations qui embraſſent à-peu-près toute la partie viſible de l'orbite; & que l'on ait déja déterminé par l'article précédent, la parabole qui ſatisfait à-peu-près à ces obſervations. Soient v, v', v'', v''', les anomalies correſpondantes à ces obſervations; r, r', r'', r''', les rayons vecteurs correſpondans; ſoit encore,

$$v' - v = U;\ v'' - v = U';\ v''' - v = U''.$$

cela poſé; on calculera par l'article précedent, avec la parabole qui repréſente à-peu-près ces obſervations, les valeurs de U, U', U'' & celles de V, V', V''; ſoit

$$U - V = m;\ U' - V' = m';\ U'' - V'' = m''.$$

On fera enſuite varier d'une très-petite quantité, la diſtance perihélie dans cette parabole; ſoit alors,

$$U - V = n;\ U' - V' = n';\ U'' - V'' = n''.$$

On formera une troiſieme hypothèſe dans laquelle, en conſervant la même diſtance perihélie que dans la premiere, on fera varier d'une très-petite quantité, l'inſtant du paſſage par le perihélie; ſoit dans cette hypothèſe,

$$U - V = p;\ U' - V' = p';\ U'' - V'' = p''.$$

Enfin on calculera avec la diſtance perihélie & l'inſtant du paſſage de la Comete par ce point, de la premiere hypothèſe, l'angle v, & le rayon vecteur r, en ſuppoſant dans la formule de l'Article XII, $1 - e$, égal à une très-petite quantité, par exemple, à $\frac{1}{60}$; pour avoir l'angle v, dans cette ſuppoſi-

tion, il ſuffira par l'article cité, d'ajouter à l'anomalie v, calculée dans la parabole, un petit angle dont le ſinus eſt

$$\tfrac{1}{10}(1-e).\,tang.\,\tfrac{1}{2}v.\,(4-3.\,coſ.\,\tfrac{1}{2}v^2-6.\,coſ.\,\tfrac{1}{2}v^4);$$

en ſubſtituant enſuite dans l'équation $r = \frac{D}{coſ.\,\frac{1}{2}v^2}.\left(1-\frac{1-e}{2}\,tang.\,\tfrac{1}{2}v^2\right)$ de l'Article XII, cette anomalie v, ainſi calculée dans l'ellipſe, on aura le rayon vecteur r, correſpondant. On calculera de la même maniere v', r'; v'', r''; v''', r'''; delà l'on tirera U, U', U'', V, V', V''; ſoit dans ce cas

$$U-V=q;\quad U'-V'=q';\quad U''-V''=q''.$$

Nommons enfin, u, le nombre par lequel on doit multiplier la variation ſuppoſée dans la diſtance perihélie, pour avoir la véritable; t, le nombre par lequel on doit multiplier la variation ſuppoſée dans l'inſtant du paſſage par le perihélie, & δ, le nombre par lequel on doit multiplier la valeur ſuppoſée pour $1-e$; on formera les trois équations,

$$u.(n-m)+t.(p-m)+\delta.(q-m)+m=0$$
$$u.(n'-m')+t.(p'-m')+\delta.(q'-m')+m'=0$$
$$u.(n''-m'')+t.(p''-m'')+\delta.(q''-m'')+m''=0.$$

On aura au moyen de ces équations, les valeurs de u, t & δ, d'où l'on tirera la vraie diſtance perihélie, le véritable inſtant du paſſage par ce point, & la vraie valeur de $1-e$. Soit D, la diſtance perihélie, & a, le demi grand axe; on aura $a=\frac{D}{1-e}$; d'où il eſt aiſé de conclure par l'Article VIII, que le tems de la révolution de la Comete ſera égal au nombre d'années ſyderales exprimé par $\frac{D^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}$. On aura, comme dans l'article précédent, l'inclinaiſon de l'orbite & les poſitions du nœud aſcendant & du perihélie.

Lorſque l'arc obſervé de l'orbite d'une Comete eſt conſidérable, & ſur-tout lorſqu'il s'étend au-delà de 90° d'anomalie,

ou l'ellipticité commence à devenir ſenſible ; il ſeroit à déſirer que l'on eut quatre obſervations faites avec toute la préciſion que l'on doit attendre de l'Aſtronomie moderne, en ayant ſoin de vérifier la poſition des étoiles auxquelles on rapporte le mouvement de la Comete.

Quelque préciſion que l'on apporte dans ces obſervations, elles laiſſeront toujours de l'incertitude ſur le tems de la révolution des Cometes ; la méthode la plus préciſe pour le déterminer, eſt de comparer les obſervations d'une Comete dans deux apparitions conſécutives ; la reſſemblance des élémens des deux orbites paraboliques déterminées par ces obſervations, fera connoître l'indentité de la Comete, & l'on aura par la différence des inſtans du paſſage par le perihélie, le tems de ſa révolution & ſon grand axe. C'eſt ainſi que l'on a déterminé la période de la Comete obſervée en 1531, 1607, 1682 & 1759 ; période qui eſt un peu inégale, à raiſon des attractions des Planetes, comme M. Clairant l'a fait voir, en ſoumettant à l'analyſe les perturbations que cette Comete a éprouvées de la part de Jupiter & de Saturne.

XVIII.

La combinaiſon des diverſes équations du mouvement elliptique des Planetes, offre un grand nombre de théoremes intéreſſans, qu'il ſeroit trop long de rapporter ici ; nous nous contenterons de démontrer le ſuivant qui par ſa ſimplicité & par ſa généralité, mérite l'attention des Géometres. M. Lambert y eſt parvenu le premier d'une maniere ſynthetique, & depuis, M. de la Grange en a donné une démonſtration analytique ; en voici une fort ſimple.

Le théoreme dont il s'agit peut s'énoncer de cette maniere. *Le tems employé à décrire un arc elliptique, peut être exprimé en fonction de la corde qui le sous tend, de la somme des deux rayons vecteurs qui joignent ses extrêmités, & du grand axe; ensorte que ces trois quantités restans les mêmes, le tems sera le même, quelque soit d'ailleurs l'excentricité de l'ellipse.*

Pour le démontrer, nous reprendrons les équations (11), (12) & (13) de l'Article IX.

$$t = a^{\frac{3}{2}}.(\varpi - e\, fin.\, \varpi)$$

$$r = a.(1 - e\, cof.\, \varpi)$$

$$tang.\, \tfrac{1}{2}\varpi = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\, tang.\, \tfrac{1}{2}v.$$

Supposons que t, ϖ, r & v, correspondent à l'une des extrêmités de l'arc elliptique; & que t', ϖ', r' & v', soient les mêmes quantités correspondantes à l'autre extrêmité; soit,

$$t' - t = T;\ \frac{\varpi' - \varpi}{2} = u;\ \frac{\varpi' + \varpi}{2} = u';\ r + r' = R;$$

on aura évidemment,

$$T = a^{\frac{3}{2}}.[\varpi' - \varpi - e.(fin.\, \varpi' - fin.\, \varpi)];$$

or on a, $fin.\, \varpi' - fin.\, \varpi = 2.\, fin.\, u.\, cof.\, u'$; donc

$$T = 2\, a^{\frac{3}{2}}.[u - e.\, fin.\, u.\, cof.\, u'].$$

on a pareillement

$$R = 2a - a\, e.(cof.\, \varpi' + cof.\, \varpi) = 2a.(1 - e\, cof.\, u.\, cof.\, u'),$$

parce que, $cof.\, \varpi' + cof.\, \varpi = 2.\, cof.\, u.\, cof.\, u'$. Si l'on nomme ensuite c, la corde de l'arc elliptique, on aura

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.\, cof.(v' - v);$$

l'équation, $tang.\, \frac{1}{2}\varpi = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\, tang.\, \frac{1}{2}v$, donne

$$cof.\, v = \frac{a.(cof.\, \varpi - e)}{r};\ fin.\, v = \frac{a.\sqrt{1-e^2}.\, fin.\, \varpi}{r};$$

& l'on aura $cof.\, \upsilon'$ & $fin.\, \upsilon'$, en marquant d'un trait, les quantités ϖ & r; on a d'ailleurs

$$cof.\,(\upsilon' - \upsilon) = cof.\,\upsilon.\, cof.\,\upsilon' + fin.\,\upsilon.\, fin.\,\upsilon';$$

d'où il eſt facile de conclure,

$$rr'.\,cof.\,(\upsilon' - \upsilon) = a^2.(e - cof.\,\varpi).(e - cof.\,\varpi') + a^2.(1 - e^2).\,fin.\,\varpi.\,fin.\,\varpi'$$

& par conſéquent

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.\,cof.\,(\upsilon' - \upsilon) = a^2.(1 - e\,cof.\,\varpi)^2 + a^2.(1 - e\,cof.\,\varpi')^2$$
$$- 2a^2.(e - cof.\,\varpi)(e - cof.\,\varpi') - 2a^2.(1 - e^2).\,fin.\,\varpi.\,fin.\,\varpi',$$

ou

$$c^2 = 2a^2.(1 - e^2).\,[1 - fin.\,\varpi.\,fin.\,\varpi' - cof.\,\varpi.\,cof.\,\varpi'] + a^2 e^2.(cof.\,\varpi - cof.\,\varpi')^2;$$

or on a

$$fin.\,\varpi.\,fin.\,\varpi' + cof.\,\varpi.\,cof.\,\varpi' = cof.\,2u = 2.\,cof.\,u^2 - 1;\; cof.\,\varpi - cof.\,\varpi' = 2\,fin.\,u.\,fin.\,u';$$

d'où l'on tire

$$c^2 = 4a^2\,fin.\,u^2.(1 - e^2\,cof.\,u'^2);$$

on a donc ainſi les trois équations ſuivantes,

$$T = 2a^{\frac{3}{2}}.(u - e\,fin.\,u.\,cof.\,u')$$
$$R = 2a - 2ae.\,cof.\,u.\,cof.\,u'$$
$$c^2 = 4a^2.\,fin.\,u^2.(1 - e^2.\,cof.\,u'^2).$$

La ſeconde de ces équations donne

$$-e.\,cof.\,u' = \frac{R - 2a}{2a.\,cof.\,u};$$

en ſubſtituant cette valeur de $-e\,cof.\,u'$, dans la premiere & dans la troiſieme, on aura les deux ſuivantes,

$$T = 2a^{\frac{3}{2}}.\left[u + \frac{R - 2a}{2a}.\,tang.\,u\right]$$

$$c^2 = 4a^2.\,tang.\,u^2.\left[cof.\,u^2 - \left(\frac{R - 2a}{2a}\right)^2\right]$$

Ces deux équations ne renferment point l'excentricité e; & il réſulte de la premiere que ſi, dans diverſes ellipſes qui ont le même grand axe, la ſomme R, des deux rayons vecteurs & la différence u, des deux anomalies excentriques ſont les mêmes; le tems T, employé à parcourir l'arc elliptique, eſt encore le même.

La ſeconde équation donnera la valeur de u, en fonction

de c, R & a; & cette fonction substituée pour u, dans la premiere, donnera T en fonction des mêmes quantités c, R & a; ce qui est le théoreme que nous nous sommes proposés de démontrer.

L'élimination de u, dans l'expression de T, au moyen de la seconde équation, présente quelques difficultés; mais on parviendra facilement à déterminer T, en fonction de R, c & a, par la considération suivante. Puisque R, c & a, étant les mêmes, le tems T, est le même, quelque soit l'excentricité e; il est visible que si l'on suppose l'ellipse infiniment applatie, ou ce qui revient au même $e = 1$, auquel cas, le corps tombe en ligne droite vers le foyer; T, sera le tems que le corps employera dans cette ellipse, à tomber de la hauteur c, en partant de la distance $\frac{R+c}{2}$. Soit généralement $2ay$, un rayon vecteur de cette ellipse; & V, la vitesse correspondante à ce rayon; on aura par l'Article VI, en y supposant pour plus de simplicité $m = 1$,

$$V = \sqrt{\frac{1-y}{ay}};$$

la differencielle de l'espace décrit est dans ce cas $-2ady$; partant

$$dt = \frac{-2ady}{V} = -\frac{2a^{\frac{3}{2}}.ydy}{\sqrt{y-y^2}}$$

ce qui donne

$$T = 2a^{\frac{3}{2}}.\int\frac{ydy}{\sqrt{y-y^2}}$$

l'intégrale étant prise depuis $y = \frac{R-c}{4a}$, jusqu'à $y = \frac{R+c}{4a}$. Soit y' cette seconde valeur de y; on a

$$2\int\frac{ydy}{\sqrt{y-y^2}} = arc.\,cos.\,(1-2y) - 2\sqrt{y-y^2};$$

l'intégrale étant supposée commencer avec y. Si l'on termine cette intégrale lorsque $y = 1$, elle sera égale à π, π étant toujours le rapportde la demi-circonférance au rayon; or la supposition de $y = 0$, donne $R = c$, & la supposition de $y' = 1$, donne $c = 2a$, c'est-à-dire que l'arc sous tendu par la corde est la demi-ellipse, & qu'ainsi dans ce cas, le tems T, est celui de la demi-révolution; en nommant donc T', le tems de la révolution entiere, on aura $T' = 2a^{\frac{3}{2}}.\pi$, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans l'Article VIII. Delà il est aisé de conclure que l'on a généralement,

$$T = \frac{T'}{2\pi} \cdot \left[arc.\,cos.\,(1 - 2y') - 2\sqrt{y' - y'^2} - arc.\,cos.\,(1 - 2y) + 2\sqrt{y - y^2} \right];$$

d'où il suit que si l'on forme une table des valeurs successives de $\frac{arc.\,cos.\,(1 - 2y) - 2\sqrt{y - y^2}}{2\pi}$, depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$; en prenant dans cette table, la différence des nombres correspondans à $y = \frac{R - c}{4a}$, & $y = \frac{R + c}{4a}$, & multipliant cette différence, par le tems de la révolution entiere dans l'ellipse proposée, on aura le tems employé à décrire l'arc sous tendu par la corde c.

Dans la parabole, a est infini, & par conséquent y, est infiniment petit; on a donc

$$T = 2a^{\frac{3}{2}} \cdot \int y^{\frac{1}{2}}\, dy = \tfrac{4}{3} \cdot \left[\left(\frac{r + r' + c}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r + r' - c}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right];$$

mais si l'on prend pour unité de distance, la moyenne distance de la terre au soleil, le tems de sa révolution est 2π; d'ailleurs ce tems exprimé en jours est égal à $365^{j}, 25634$; en multipliant donc l'expression précédente de T, par $\frac{365^{j}, 25634}{2\pi}$, on aura pour l'expression en jours, du tems T employé à

décrire l'arc ſous tendu par la corde c, dans la parabole,

$$T = 9^{\text{jours}},688724. \left[(r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}\right]$$

XIX.

Je terminerai cette premiere Partie, en expoſant la méthode de calculer les maſſes des Planetes qui ont des ſatellites. On a vu dans l'article VIII, que ſi l'on nomme T, le tems de la révolution d'une Planete dont la maſſe eſt m, & dont a, eſt la moyenne diſtance au ſoleil, on a,

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot 360^{\circ}}{\sqrt{1+m}}$$

la maſſe du ſoleil étant priſe pour l'unité. Il ſuit delà que ſi l'on nomme p, le rapport de la maſſe d'une Planete qui a un ſatellite, à celle du ſoleil; q, la maſſe de ce ſatellite; r, ſa diſtance moyenne à ſa Planete, & T', le tems de ſa révolution; on aura,

$$T' = \frac{r^{\frac{3}{2}} \cdot 360^{\circ}}{\sqrt{p+q}}$$

d'où l'on tire

$$\frac{p+q}{1+m} = \frac{r^3 . T^2}{a^3 . T'^2}.$$

Partant ſi l'on ſuppoſe, conformément à ce qui a lieu dans la nature, que la maſſe des ſatellites eſt peu conſidérable relativement à celle de leur Planete principale, & que celle des Planetes eſt très-petite vis-à-vis de celle du ſoleil, on aura en négligeant q, par rapport à p, & m, par rapport à 1,

$$p = \frac{r^3 . T^2}{a^3 . T'^2}.$$

Un obſervateur placé ſur une Planete qui n'auroit point de ſatellite, pourroit encore déterminer le rapport de la maſſe de cette Planete à celle du Soleil, de la maniere ſuivante.

Pour

Pour cela, ſoit ϖ, la parallaxe du Soleil relativement à la Planete dont la moyenne diſtance au Soleil, eſt priſe pour l'unité; ſin. ϖ, ſera le demi-diamétre de cette Planete. Soit m, le rapport de ſa maſſe à celle du Soleil priſe pour unité; l, la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſon équateur, ou plus exactement, la longueur du pendule à ſecondes à la ſurface de cette Planete ſuppoſée ſphérique, & ſans mouvement de rotation. Cela poſé.

L'eſpace que la péſanteur vers la Planete, feroit parcourir dans une ſeconde, eſt, comme on le démontre en Mécanique, $\frac{\pi^2 . l}{2}$, π, étant toujours le rapport de la demi-circonférence au rayon; d'où il ſuit qu'à la diſtance 1, du centre de la Planete, cette péſanteur ne feroit plus décrire par ſeconde, que l'eſpace $\frac{\pi^2 . l}{2}$. ſin. ϖ^2. Maintenant, ſi l'on nomme T, le tems de la révolution de la Planete autour du Soleil, exprimé en ſecondes; le petit arc qu'elle décrit dans une ſeconde, par ſon moyen mouvement, ſera $\frac{2\pi}{T}$, & ſon ſinus verſe ſera $\frac{2\pi^2}{T^2}$; ce ſinus exprime l'eſpace que la péſanteur vers le Soleil fait parcourir dans une ſeconde, à la diſtance. 1. de ſon centre; or les maſſes du Soleil & de la Planete ſont entr'elles comme leurs forces attractives à la même diſtance, & ces forces ſont comme les eſpaces qu'elles font parcourir dans le même tems; on aura donc la proportion ſuivante $m : 1 :: \frac{\pi^2 . l . \text{ſin.} \varpi^2}{2} : \frac{2\pi^2}{T^2}$; d'où l'on tire

$$m = \frac{l}{4 . \text{ſin.} \varpi} . T^2 . \text{ſin.} \varpi^3$$

expreſſion dans laquelle on doit obſerver que $\frac{l}{\text{ſin.} \varpi}$ étant le rapport de la longueur du pendule à ſecondes, au demi diamétre de la Planete, il eſt donné indépendamment de la paral-

I

laxe, par l'obſervation immédiate de la longueur du pendule, & de la grandeur des degrés du méridien.

Si l'on nomme δ, la denſité moyenne du Soleil & θ, ſon demi-diamétre vu de la Planete dont nous prendrons la denſité moyenne, pour l'unité; le rapport m, de ſa maſſe à celle du Soleil ſera égal à $\frac{\text{ſin.}\,\varpi^3}{\delta.\,\text{ſin.}\,\theta^3}$, ce qui donne en comparant cette valeur de m, à la précédente,

$$\delta = \frac{4}{\frac{l}{\text{ſin.}\,\varpi}.T^2.\text{ſin.}\,\theta^3};$$

il eſt remarquable que cette expreſſion ſoit indépendante de la parallaxe.

Les obſervations donnent relativement à la terre,

$$\log.\ \frac{l}{\text{ſin.}\,\varpi}.\ T^2 = 8,1896046$$

$$\varpi = 8''\tfrac{1}{2};\ \theta = 16'\,2''$$

partant

$$m = \frac{1}{371306};\ \delta = 0,254806$$

cette valeur de δ, exprime le rapport de la denſité moyenne du Soleil à la denſité moyenne de la terre, & ce rapport eſt exact, quelque valeur que l'on adopte pour la parallaxe du Soleil; ainſi Neuton, en partant d'une parallaxe de $10''\tfrac{1}{2}$, a trouvé pour la terre, une maſſe double environ de la précédente, tandis que le rapport qu'il donne entre les denſités du Soleil & de la terre, eſt à-peu-près celui que nous venons de déterminer.

Fin de la premiere Partie.

SECONDE PARTIE.

De la Figure des Planetes.

I.

La loi de la péſanteur univerſelle dont tous les phénomenes aſtronomiques démontrent l'exiſtence, a lieu non-ſeulement entre les corps céleſtes, mais encore entre leurs plus petites molécules ; l'attraction mutuelle de ces molécules, les réunit en maſſes à-peu-près ſphériques, & la péſanteur à la ſurface de ces grands corps, eſt le réſultat de toutes ces forces attractives, combinées avec la force centrifuge qui naît de leurs mouvemens de rotation. On voit ainſi que la détermination de la figure des Planetes dépend des loix que ſuit l'attraction d'un corps relativement à ſa figure. La recherche de ces loix pour un corps de figure quelconque, ſurpaſſant les forces de l'analyſe ; nous nous bornerons ici à conſidérer les ſolides terminés par des ſurfaces du ſecond ordre, ce qui ſuffit pour l'objet que nous nous propoſons ; car c'eſt une propriété remarquable de la loi de la gravitation univerſelle en raiſon directe des maſſes, & réciproque au quarré des diſtances, de faire décrire aux Planetes autour du Soleil, des lignes du ſecond ordre, & de terminer leurs figures, par des ſurfaces du ſecond ordre.

On nomme *ſurfaces du ſecond ordre*, celles dont la nature peut être exprimée par une équation du ſecond ordre; or les analyſtes trouveront ſans peine, que par un choix convenable des coordonnées, on peut ramener l'équation la plus générale du ſecond ordre, à cette forme très-ſimple,

$$x^2 + m y^2 + n z^2 = k^2;$$

m, n, k, étant des conſtantes quelconques; l'origine des coordonnées eſt alors au centre du ſphéroïde dont les axes des x, des y & des z, ſont les trois axes principaux.

En faiſant $z = 0$, on a

$$x^2 + my^2 = k^2.$$

Cette équation eſt celle de la ſection du ſphéroïde par un plan qui paſſe par les axes des x & des y; & il eſt viſible que cette ſection eſt une ellipſe, ſi m eſt poſitif, & une hyperbole, ſi m eſt négatif.

Si l'on fait pareillement, $y = 0$, on a,

$$x^2 + n z^2 = k^2;$$

cette équation eſt celle de la ſection du ſphéroïde par un plan qui paſſe par les axes des x & des z, & cette ſection eſt une ellipſe, ou une hyperbole, ſuivant que n eſt poſitif, ou négatif. Comme nous ne conſidérerons ici que des ſolides finis, nous ſuppoſerons m & n, poſitifs; dans ce cas, le ſphéroïde eſt une ellipſoïde dont les trois demi axes principaux, qui ſont en même-tems les axes des x, des y & des z, ſont k, $\frac{k}{\sqrt{m}}$, $\frac{k}{\sqrt{n}}$; k & $\frac{k}{\sqrt{m}}$, étant les deux demi-axes de la premiere ſection, & k, $\frac{k}{\sqrt{n}}$, étant ceux de la ſeconde ſection.

Enfin ſi l'on déſigne par π, le rapport de la demi-circonférence au rayon, la ſolidité du ſphéroide, ſera $\frac{4\pi . k^3}{3.\sqrt{mn}}$. Cela poſé.

II.

Considérons généralement l'attraction d'un sphéroïde quelconque, sur un point placé hors de lui; soient a, b, c, les trois coordonnées de ce point; x', y', z', les coordonnées d'une molécule quelconque du sphéroïde; la distance du point attiré à cette molécule, sera $\sqrt{(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2}$; partant si l'on désigne par dM la masse de la molécule, & par V la somme des molécules du sphéroïde, divisées par leur distance au point attiré, on aura

$$V=\int\frac{dM}{\sqrt{(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2}}.$$

L'attraction de la molécule dM sur ce point, est égale à $\frac{dM}{(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2}$; cette attraction décomposée parallelement à l'axe des x', & dirigée vers le centre du sphéroïde, est $\frac{(a-x').dM}{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$; soit A la somme de toutes ces attractions, ou ce qui revient au même, l'attraction entiere du sphéroïde décomposée parallelement à l'axe des x'; on aura

$$A=\int\frac{(a-x').dM}{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on nomme pareillement, B, & C, les attractions du sphéroïde sur le même point, décomposées parallelement aux axes des y', & des z', & dirigées vers le centre du sphéroïde, on aura

$$B=\int\frac{(b-y').dM}{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$C=\int\frac{(c-z').dM}{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il eſt viſible que

$$\int \frac{(a-x').dM}{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{dV}{da}\right)$$

$\left(\frac{dV}{da}\right)$, exprime ſuivant la notation de l'Art. X. (*premiere Partie*), la différentielle de V, priſe en ne faiſant varier que a, & diviſée par da; on aura donc

$$A = -\left(\frac{dV}{da}\right)$$

& l'on trouvera de la même maniere

$$B = -\left(\frac{dV}{db}\right)$$

$$C = -\left(\frac{dV}{dc}\right).$$

Au moyen de ces équations, on aura par de ſimples différentiations A, B, C, lorſque V ſera connu; ainſi nous nous attacherons principalement à déterminer cette derniere quantité. On peut mettre ſon expreſſion, ſous cette forme

$$V = \int \frac{dM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{1-\frac{(2ax'+2by'+2cz'-x'^2-y'^2-z'^2)}{a^2+b^2+c^2}}};$$

en la réduiſant en ſérie, on aura

$$V = \int \frac{dM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}.\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}.\frac{2ax'+2by'+2cz'-x'^2-y'^2-z'^2}{a^2+b^2+c^2} \\ +\frac{3}{8}.\frac{(2ax'+2by'+2cz'-x'^2-y'^2-z'^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\&c. \end{array}\right\}$$

or ſi l'on ſuppoſe que l'origine des x', des y' & des z', eſt au centre de gravité du ſphéroïde, on a par la propriété connue de ce centre, $\int x'\,dM=0$; $\int y'\,dM=0$; $\int z'\,dM=0$; partant on aura

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{dM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)-\frac{3}{8}\frac{(2ax'+2by'+2cz'-x'^2-y'^2-z'^2)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ -\&c. \end{array}\right\};$$

M, étant la maſſe entiere du ſphéroïde; de ſorte que ſi l'on

néglige les carrés de x', y', z', & leurs produits deux deux, relativement au carré, $a^2 + b^2 + c^2$, de la distance du point attiré au centre du sphéroïde, on aura

$$V = \frac{M}{(a^2 + b + c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi la valeur de V est alors la même que si toute la masse du sphéroïde étoit réunie à son centre de gravité ; & comme les attractions du sphéroïde, paralleles aux axes des x', des y' & des z', sont, parce qui précède, les différences partielles de V, prises par rapport aux quantités a, b, c ; il en résulte que le point dont il s'agit, est attiré parallelement à ces axes, comme si toute la masse du sphéroïde étoit concentrée dans son centre de gravité.

Si l'on conçoit le centre de gravité du sphéroïde, lié par une droite inflexible, avec le point attiré ; il est clair que ce centre agira sur le point, avec une force égale à celle dont le point est sollicité vers lui ; d'où il suit que l'action d'un corps fort éloigné, sur le centre de gravité du sphéroïde, est la même que si la masse entiere du sphéroïde étoit réunie à ce centre ; & si l'on regarde comme une quantité très-petite du premier ordre, le rapport des dimensions du sphéroïde, à la distance de son centre de gravité au corps attirant ; la proposition précédente sera vraie aux quantités près du second ordre.

Les dimensions des corps célestes étant fort petites relativement à leurs distances respectives, leurs centres de gravité se meuvent à très-peu-près de la même maniere, que si leurs masses y étoient réunies, de sorte que dans la théorie de leurs attractions réciproques, on peut considérer ces corps comme autant de points. La considération suivante se joint encore à celle-ci, pour rendre cette supposition plus

de

exacte; nous ferons voir dans la suite, qu'une sphére attire un point extérieur, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre; or la figure des corps célestes différe peu d'une sphére; ainsi ces corps s'attirent à très-peu-près, comme s'ils étoient réunis à leurs centres de gravité, par la double considération de leurs figures à-peu-près sphériques, & de leurs grandes distances relativement aux dimensions de leurs masses; l'erreur de cette supposition ne peut donc être que le produit d'une quantité du second ordre, par la petite différence de leur figure d'avec la sphére.

Si, au lieu d'un sphéroïde, on considére un systême quelconque de corps très-voisins les uns des autres & attirés par un corps fort éloigné; les résultats précédens subsisteront encore, avec cette seule différence que dM n'exprimera plus une molécule infiniment petite, mais une masse finie; de maniere que dans l'expression de V le signe $\int$, représentera une intégrale finie. Il suit delà que le centre de gravité du systême d'une Planete & de ses satellites, se meut à très-peu-près autour du Soleil, comme si tout le systême y étoit réuni; ainsi en n'ayant égard qu'aux actions du Soleil, d'une Planete, & de ses satellites, ce centre décrit une orbe elliptique, aux quantités près du second ordre.

Le mouvement elliptique de la Planete, n'est exact qu'aux quantités près du premier ordre; mais il est facile de déterminer, par ce qui précéde, les perturbations du premier ordre qu'elle éprouve de la part de ses satellites; car le mouvement du centre de gravité du systême de la Planete & de ses satellites étant à très-peu-près elliptique, il est donné par la théorie exposée dans la premiere Partie; & les observations faisant connoître à chaque instant la position des satellites autour

de

de la Planete, il eſt aiſé d'en conclure la poſition de la Planete relativement à ce centre.

III.

Revenons maintenant aux attractions des ſphéroïdes, & pour déterminer V par une approximation facile, imaginons un plan paſſant par l'axe des x', & par la molécule dM; ſoit q, l'inclinaiſon de ce plan ſur celui des x' & des y'; p, l'angle que fait l'axe des x', avec le rayon mené du centre du ſphéroïde à la molécule dM, & u, ce rayon; on aura viſiblement,

$$x' = u.\ \text{coſ.}\ p$$
$$y' = u.\ \text{ſin.}\ p.\ \text{coſ.}\ q$$
$$z' = u.\ \text{ſin.}\ p.\ \text{ſin.}\ q.$$

D'ailleurs, la molécule dM du ſphéroïde eſt égale au petit parallélipipéde rectangle dont les trois dimenſions ſont du, udp, $udq.\ \text{ſin.}\ p$; & par conſéquent elle eſt égale à $u^2.\ du.\ dp.\ dq.\ \text{ſin.}\ p$; en ſubſtituant donc ces valeurs, dans l'expreſſion (5) de V de l'article précédent, & en obſervant que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = u^2$, & que $2ax' + 2by' + 2cz' - x'^2 - y'^2 - z'^2 = u.\ [2a.\ \text{coſ.}\ p + 2b.\ \text{ſin.}\ p.\ \text{coſ.}\ q + 2c.\ \text{ſin.}\ p.\ \text{ſin.}\ q - u]$, on aura

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}.\iiint u^2.du.dp.dq.\text{ſin.}p \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{8}u^2.\ \dfrac{[2a.\text{coſ.}p + 2b\,\text{ſin.}p.\text{coſ.}q + 2c.\text{ſin.}p.\text{ſin.}q - u]^2}{a^2+b^2+c^2} \\ -\ \&c. \end{array} \right\}$$

expreſſion que l'on peut mettre ſous cette forme plus ſimple,

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}.\iiint u^4.\ du.\ dp.\ dq.\ \text{ſin.}\ p.\ [G + G'.\ u + G''u^2 + \&c.]$$

dans laquelle G, G', G'', &c. ſont des fonctions rationelles & entieres de ſin. p, coſ. p, ſin. q, coſ. q, & qui de plus ont l'avantage d'être d'autant moindres, que la diſtance $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, du point attiré au centre du ſphéroïde, eſt plus grande, en-

ſorte que ſi l'on regarde comme une quantité très-petite du premier ordre, l'unité diviſée par cette diſtance; G', ſera du premier ordre; G'', ſera du ſecond ordre, & ainſi de ſuite.

La triple intégrale de cette expreſſion de V doit être priſe d'abord relativement à u, depuis $u = -U'$, juſqu'à $u = U$, U étant le rayon u, pris depuis le centre juſqu'à la ſurface du ſphéroïde du côté des u poſitifs, & U' étant ce même rayon pris depuis le centre, juſqu'à la ſurface du côté des u négatifs. Relativement aux ſphéroïdes elliptiques, il eſt clair que $U' = U$; ainſi l'intégrale relative à u doit être priſe depuis $u = -U$, juſqu'à $u = U$, ce qui fera diſparoître toutes les puiſſances paires de U. Quant aux intégrales relatives aux angles p & q, elles doivent être priſes l'une & l'autre depuis p & q, égaux à zéro, juſqu'à p & q, égaux à 180°. On aura ainſi, en intégrant d'abord par rapport à u,

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \iint U^5 . dp . dq . \sin. p . \left[\frac{G}{5} + \frac{G'' U^2}{7} + \frac{G'''' U^4}{9} + \&c. \right].$$

Préſentement, ſi dans l'équation à la ſurface des ſphéroïdes elliptiques.

$$x^2 + m y^2 + n z^2 = k^2$$

on ſubſtitue $U . \cos. p$, au lieu de x; $U . \sin. p . \cos. q$, au lieu de y, & $U . \sin. p . \sin. q$, au lieu de z, on aura

$$U^2 = \frac{k^2}{1 - \sin. p^2 . [(1-m) . \cos. q^2 + (1-n) . \sin. q^2]}.$$

En développant cette valeur de U dans une ſuite ordonnée par rapport aux puiſſances de $1 - m$, & de $1 - n$, & en la ſubſtituant dans le terme $\iint dp . dq . \sin. p . \frac{2}{5} . G . U^5$, ce terme ſe changera dans une ſérie ordonnée par rapport aux puiſſances des mêmes quantités, $1 - m$, & $1 - n$, & dont les différens termes ſeront facilement intégrables relativement à p & à q, de maniere que les intégrations étant faites, on aura

$\int\int dp.\ dq.$ sin. $p.\ \frac{2}{5}\ G.\ U^5$, égal à k^5, multiplié par une suite ordonnée par rapport aux puissances de $1 - m$, & de $1 - n$. soit R, cette série, & faisons

$$k^2.\frac{1-m}{m} = \theta\ ;\ k^2.\frac{1-n}{n} = \varpi;$$

Il est clair que k^2, & $\frac{k^2}{m}$, étant les carrés des demi-axes de la section du sphéroïde par un plan qui passe par les axes des x & des y, $k^2.\frac{1-m}{m}$, sera plus ou moins le carré de l'excentricité de cette ellipse. Pareillement $k^2.\frac{1-n}{n}$, sera plus ou moins le carré de l'excentricité de la section du sphéroïde par le plan qui passe par les axes des x & des z. Cela posé; pour ordonner la série R par rapport aux puissances de θ, & de ϖ, on observera que

$$1 - m = \frac{\theta}{k^2 + \theta} = \frac{\theta}{k^2} - \frac{\theta^2}{k^4} + \frac{\theta^3}{k^6} - \&c.$$

$$1 - n = \frac{\varpi}{k^2 + \varpi} = \frac{\varpi}{k^2} - \frac{\varpi^2}{k^4} + \frac{\varpi^3}{k^6} - \&c.$$

Ces valeurs substituées dans la série R, la changeront dans une nouvelle série ordonnée par rapport aux puissances de $\frac{\theta}{k^2}$, & de $\frac{\varpi}{k^2}$. Si l'on divise cette nouvelle série par $\frac{4\pi}{3.\sqrt{mn}}$, ou, ce qui revient au même, par $\frac{4\pi}{3}.\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{k^2}\right).\left(1+\frac{\varpi}{k^2}\right)}$, & que l'on réduise ces radicaux en séries, on formera une nouvelle suite ordonnée par rapport aux puissances des mêmes quantités $\frac{\theta}{k^2}$, & $\frac{\varpi}{k^2}$; & si l'on nomme S cette derniere série, on aura $\frac{4}{3}\pi.\frac{S}{\sqrt{mn}} = R$; or on a

$$\int\int dp.\,\mathit{sin.}\ p.\ \frac{2}{5}\ G.\ U^5 = k^5.\ R;$$

partant $\int\int dp.\ dq.\ \mathit{sin.}\ p.\ \frac{2}{5}\ G.\ U^5 = \frac{4\pi.\ k^3}{3.\sqrt{mn}}.\ k^2.\ S.$

K 2

On réduira pareillement le terme $\iint dp.\, dq.\, fin.\, p.\, \frac{2}{7} G''.\, U^7$, à cette forme, $\frac{4\pi.\, k^3}{3\sqrt{mn}}.\, k^4.\, S'$; S' étant encore une férie ordonnée par rapport aux puiffances de $\frac{\theta}{k^2}$, & de $\frac{\varpi}{k^2}$; l'expreffion précédente de V pourra donc être mife fous la forme fuivante, en obfervant que par l'Article I, $\frac{4\pi.\, k^3}{3.\sqrt{mn}} = M$, M étant la maffe du fphéroïde,

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.\, [a^2 + b^2 + c^2 - k^2.\, S - k^4.\, S' - k^6.\, S'' - \&c.]. \; (r)$$

cette expreffion fera d'autant plus convergente que k fera plus petit rélativement à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, & que $\frac{\theta}{k^2}$, & $\frac{\varpi}{k^2}$ feront de plus petits nombres.

Soit U la fomme de tous les termes de la férie

$$\frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.\, [a^2 + b^2 + c^2 - k^2.\, S. - k^4.\, S' - k^6.\, S'' - \&c.],$$

qui ne renferment point k. On obtiendra ces termes dans la férie $k^2.\, S$, en prenant dans la férie S, les termes multipliés par les premieres puiffances de $\frac{\theta}{k^2}$, & $\frac{\varpi}{k^2}$; car il eft clair que ces termes en produiront d'autres indépendans de k, dans la férie $k^2.\, S$. Pareillement les termes de la férie S', multipliés par les carrés & le produit de $\frac{\theta}{k^2}$, & $\frac{\varpi}{k^2}$, en produiront d'indépendans de k, dans la férie $k^4.\, S'$, & ainfi de fuite. Parmi les termes dépendans de k, ne confidérons que ceux qui font multipliés par la plus petite puiffance de $\frac{\theta}{k^2}$; foit r, cette puiffance. Parmi ces derniers termes, ne confidérons que ceux qui font multipliés par la plus petite puiffance de $\frac{\varpi}{k^2}$, que nous défignerons par r'; enfin parmi les

coëfficiens de $\frac{\theta^r}{k^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}$, ne considérons que ceux qui sont multipliés par la plus petite puissance de k^2; soit i, cette puissance. En ressemblant tous ces termes dans la série $\frac{-k^2.S - k^4 S' - k^6.S'' - \&c}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$, leur somme pourra être exprimée par $k^{2i}.\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P$, P, étant une fonction de a, b, c, indépendante de k, θ, & ϖ. On aura ainsi

$$V = M.\left\{U + k^{2i}.\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P + \&c.\right\}.$$

i, étant égal ou plus grand que l'unité, & r, r', étant des nombres entiers positifs. Cette forme de V nous sera utile dans la suite.

On doit observer relativement à V, que cette quantité est une fonction homogêne de a, b, c, & k, de la dimension 2, comme il est facile de s'en convaincre par l'inspection seule de son expression intégrale. On peut s'en assurer encore *à priori*, en considérant que chaque molécule du sphéroïde est de la dimension 3; & qu'ainsi la somme V de toutes ces molécules divisées par leur simple distance au point attiré, est de la dimension 2; il est visible d'ailleurs que cette quantité ne peut être composée que des quantités linéaires a, b, c, relatives à la position du point attiré, & de la quantité k relative aux dimensions du sphéroïde. Il suit delà que le facteur M de l'expression précédente de V étant de la dimension 3; U, doit être de la dimension -1, ainsi que le terme $k^{2i}.\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P$; or θ, & ϖ, étant de la dimension 2, $\frac{\theta^r}{k^{2r}}$, & $\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}$ sont de dimension nulle; partant $k^{2i}.P$. doit être de la dimension -1, d'où il résulte que P,

doit être de la dimenſion, $-1-2i$, & comme i eſt au moins égal à l'unité, P doit être au moins de la dimenſion -3.

IV.

Puiſque la méthode précédente ne peut nous conduire qu'à une valeur approchée de V, voyons s'il n'eſt pas poſſible par une autre méthode, d'obtenir rigoureuſement cette valeur. Pour cela, au lieu de prendre le centre du ſphéroïde, pour l'origine des angles p & q, fixons cette origine au point attiré. Soit donc r, la diſtance d'une molécule dM du ſphéroïde à ce point; p, l'angle que forme ce rayon, avec une droite menée par le point attiré parallelement à l'axe de x'; q, l'angle que forme avec l'axe des y', la projection de r, ſur le plan des y', & des z'; x', y', z', étant toujours les coordonnées de la molécule dM & a, b, c, étant celles du point attiré, on aura

$$x' = a - r.\ coſ.\ p.$$
$$y' = b - r.\ ſin.\ p.\ coſ.\ q.$$
$$z' = c - r.\ ſin.\ p.\ ſin.\ q.$$

La molécule dM eſt égale au parallelipipéde rectangle dont les trois dimenſions ſont dr, rdp, & $rdq.\ ſin.\ p$, & par conſéquent, elle eſt égale à $r^2\ dr.\ dp.\ dq.\ ſin.\ p$. En diviſant donc cette molécule, par ſa diſtance r au point attiré, on aura pour la ſomme entiere de ces quotients, ou ce qui revient au même, pour V

$$V = \int\int\int r.\ dr.\ dp.\ dq.\ ſin.\ p.$$

Si l'on intégre cette quantité par rapport à r, & que l'on déſigne toujours par r, le rayon r, à ſon entrée dans le ſphéroïde, & par r', ce même rayon à ſa ſortie, on aura

$$V = \tfrac{1}{2}\int\int (r'^2 - r^2)\ dp.\ dq.\ ſin.\ p = \tfrac{1}{2}\int\int (r'+r).(r'-r).\ dp.\ dq.\ ſin.\ p;$$

ensorte que pour avoir V, il ne s'agit plus que de substituer dans cette expression, au lieu de $r'+r$ & de $r'-r$, leurs valeurs en p, & en q, données par l'équation à la surface du sphéroïde, & de l'intégrer ensuite pour toutes les valeurs possibles de p, & de q.

L'attraction de la molécule dM, décomposée parallelement à l'axe des x', est égale à $\frac{dM}{r^2}.\, cos.\, p$, & par conséquent égale à $dr.\, dp.\, dq.\, sin.\, p.\, cos.\, p$, en substituant au lieu de dM, sa valeur $r^2.\, dr.\, dp.\, dq.\, sin.\, p.$ on aura donc $\int\int\int dr.\, dp.\, dq.\, sin.\, p.\, cos.\, p.$ pour l'attraction entiere du sphéroïde parallelement à l'axe des x'; ce sera l'expression de la quantité que nous avons nommée A dans l'Article II; en l'intégrant par rapport à r, on aura

$$A = \int\int (r' - r).\, dp.\, dq.\, sin.\, p.\, cos.\, p\,;$$

on aura de la même maniere

$$B = \int\int (r' - r).\, dp.\, dq.\, sin.\, p^2.\, cos.\, q$$
$$C = \int\int (r' - r).\, dp.\, dq.\, sin.\, p^2.\, sin.\, q.$$

Ces équations ont lieu généralement pour tous les sphéroïdes; voyons ce que deviennent $r'+r$, & $r'-r$, à la surface des sphéroides elliptiques.

Pour cela reprenons l'équation à cette surface,

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2.$$

En y substituant $a - r.\, cos.\, p$, au lieu de x; $b - r.\, sin.\, p.\, cos.\, q$, au lieu de y, & $c - r.\, sin.\, p.\, cos.\, q$, au lieu de z, on aura,

$$r^2.\, [cos.\, p^2 + m.\, sin.\, p^2.\, cos.\, q^2 + n.\, sin.\, p^2.\, sin.\, q^2] - 2r.\, [a.\, cos.\, p + mb.\, sin.\, p.\, cos.\, q + nc.\, sin.\, p.\, sin.\, q]$$
$$= k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2.$$

Soit, pour abréger,

$$L = cos.\, p^2 + m.\, sin.\, p^2.\, cos.\, q^2 + n\, sin.\, p^2.\, sin.\, q^2$$
$$Q = a.\, cos.\, p + mb.\, sin.\, p.\, cos.\, q + nc.\, sin.\, p.\, sin.\, q$$
$$R = Q^2 + [k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2].\, L.$$

L'équation précédente donnera,

$$r = \frac{Q \pm \sqrt{R}}{L}.$$

Si l'on prend le radical en *moins*, on aura la valeur du rayon r, à son entrée dans le sphéroïde, & l'on aura sa valeur à la sortie du sphéroïde, en prenant le radical en *plus*. On aura ainsi,

$$r' + r = \frac{2.Q}{L}; \; r' - r = \frac{2.\sqrt{R}}{L};$$

les expressions de V, A, B, C, deviennent par conséquent,

$$V = 2.\int\int dp.\, dq.\, \text{sin.}\, p.\ \frac{Q.\sqrt{R}}{L^2}$$

$$A = 2.\int\int dp.\, dq.\, \text{sin.}\, p.\, \text{cos.}\, p.\, \frac{\sqrt{R}}{L}$$

$$B = 2.\int\int dp.\, dq.\, \text{sin.}\, p^2.\text{cos.}\, q.\, \frac{\sqrt{R}}{L}$$

$$C = 2.\int\int dp.\, dq.\, \text{sin.}\, p^2.\, \text{sin.}\, q.\, \frac{\sqrt{R}}{L}.$$

Ces expressions présentent quelques rapports remarquables que nous allons considérer.

Nous observerons d'abord que les doubles intégrales précédentes doivent être prises pour toutes les valeurs possibles de p, & de q; or les limites de ces valeurs sont celles où l'on a $\sqrt{R} = 0$, parce qu'à ces limites r étant égal à r', le rayon r, est tangent à la surface du sphéroïde. Il suit delà que si l'on prend les premieres différences des quantités V, A, B, C, par rapport à l'une quelconque des six quantités a, b, c, k, m & n, on pourra se contenter de différentier les quantités sous le signe $\int$, & se dispenser d'avoir égard à leurs variations aux limites des intégrales, puisqu'à ces limites, les quantités enveloppées

enveloppées ſous ce ſigne, ſont nulles ; on aura ainſi

$$\left(\frac{dV}{da}\right) = 2.\iint dp.\, dq.\, \sin. p. \left\{ \frac{d. \frac{Q\sqrt{R}}{L^2}}{da} \right\}$$

& il en eſt de même des différences partielles de V, priſes par rapport aux autres quantités, b, c, k, m & n, ainſi que des différences partielles de A, B, C, priſes par rapport aux mêmes quantités. Cela poſé,

Il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation, que l'on a entre les quatre quantités V, A, B, C, les trois équations ſuivantes aux différences partielles,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{m-1}{m}.\, b.\left(\frac{dA}{db}\right) + \frac{n-1}{n}.\, c.\left(\frac{dA}{dc}\right) + \left(\frac{k^2-a^2-b^2-c^2}{2k}\right).\left(\frac{dA}{dk}\right) \\ & -(m-1).\left(\frac{dA}{dm}\right) - (n-1).\left(\frac{dA}{dn}\right) - A + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{da}\right) + \frac{a}{2k}.\left(\frac{dV}{dk}\right);\ (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{m-1}{m}.\, b.\left(\frac{dB}{db}\right) + \frac{n-1}{n}.\, c.\left(\frac{dB}{dc}\right) + \left(\frac{k^2-a^2-b^2-c^2}{2k}\right).\left(\frac{dB}{dk}\right) \\ & -(m-1).\left(\frac{dB}{dm}\right) - (n-1).\left(\frac{dB}{dn}\right) - B + \frac{1}{2m}.\left(\frac{dV}{db}\right) + \frac{b}{2k}.\left(\frac{dV}{dk}\right);\ (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{m-1}{m}.\, b.\left(\frac{dC}{db}\right) + \frac{n-1}{n}.\, c.\left(\frac{dC}{dc}\right) + \left(\frac{k^2-a^2-b^2-c^2}{2k}\right).\left(\frac{dC}{dk}\right) \\ & -(m-1).\left(\frac{dC}{dm}\right) - (n-1).\left(\frac{dC}{dn}\right) - C + \frac{1}{2n}.\left(\frac{dV}{dc}\right) + \frac{c}{2k}.\left(\frac{dV}{dk}\right);\ (3) \end{aligned}$$

On peut éliminer de ces trois équations, les quantités A, B, C, en y ſubſtituant leurs valeurs $-\left(\frac{dV}{da}\right)$, $-\left(\frac{dV}{db}\right)$, & $-\left(\frac{dV}{dc}\right)$ trouvées dans l'Article II ; on aura ainſi trois équations aux différences partielles en V ſeul ; ſoit donc

$$V = \frac{4\pi.\, k^3}{3\sqrt{mn}}.\, v = M.\, v.$$

M étant par l'Article I, la maſſe du ſphéroïde ; & au lieu

des variables m & n, considérons celles-ci θ & ϖ, que nous avons déja introduites dans l'Article précédent, & qui sont telles que

$$\theta = k^2 . \frac{1 - m}{m}; \quad \varpi = k^2 . \frac{1 - n}{n};$$

nous aurons

$$\left(\frac{d\theta}{dk}\right) = \frac{2.\theta}{k}; \left(\frac{d\varpi}{dk}\right) = \frac{2.\varpi}{k}; \left(\frac{d\theta}{dm}\right) = -\frac{k^2}{m^2}; \left(\frac{d\varpi}{dn}\right) = -\frac{k^2}{n^2};$$

d'où il est aisé de conclure

$$\left(\frac{dV}{dk}\right) = \frac{4\pi . k^2}{3.\sqrt{mn}} . \left\{2\theta . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + 2\varpi . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + 3v + k . \left(\frac{dv}{dk}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{dV}{dm}\right) = -\frac{4\pi . k^3 .}{3.\sqrt{mn}} . \left\{\frac{k^2}{m^2} . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + \frac{v}{2m}\right\}$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right) = -\frac{4\pi . k^3}{3.\sqrt{mn}} . \left\{\frac{k^2}{n^2} . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{v}{2n}\right\}$$

les équations (1), (2), & (3), deviendront ainsi, en y substituant $\frac{k^2}{k^2 + \theta}$, au lieu de m; $\frac{k^2}{k^2 + \varpi}$ au lieu de n, & en divisant tous les termes, par $\frac{4\pi . k^3}{3.\sqrt{mn}}$,

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2 + \theta).\theta . \left(\frac{ddv}{da.d\theta}\right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \varpi).\varpi . \left(\frac{ddv}{da.d\varpi}\right) + b\theta . \left(\frac{ddv}{da.db}\right) + c\varpi . \left(\frac{ddv}{da.dc}\right)$$
$$+ \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - k^2}{2}\right) . k . \left(\frac{ddv}{dk.da}\right) + a\theta . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + a\varpi . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)$$
$$+ \left[\tfrac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\varpi\right] . \left(\frac{dv}{da}\right) + \frac{ak}{2} . \left(\frac{dv}{dk}\right) + \tfrac{3}{2} av; \quad (4)$$

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2 + \theta).\theta . \left(\frac{ddv}{db.d\theta}\right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \varpi).\varpi . \left(\frac{ddv}{db.d\varpi}\right) + b\theta . \left(\frac{ddv}{db^2}\right) + c\varpi . \left(\frac{ddv}{db.dc}\right)$$
$$+ \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - k^2}{2}\right) . k . \left(\frac{ddv}{dk\,db}\right) + b\theta . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + b\varpi . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)$$
$$+ \left[\tfrac{3}{2} . (a^2 + b^2 + c^2) + \theta + \tfrac{1}{2}\varpi\right] . \left(\frac{dv}{db}\right) + \frac{bk}{2} . \left(\frac{dv}{dk}\right) + \tfrac{3}{2} bv; \quad (5)$$

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2 + \theta).\theta . \left(\frac{ddv}{dc.d\theta}\right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \varpi).\varpi . \left(\frac{ddv}{dc.d\varpi}\right) + b\theta . \left(\frac{ddv}{db.dc}\right) + c\varpi . \left(\frac{ddv}{dc^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - k^2}{2}\right) . k . \left(\frac{ddv}{dk.dc}\right) + c\theta . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + c\varpi . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)$$
$$+ \left[\tfrac{3}{2} . (a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\theta + \varpi\right] . \left(\frac{dv}{dc}\right) + \frac{ck}{2} . \left(\frac{dv}{dk}\right) + \tfrac{3}{2} . cv; \quad (6)$$

Ces équations ſont communes au ſphéroïde entier & à ſes élémens déterminés par la méthode de cet article. En conſidérant d'une autre maniere, les attractions élémentaires du ſphéroïde, on parviendroit à d'autres équations aux différences partielles en V, & la comparaiſon de ces équations pourroit conduire à une équation linéaire aux différences ordinaires, qui donneroit la valeur de V. Cette maniere d'obtenir les valeurs des doubles & des triples intégrales déterminées, lorſque les intégrations ne ſont pas poſſibles, peut être utile dans un grand nombre de cas; mais relativement à celui que nous conſidérons ici, les trois équations précédentes, combinées avec les réſultats de l'article précédent, nous ſuffiront pour déterminer V auſſi complettement qui eſt poſſible. Pour cela nous obſerverons que l'on peut ſatisfaire à ces équations, en y ſuppoſant v, fonction de a, b, c, θ, & ϖ, ſans k; puiſque cette derniere quantité ne multiplie que les différences partielles de v, priſes par rapport à k; or nous allons faire voir que cette maniere de ſatisfaire aux trois équations précédentes, eſt la ſeule qui puiſſe convenir à l'attraction du ſphéroïde. En effet, ſi l'on reprend la formule

$$V = M.\left(U + k^{2i}.\,\frac{\theta^{r}}{k^{2r}}\,.\,\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}\,.P + \&c. \right)$$

trouvée dans l'article précédent pour repréſenter l'attraction du ſphéroïde, & qu'on la compare avec celle-ci $V = M.\,v$, on aura

$$v = U + k^{2i}\,\frac{\theta^{r}}{k^{2r}}.\,\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.\,P + \&c.$$

U étant une fonction de θ, ϖ, a, b, c, ſans k, & P étant une fonction de a, b, c, indépendante de k, θ, & ϖ. Si l'on ſubſtitue cette valeur de v dans l'équation (4), il eſt aiſé de

voir que ni U, ni aucun des termes autres que $k^{2i}\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P$, ne produira pasdans cette équation, un terme de cette derniere forme; cela eſt viſible relativement à U qui étant indépendant de k, ne pourra produire dans l'équation (4) que des termes indépendans de k. Quant aux termes de l'expreſſion de v, qui renferment k & qui ſont différens de $k^{2i}\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P$, l'un des trois nombres i, r, r', ſera par l'hypothèſe, plus grand dans ces termes, que dans celui-ci; d'où il eſt facile de conclure que leur ſubſtitution dans l'équation (4) ne pourra pas y produire des termes de cette forme. Cela poſé, ſi l'on ſubſtitue le terme $k^{2i}\frac{\theta^r}{k^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{k^{2r'}}.P$, dans l'équation (4) & que l'on ne conſidére que les termes de cette forme, on aura, en égalant leur ſomme à zéro,

$$o = (a^2+b^2+c^2).\left(\frac{dP}{da}\right)+a.P.$$

Le même terme ſubſtitué dans les équations (5) & (6) donnera pareillement

$$o = (a^2+b^2+c^2).\left(\frac{dP}{dc}\right)+b.P.$$

$$o = (a^2+b^2+c^2).\left(\frac{dP}{c}\right)+c.P.$$

La premiere de ces trois équations donne en l'intégrant, $P=\frac{H}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$, H pouvant être une fonction quelconque de b & de c. Cette valeur de P ſubſtituée dans les deux dernieres équations, donne $\left(\frac{dH}{db}\right)=o$; $\left(\frac{dH}{dc}\right)=o$; partant, H eſt une fonction indépendante de a, b, c; il ne peut donc être qu'un nombre abſtrait, enſorte que P eſt de la dimenſion -1, ce qui eſt impoſſible, comme on la vu à la fin de l'article précédent. P doit donc être nul,

ce qui réduit la fonction v à une fonction U indépendante de k.

Il suit delà que dans la formule (r) de l'article précédent, les quantités $k^2 S$, $k^4 S'$, $k^6 S''$, &c. doivent être indépendantes de k, & qu'ainsi 1° S, doit être de la forme, $A . \frac{\theta}{k^2} + A' \frac{\varpi}{k^2}$; 2° S' doit être de la forme $B . \frac{\theta^2}{k^4} + B' . \frac{\theta\varpi}{k^4} + B'' . \frac{\varpi^2}{k^4}$; &c. A, A', B, B', B'', &c. étant des fonctions de a, b, c; mais ce résultat auquel nous sommes conduits *à posteriori*, seroit très-difficile à démontrer *à priori*, par le seul développement des valeurs de S, S', &c.

Puisque v est une fonction indépendante de k, elle sera la même pour tous les sphéroïdes elliptiques qui ont le même centre, la même position des axes, & les mêmes excentricités $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$; & comme on a $V = M . v$, il en résulte que relativement à ces différens sphéroïdes, les attractions sur un même point extérieur, divisées par la simple distance, sont entre-elles comme leurs masses; or on peut toujours en déterminant convenablement le demi-axe k, faire passer la surface d'un de ces sphéroïdes, par le point attiré; donc si l'on nomme V' la valeur de V, relative à ce nouveau sphéroïde, & M' sa masse; la valeur de V relative au sphéroïde que nous avons considéré jusqu'ici, sera donnée par l'équation, $V = \frac{M . V'}{M'}$. Si dans les équations $A = -\left(\frac{dV}{da}\right)$; $B = -\left(\frac{dV}{db}\right)$; $C = -\left(\frac{dV}{dc}\right)$, de l'article II, on substitue $M . v$, au lieu de V; on aura $A = -M . \left(\frac{dv}{da}\right)$; $B = -M . \left(\frac{dv}{db}\right)$; $C = -M . \left(\frac{dv}{dc}\right)$; ainsi le Théorême que nous venons d'énoncer relativement à V, a également lieu relativement aux

quantités A, B, C ; c'est-à-dire que les attractions de différens sphéroïdes qui ont le même centre, la même position des axes & les mêmes excentricités, décomposées parallelement aux trois axes, sont entre-elles comme leur masses, & qu'en déterminant par conséquent ces attractions relativement à celui de ces sphéroides dont la surface passe par le point attiré, & divisant leurs valeurs par sa masse, il suffira de multiplier ces quotiens par les masses des autres sphéroïdes, pour avoir leurs attractions respectives. Ce Théorême réduit la difficulté de la recherche des attractions du sphéroïde sur un point quelconque extérieur, à celle des attractions d'un nouveau sphéroïde, sur un point placé à sa surface; ce qui simplifie beaucoup le problême ; car les intégrations qui sont impraticables relativement à un point extérieur non contigu à la surface, deviennent possibles, lorsque le point est à la surface.

V.

Considérons présentement les attractions des sphéroïdes, sur un point placé dans leur intérieur. Si on nomme encore a, b, c, les trois coordonnées de ce point, & que l'on conserve à A, B, C les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura comme dans l'Article IV.

$$A = \int\int\int dr.\, dp.\, dq.\, \text{fin}.\, p.\, \text{cof}.\, p;$$

En intégrant cette quantité par rapport à r, il faut prendre l'intégrale depuis $r = -r'$ jusqu'à $r = r$, r & r', étant les deux valeurs du rayon r, à ses deux points de sortie du sphéroïde ; on aura ainsi

$$A = \int\int (r + r')\, dp.\, dq.\, \text{fin}.\, p.\, \text{cof}.\, p.$$

on trouvera pareillement

$$B = \iint (r + r').dp.dq.\sin.p^2.\cos.q.$$
$$C = \iint (r + r').dp.dq.\sin.p^2.\sin.q.$$

On a enſuite par l'Article IV,

$$r + r' = \frac{2Q}{L} = \frac{2a.\cos.p + 2mb.\sin.p.\cos.q + 2nc.\sin.q}{\cos.p^2 + m.\sin p^2.\cos.q^2 + n.\sin.p^2 \sin.q^2};$$

on aura donc

$$A = 2.\iint dp.dq.\sin.p' \cos.p. \frac{(a.\cos p + mb.\sin.p.\cos.q + nc.\sin.p.\sin.q.)}{\cos.p^2 + m.\sin.p^2.\cos q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2.}$$

$$B = 2.\iint dp.dq.\sin.p^2.\cos.q. \frac{(a.\cos.p. + mb.\sin.p.\cos.q + nc.\sin.p.\sin.q)}{\cos.p' + m.\sin.p^2.\cos.q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2}.$$

$$C = 2.\iint dp.dq.\sin.p^2.\sin.q. \frac{(a.\cos.p + mb.\sin q.\cos.q + nc.\sin p.\sin.q)}{\cos.p^2 + m.\sin.p^2 \cos.q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2}.$$

Les intégrales relatives à p & à q, doivent viſiblement être priſes depuis p & q, égaux à zéro, juſqu'à p & q, égaux à 180°; or cette ſuppoſition donne généralement, $\int P dp.dq.\sin.p.\cos.p = 0$, lorſque P, eſt une fonction rationelle de $\sin.p$, & de $\cos.p^2$; parce que dans ce cas, à égale diſtance de 90° de part & d'autre, les élémens de l'intégrale ſont les mêmes avec un ſigne contraire. On a pareillement $\int Q dq.\cos.q = 0$, Q étant une fonction rationelle de $\sin.q$, & de $\cos.q^2$; les expreſſions précédentes de A, B, C, deviendront ainſi

$$A = 2a.\iint \frac{dp.dq.\sin.p.\cos.p^2}{\cos.p^2 + m.\sin.p^2.\cos.q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2}.$$

$$B = 2mb.\iint \frac{dp.dq.\sin.p^3.\cos.q^2}{\cos.p^2 + m\sin.p^2.\cos.q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2}.$$

$$C = 2nc.\iint \frac{dp.dq.\sin.p^3.\sin.q^2}{\cos.p^2 + m.\sin.p^2.\cos.q^2 + n.\sin.p^2.\sin.q^2}.$$

La valeur de k n'entre point dans ces expreſſions; elles ne renferment que les quantités a, b, c, m & n; d'où il ſuit que l'on peut augmenter ou diminuer à volonté, les

couches du ſphéroïde, ſupérieures au point attiré, ſans changer ſon attraction ſur ce point, pourvu que les valeurs de m & de n ſoient conſtantes, c'eſt-à-dire, que le ſphéroïde reſte ſemblable à lui-même ; ce qui nous conduit à ce réſultat remarquable.

Un point placé dans l'intérieur d'une couche elliptique d'une épaiſſeur quelconque & dont les ſurfaces extérieure & intérieure ſont parfaitement ſemblables, ſeroit également attiré de toutes parts, & n'auroit par conſéquent aucune tendance à ſe mouvoir en vertu de ces attractions.

Pour déterminer les valeurs de A, B, C, nous obſerverons que ſi la premiere eſt donnée, il ſera facile d'en conclure les deux autres, en y changeant les quantités relatives à l'axe des x, dans celles qui ſont relatives aux axes des y & des z, & réciproquement ; ainſi pour déterminer B, on conſidérera que ſi l'on nomme k' l'axe des y ; les axes des x & des z, ſeront $k'\sqrt{\frac{}{m}}$, & $k'\sqrt{\frac{m}{n}}$: il faudra donc changer dans l'expreſſion de A, m dans $\frac{1}{m}$, n dans $\frac{n}{m}$, & a dans b. On aura pareillement C, en changant dans l'expreſſion de A, n dans $\frac{1}{n}$, m dans $\frac{m}{n}$, & a dans c. La queſtion ſe réduit ainſi à déterminer A.

Pour y parvenir, nous mettrons ſon expreſſion ſous cette forme, $2a.\iint\frac{dp\,dq.\,\text{ſin.}\,p.\,\text{coſ.}\,p^2}{M+N.\,\text{coſ.}\,2q}$, en faiſant

$$M = \text{coſ.}\,p^2 + \frac{m+n}{2}.\,\text{ſin.}\,p^2 \;;\; N = \frac{m-n}{2}.\,\text{ſin.}\,p^2.$$

L'intégrale $\int\frac{dq}{M+N.\,\text{coſ.}\,2q}$ priſe depuis $q=0$, juſqu'à $q = 180^\circ$, eſt égale à $\frac{\pi}{\sqrt{(M+N).(M-N)}}$, π étant le rapport de la demi-

demi-circonférence du rayon ; en ſubſtituant au lieu de M & de N, leurs valeurs, l'expreſſion précédente de A, deviendra

$$A = \frac{2a.\pi.}{\sqrt{mn}} \int \frac{dp.\,\text{ſin}.\,p.\,\text{coſ}.\,p^2}{\sqrt{\left(1+\frac{1-m}{m}.\,\text{coſ}.\,p^2\right).\left(1+\frac{1-n}{n}\,\text{coſ}.\,p^2\right)}},$$

l'intégrale étant priſe depuis $p=0$, juſqu'à $p=180°$, ou, ce qui revient au même, depuis $\text{coſ}.\,p = 1$, juſqu'à $\text{coſ}.\,p = -1$. Si l'on fait $\text{coſ}.\,p = x$, on aura

$$A = \frac{4a.\pi.}{\sqrt{mn}}.\int \frac{x^2.\,dx}{\sqrt{\left(1+\frac{1-m}{m}.\,x^2\right).\left(1+\frac{1-n}{n}.\,x^2\right)}}$$

l'intégrale étant priſe depuis $x=0$, juſqu'à $x=1$. Voilà donc une expreſſion fort ſimple de l'attraction du ſphéroïde, parallelement à l'axe k, ſur un point placé dans ſon intérieur.

Quoique l'intégrale relative à x, ſoit définie, elle a cependant toute la difficulté de l'intégrale indéfinie, lorſque m & n ſont indéterminés ; car ſi l'on déſigne par $\psi(\alpha, \beta)$, l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+\alpha x^2).(1+\beta x^2)}}$ priſe depuis $x=0$, juſqu'à $x=1$; cette même intégrale priſe depuis $x=0$, juſqu'à une valeur quelconque de x, ſera $x^3.\,\psi(\alpha x^2, \beta x^2)$. En effet ſi l'on change x en xz, dans l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+\alpha x^2).(1+\beta x^2)}}$, & que l'on ſuppoſe z ſeul variable, elle ſe transformera dans l'intégrale définie $x^3.\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1+\alpha x^2 z^2).(1+\beta x^2 z^2)}}$, l'intégrale relative à z, étant priſe depuis $z=0$, juſqu'à $z=1$; on aura enſuite la valeur de $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1+\alpha x^2 z^2).(1+\beta x^2 z^2)}}$, en changeant dans $\psi(\alpha, \beta)$, α dans αx^2, & β, dans $\beta.\,x^2$; d'où il ſuit que l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+\alpha x^2).(1+\beta x^2)}}$, eſt égale à $x^3.\,\psi(\alpha x^2, \beta x^2)$, &

par conséquent elle sera donnée, lorsque l'on aura cette même intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

L'intégrale indéfinie des fonctions différentielles de la forme $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+\alpha x^2).(1+6x^2)}}$, est impossible, excepté dans les deux cas suivants, sçavoir lorsque l'une ou l'autre des quantités α, & 6, est nulle, ou lorsqu'elles sont égales; je me suis assuré que dans tous les autres cas, l'intégrale ne peut pas être exprimée par une fonction finie de quantités algébriques, d'arcs de cercle & de logarithmes; ainsi l'expression intégrale que nous venons de trouver pour A, est la plus simple que l'on puisse donner à cette valeur, & il seroit inutile de chercher à la réduire en termes finis.

Puisque cette valeur à lieu pour tous les points intérieurs du sphéroïde, elle a lieu encore pour les points infiniment voisins de la surface, & par conséquent, pour ceux de la surface même; ayant donc ramené dans l'article précédent, l'attraction d'un sphéroïde, sur un point pris hors de lui, à l'attraction d'un nouveau sphéroïde, sur un point placé à sa surface, on aura cette attraction sous la forme la plus simple dont elle est susceptible.

VI.

Nommons, k', m', n', les valeurs de k, m, n, relatives au nouveau sphéroïde qui ayant les mêmes excentricités que le premier, à le point attiré à sa surface; on aura

$$k'^2 . \frac{1-m'}{m'} = \theta; \; k'^2 . \frac{1-n'}{n'} = \varpi;$$

& la condition que le point attiré est à la surface, donne

$$a^2 + m'.b^2 + n'.c^2 = k'^2.$$

Les deux premieres équations donnent

$$m' = \frac{k'^2}{k'^2 + \theta}; \; n' = \frac{k'^2}{k'^2 + \varpi};$$

ſi l'on ſubſtitue ces valeurs dans la troiſieme, on aura pour déterminer k', l'équation ſuivante,

$$k'^6 - [a^2 + b^2 + c^2 - \theta - \varpi].k'^4 - [(a^2 + c^2).\theta + (a^2 + b^2)\varpi - \theta\varpi].k'^2 - a^2.\theta\varpi = 0.$$

Les valeurs réelles & poſitives de k'^2, dans cette équation, donneront autant de ſphéroïdes dont la ſurface paſſera par le point attiré; mais il eſt facile de s'aſſurer qu'il exiſte un ſphéroïde de cette nature, & qu'il n'y en a qu'un ſeul. Pour cela, ſuppoſons θ, & ϖ, négatifs, ce qui eſt toujours poſſible, en prenant pour k, le plus grand des trois axes du ſphéroïde; dans ce cas, le dernier terme, $-a^2\theta\varpi$, de l'équation précédente, étant négatif, cette équation donnera toujours par la théorie connue des équations, une valeur réelle & poſitive pour k'^2, & par conſéquent un ſphéroïde poſſible. Pour prouver qu'il n'y en a qu'un ſeul, nous conſidérerons la fonction $k'^2 - a^2 - m'b^2 - n'c^2$, ou $k'^2 - a^2 - \frac{k'^2.b^2}{k'^2 + \theta} - \frac{k'^2.c^2}{k'^2 + \varpi}$, dont l'égalité à zéro, nous a donné l'équation précédente en k'. Si l'on différencie cette fonction par rapport à k', on aura pour ſa différentielle

$$2k'dk'.\left[1 - \frac{b^2.\theta}{(k'^2 + \theta)^2} - \frac{c^2.\varpi}{(k'^2 + \varpi)^2}\right]$$

qui dans le cas ou θ, & ϖ ſont négatifs, croît conſtamment avec k'; la fonction dont il s'agit, ne peut donc devenir nulle que d'une ſeule maniere, en ſuppoſant k' poſitif, & par conſéquens k'^2 ne peut avoir qu'une valeur réelle & poſitive.

L'attraction du nouveau ſphéroïde ſur le point placé

à ſa ſurface, & décompoſée parallelement à l'axe k', eſt par l'article précédent égale à

$$\frac{4a\pi}{\sqrt{m'n'}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1+\frac{1-m'}{m'}.x^2\right).\left(1+\frac{1-n'}{n'}.x^2\right)}}.$$

On en conclura par l'Article IV, l'attraction du premier ſphéroïde, parallelement à ſon axe k, en diviſant l'attraction précédente par la maſſe du nouveau ſphéroïde, & en multipliant le tout par la maſſe M, du premier ſphéroïde. Or la maſſe du nouveau ſphéroïde eſt par l'Article I, égale à $\frac{4\pi.k'^3}{3.\sqrt{m'n'}}$; on aura donc pour l'attraction A, du premier ſphéroïde

$$A=\frac{3\,a.M.}{k'^3}\int\frac{x^2.\,dx}{\sqrt{\left(1+\frac{1-m'}{m'}x^2.\right).\left(1+\frac{1-n'}{n'}.x^2\right)}}.$$

Nommons, k', l', h', les trois demi-axes du nouveau ſphéroïde, on aura

$$l'^2=\frac{k'^2}{m'};\ h'^2=\frac{k'^2}{n'};\ \theta=k'^2.\frac{1-m'}{m'};\ \varpi=k'^2.\frac{1-n'}{n'};$$

d'où l'on tire

$$\theta=l'^2-k'^2;\ \varpi=h'^2-k'^2$$

& par conſéquent

$$\frac{1-m'}{m'}=\frac{\theta}{k'^2}=\frac{l'^2-k'^2}{k'^2};\ \frac{1-n'}{n'}=\frac{\varpi}{k'^2}=\frac{h'^2-k'^2}{k'^2}.$$

L'expreſſion précédente de A, deviendra ainſi,

$$A=\frac{3\,a.M}{k'^3}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1+\frac{l'^2-k'^2}{k'^2}.x^2\right).\left(1+\frac{h'^2-k'^2}{k'^2}.x^2\right)}}$$

l'intégrale étant priſe depuis $x=0$, juſqu'à $x=1$.

Si dans cette valeur de A, on change a en b, k' en l',

& l' en k', on aura la valeur de B, qui sera par conséquent

$$B = \frac{3\,b.\,M.}{l'^3} . \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{k'^2 - l'^2}{l'^2} . x^2\right) . \left(1 + \frac{h'^2 - l'^2}{l'^2} . x^2\right)}};$$

on trouvera de la même maniere

$$C = \frac{3\,c.\,M}{h'^3} . \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{l'^2 - h'^2}{h'^2} . x^2\right) . \left(1 + \frac{k'^2 - h'^2}{h'^2} . x^2\right)}}.$$

En substituant dans ces valeurs de A, B, C, $k'^2 + \theta$ au lieu de l'^2, & $k'^2 + \varpi$ au lieu de h'^2, elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{3\,a\,M}{k'^3} . \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{\theta}{k'^2} . x^2\right) . \left(1 + \frac{\varpi}{k'^2} . x^2\right)}} \\
B &= \frac{3\,b.\,M}{(k'^2 + \theta)^{\frac{3}{2}}} . \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta . x^2}{k'^2 + \theta}\right) . \left(1 + \frac{(\varpi - \theta) . x^2}{k'^2 + \theta}\right)}} \\
C &= \frac{3\,c.\,M}{(k'^2 + \varpi)^{\frac{3}{2}}} . \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\theta - \varpi) . x^2}{k'^2 + \varpi}\right) . \left(1 - \frac{\varpi . x^2}{k'^2 + \varpi}\right)}}.
\end{aligned}\right\} (f)$$

Si l'on fait dans la valeur de B, $x = \frac{t\sqrt{k'^2 + \theta}}{\sqrt{k'^2 + \theta . t^2}}$, elle deviendra

$$B = \frac{3\,b\,M}{k'^3} . \int \frac{t^2\,dt}{\left(1 + \frac{\theta}{k'^2}\,t^2\right)^{\frac{3}{2}} . \sqrt{1 + \frac{\varpi}{k'^2} . t^2}};$$

& comme l'intégrale relative à x, doit être prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$, l'intégrale relative à t, doit pareillement être prise depuis $t = 0$, jusqu'à $t = 1$, ensorte que l'on y peut changer t en x. Soit pour simplifier

$$\frac{\theta}{k'^2} = \mu^2 ; \quad \frac{\varpi}{k'^2} = \mu'^2$$

$$F = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1 + \mu^2 . x^2) . (1 + \mu'^2 . x^2)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$; F sera évidemment une fonction de μ, & de μ', & l'on aura

$$\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right)=\int \frac{x^2.dx}{(1+\mu^2.x^2)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{1+\mu'^2.x^2}};$$

partant

$$B=\frac{3b.M}{k'^3}.\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right).$$

On trouvera de la même maniere,

$$C=\frac{3c.M}{k'^3}.\left(\frac{dF\mu'}{d\mu'}\right);$$

on aura ainsi les expressions suivantes de A, B, C;

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{3a.M}{k'^3}.F;\\ B&=\frac{3b.M}{k'^3}.\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right)\\ C&=\frac{3c.M}{k'^3}.\left(\frac{d.F\mu'}{d\mu'}\right)\end{aligned}\right\};\ (L)$$

ces expressions ont l'avantage de ne dépendre que de la quantité F qui, comme on l'a vu, ne peut être ramenée à une forme plus simple : elles ont encore lieu, lorsque le point attiré est à la surface ou dans l'intérieur du sphéroïde, en y faisant $k'=k$; enfin elles sont vraies, quelle que soit la densité du sphéroïde, parce que cette densité est un facteur de la masse M.

Si le sphéroïde est un ellipsoïde de révolution, alors $\varpi=\theta$, & $\mu'=\mu$; & si l'on considére F, comme fonction de μ seul, & que l'on désigne dans ce cas, sa différence partielle prise relativement à μ, par $\left(\frac{dF}{d\mu}\right)^1$, on aura $\left(\frac{dF}{d\mu}\right)^1=\left(\frac{dF}{d\mu}\right)+\left(\frac{dF}{d\mu'}\right)$ $=2\left(\frac{dF}{d\mu}\right)$, à cause de $\left(\frac{dF}{d\mu'}\right)=\left(\frac{dF}{d\mu}\right)$; mais on a $\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right)$ $=F+\mu.\left(\frac{dF}{d\mu}\right)$; partant $\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right)=F+\frac{\mu}{2}.\left(\frac{dF}{d\mu}\right)^1=\frac{1}{2\mu}.$ $\left(\frac{d.F.\mu^2}{d\mu}\right)^1$; les expressions précédentes de A, B, C, deviendront ainsi

$$A = \frac{3\,a.\,M}{k'^3}\,F\,;\; B = \frac{3\,b\,M.}{2\,k'^3.\,\mu}.\left(\frac{d.\,F\mu^2}{d\mu}\right)^1;\; C = \frac{3\,c\,M}{2\,k'^3.\,\mu}.\left(\frac{d.\,F\mu^2}{d\mu}\right)^1.$$

Dans le cas présent, on a

$$F = \int \frac{x^2\,dx}{1+\mu^2 x^2},$$

ce qui donne en intégrant,

$$F = \frac{1}{\mu^3}.\,(\mu - \text{ang. tang. } \mu)\,;$$

& par conséquent

$$\left(\frac{d.\,F\mu^2}{d\mu}\right)^1 = \frac{1}{\mu^2}.\left\{\text{ang. tang. } \mu - \frac{\mu}{1+\mu\mu}\right\};$$

on aura donc relativement aux ellipsoïdes de révolution,

$$A = \frac{3\,a.\,M}{k'^3.\,\mu^3}.\,[\mu - \text{ang. tang. } \mu]$$

$$B = \frac{3\,b.\,M}{2\,k'^3.\,\mu^3}.\left[\text{ang. tang. } \mu - \frac{\mu}{1+\mu\mu}\right\}$$

$$C = \frac{3\,c.\,M}{2\,k'^3.\,\mu^3}.\left[\text{ang. tang. } \mu - \frac{\mu}{1+\mu\mu}\right\}.$$

L'équation, $0 = a^2 + \frac{k'^2\,b^2}{k'^2+\theta} + \frac{k'^2.\,c^2}{k'^2+\varpi} - k'^2$, que nous avons trouvée ci-dessus, déterminera k'; elle donnera en y faisant $\varpi = \theta$

$$k'^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-\theta+\sqrt{(a^2+b^2+c^2-\theta)^2+4\,a^2\,\theta}}{2}.$$

Si l'on suppose $\theta = \varpi = 0$, on aura $k' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, c'est-à-dire que k' sera égal à la distance du point attiré au centre du sphéroïde qui devient alors une sphére; les équations (j), donnent ensuite,

$$A = \frac{a.\,M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}};\; B = \frac{b.\,M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}};\; C = \frac{c.\,M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme il n'entre point dans ces expressions, d'autres quantités relatives à la sphére, que sa masse M, il en résulte

pas

que les attractions *A*, *B*, *C*, ſont les mêmes, quelle que ſoit la dimenſion de la ſphére, pourvu que ſa maſſe reſte la même; d'où il ſuit qu'une ſphére attire un point quelconque ſitué au-dehors, comme ſi toute ſa maſſe étoit réunie à ſon centre.

M. Maclaurin, dans ſa piece ſur le flux & reflux de la mer, a donné le premier, une théorie complette des attractions des ſphéroïdes elliptiques homogènes de révolution ſur des points placés à leur ſurface, ou dans leur intérieur. Cette théorie eſt un chef-d'œuvre de ſynthèſe; M. d'Alembert en a depuis étendu les principaux réſultats aux attractions des ſphéroïdes dont toutes les coupes ſont elliptiques, & l'on doit à M. de la Grange, une très-belle méthode analytique pour y parvenir. Ces deux illuſtres Géométres ont encore donné la démonſtration d'un théorême relatif aux attractions des ſphéroïdes elliptiques ſur des points ſitués dans le prolongement de leurs axes, théorême que M. Maclaurin n'avoit fait qu'énoncer, & qui eſt un cas particulier de celui que nous avons démontré à la fin de l'Article V. Il reſtoit, pour completter cette théorie, à déterminer les attractions de ces ſphéroïdes, ſur des points ſitués au-dehors; M. le Gendre y eſt parvenu d'une maniere fort ingénieuſe, relativement aux ſphéroïdes de révolution, en faiſant voir que le théorême que M. Maclaurin avoit donné pour les points ſitués ſur le prolongement des axes, s'étendoit généralement aux points ſitués ſur le prolongement d'un rayon quelconque d'un ellipſoïde de révolution. Ce réſultat eſt d'autant plus intéreſſant, que dans toutes les méthodes connues, l'expreſſion différentielle ſe préſente alors ſous une forme qui ne permet pas de l'intégrer; mais la méthode de M. le Gendre, fondée ſur la conſidération des ſuites, n'eſt

pas

pas applicable aux ellipſoïdes qui ne ſont point de révolution; il étoit cependant très-vraiſemblable que relativement à ces ſphéroïdes, le théorême de M. Maclaurin s'étendoit encore à un point ſitué d'une maniere quelconque au-dehors; mais l'impoſſibilité d'intégrer les attractions différentielles, du moins ſous la forme que leur donnent les méthodes connues, rendoit aſſez difficile la démonſtration de ce théorême: après quelques tentatives inutiles, j'y ſuis enfin parvenu par la méthode précédente dont j'ai fait part à l'Académie au mois de Mai 1783. En cherchant à transformer les attractions différentielles, on parviendroit, ſelon toute apparence, à les rendre intégrables, par un choix convenable des coordonnées; mais la méthode que j'ai ſuivie, m'ayant conduit aſſez ſimplement au réſultat que je cherchois, je n'ai point tenté d'autres moyens, & j'ai penſé que le nouvel uſage qu'elle préſente, du calcul aux différences partielles, pourroit être utile dans d'autres circonſtances, & par cette raiſon intéreſſer les Géomètres.

VII.

Conſidérons préſentement les loix de l'équilibre d'une maſſe fluide de denſité conſtante, ou variable, & ſollicitée par des forces quelconques. Nommons x, y, z, les coordonnées d'une molécule fluide, ρ ſa denſité, p la preſſion qu'elle éprouve, & P, Q, R, les trois forces dont elle eſt animée parallelement aux axes des x, des y, & des z, ces forces étant ſuppoſées tendre à augmenter ces variables. Si l'on conſidère la molécule fluide, comme un parallélipipede rectangle dont, dx, dy & dz ſont les côtés, Il eſt clair que

$p\,dy\,dz$, sera la pression qu'éprouve la face $dy\,dz$, parallelement aux x ; mais la face opposée, & qui est plus avancée dans le sens des x, éprouve en sens contraire une pression égale à $p'.\,dy\,dz$, p' étant ce que devient p, lorsqu'on y change x, dans $x + dx$, ce qui donne $p' = p + \left(\frac{dp}{dx}\right).\,dx$; cette seconde face éprouve donc une pression égale à $\left[p + \left(\frac{dp}{dx}\right).\,dx\right].\,dy\,dz$; la différence des pressions que ces deux faces éprouvent, tend à mouvoir la molécule, & doit par conséquent dans le cas de l'équilibre, être balancée par les autres forces qui sollicitent la molécule ; or cette différence de pression est égale à $\left(\frac{dp}{dx}\right).\,dx.\,dy.\,dz$, & agit en sens contraire des x ; en la divisant par la masse $\rho.\,dx.\,dy.\,dz$, de la molécule, il en résultera une force tendante à diminuer les x, & égale à $\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)}{\rho}$; il faut donc égaler cette force à la force P qui tend à les augmenter, ce qui donne

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho.\,P.$$

On trouvera de la même maniere,

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho.\,Q$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho.\,R.$$

& ces équations ont généralement lieu, lorsque la masse fluide est en équilibre.

Si l'on multiplie la premiere par dx, la seconde par dy, la troisieme par dz, & qu'on les ajoute ensemble, on aura en observant que $dp = \left(\frac{dp}{dx}\right).\,dx + \left(\frac{dp}{dy}\right).\,dy + \left(\frac{dp}{dz}\right).\,dz$,

$$dp = \rho.\,(P.\,dx + Q.\,dy + R.\,dz)$$

cette équation générale renfermera les trois précédentes, en considérant qu'elle est vraie quelles que soient dx, dy, dz. Voyons maintenant les principales conséquences qui en résultent.

Le premier membre de cette équation étant une différence exacte, la fonction différentielle $\rho.[P.dx+Q.dy+R.dz]$ doit pareillement être une différence exacte, ce qui donne, comme l'on sçait, les trois équations de condition suivantes,

$$\left(\frac{d.\rho P}{dy}\right)-\left(\frac{d.\rho Q}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{d.\rho P}{dz}\right)-\left(\frac{d.\rho R}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{d.\rho Q}{dz}\right)-\left(\frac{d.\rho R}{dy}\right)=0;$$

ces équations doivent donc être satisfaites dans le cas de l'équilibre. Si l'on multiplie la premiere par R, la seconde par $-Q$, & la troisieme par P, & qu'après les avoir ajoutées, on divise leur somme par ρ, cette quantité disparoîtra, ainsi que ses différences, & l'on aura l'équation suivante de condition, entre les seules forces P, Q, R,

$$0=P.\left(\frac{dQ}{dz}\right)-Q.\left(\frac{dP}{dz}\right)+R.\left(\frac{dP}{dy}\right)-P.\left(\frac{dR}{dy}\right)+Q.\left(\frac{dR}{dx}\right)-R.\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

si cette équation n'est pas satisfaite, l'équilibre est impossible, quelque loi de densité que l'on imagine dans la masse fluide.

Supposons que $Pdx+Qdy+Rdz$, soit une différentielle complette, & représentons-la par dV; on aura $dp=\rho.dV$; ainsi la densité ρ doit être une fonction de V; & par conséquent relativement aux couches de même densité, V doit être constant, & $dV=0$, ce qui donne $Pdx+Qdy+Rdz=0$; d'où il est facile de conclure par la théorie des surfaces courbes, que la résultante des trois forces P, Q, R, doit être perpendiculaire à la surface des couches de même densité; & par cette raison, elles ont été nommées, *Couches de Niveau*. L'équation de ces couches est V=constante, d'où il suit que la

pression p étant en général une fonction de V, est constante à leur surface.

Si les forces P, Q, R, sont produites 1° par la force centrifuge qui naît d'un mouvement de rotation de la masse fluide autour de l'axe des x, & que g soit cette force à une distance de l'axe que nous prendrons pour unité de distance ; 2° par les forces attractives S, S', S'', &c; S, étant fonction de la distance f du centre de cette force à la molécule fluide ; S' étant fonction de la distance f', du centre de cette seconde force à la même molécule, & ainsi du reste ; il est aisé de voir que la force S décomposée parallelement aux axes des x, des y, & des z, sera $-S.\left(\frac{df}{dx}\right)$, $-S.\left(\frac{df}{dy}\right)$, $-S.\left(\frac{df}{dz}\right)$; d'ailleurs la force centrifuge est nulle dans le sens des x, & parallelement aux axes des y & des z, elle est égale à gy, & à gz; on aura donc alors

$$P = -S.\left(\frac{df}{dx}\right) - S'.\left(\frac{df'}{dx}\right) - \&c$$

$$Q = -S.\left(\frac{df}{dy}\right) - S'.\left(\frac{df'}{dy}\right) - \&c + g.y$$

$$R = -S.\left(\frac{df}{dz}\right) - S'.\left(\frac{df'}{dz}\right) - \&c + g.z$$

partant

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -S.df - S'.df' - \&c + g.y\,dy + g.z\,dz = dV;$$

ainsi dans ce cas, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est une différentielle exacte. Il suit de là que si l'on mêle ensemble un nombre quelconque de fluides dont toutes les parties s'attirent réciproquement, & sont attirées par tant de corps que l'on voudra, l'équilibre ne pourra pas subsister, à moins que la pesanteur, c'est-à-dire, la résultante de toutes les forces qui animent chaque molécule, ne soit perpendiculaire à la surface des différentes couches de niveau.

L'équation $dp = \rho dV$ donne $p = \int \rho dV$; cette valeur de p, doit être la même dans tous les sens, c'est-à-dire que la molécule doit être également pressée de toutes parts. Pour cela il est nécessaire que l'intégrale $\int \rho\, dV$ soit la même, lorsque x, y, z redeviennent les mêmes; cette intégrale ne peut donc point être une de ces fonctions transcendantes, telles que les arcs de cercle, qui à chaque retour des variables x, y, z, croissent d'une quantité constante.

Considérons le cas d'une masse fluide homogène, ce qui rend ρ constant, & supposons que les forces attractives P, Q, R, soient le résultat de forces attractives & d'une force centrifuge; l'intégrale $\int \rho\, dV$, ne pourra jamais être alors une fonction semblable à celle que nous venons de définir, car il est facile de s'assurer qu'à chaque retour de f, chaque élément $\rho . S . df$, a un élément correspondant qui lui est égal, mais avec un signe contraire; d'où il suit que la valeur de $\int \rho\, S . df$, ne croît point d'une constante à chaque retour de f, ce qui est également vrai relativement aux valeurs de $\int \rho\, S' . df'$, &c, $\int gy\, dy$, $\int gz\, dz$, & par conséquent, relativement à la valeur entiere de V.

Il suit de là qu'une masse fluide homogène dont toutes les parties s'attirent, & sont attirées par tant de corps que l'on voudra, & qui de plus a un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, sera en équilibre, si elle est renfermée de toutes parts; mais si elle est libre dans quelque partie de sa surface, ou dans sa surface entiere, il faut pour l'équilibre que la pression p soit nulle dans ces parties; on a donc relativement à ces points,

$$0 = \rho . \int (P dx + Q dy + R dz)$$

& par conséquent

$$0 = P dx + Q dy + R dz$$

d'où il ſuit que la réſultante des forces P, Q, R, doit être, dans le cas de l'équilibre, perpendiculaire à la ſurface extérieure, & dirigée vers l'intérieur de la maſſe fluide. Si cette condition eſt remplie, une maſſe fluide homogène, libre de toutes parts, animée par tant de forces attractives que l'on voudra, & douée d'un mouvement de rotation, ſera en équilibre.

Une maſſe quelconque fluide, de denſité conſtante, ou variable, étant ainſi ſuppoſée en équilibre, il eſt viſible 1°, qu'il n'y aura dans l'axe de rotation aucune tendance à ſe mouvoir; 2°. que l'équilibre ſubſiſteroit toujours, quand même une partie de cette maſſe viendroit à ſe conſolider; & dans ce cas, il n'y auroit point encore de tendance au mouvement dans l'axe de rotation de la maſſe.

REMARQUE.

Newton, dans ſa théorie de la figure de la terre, ſuppoſe cette planete homogène & fluide à ſa ſurface; il détermine dans cette hypothèſe, l'applatiſſement qu'elle doit avoir pour être en équilibre en vertu de ſon mouvement de rotation, & de l'attraction de toutes ſes parties.

Dans ſa théorie du flux & du reflux de la mer, il cherche la figure que cette maſſe doit prendre pour être en équilibre en vertu de ſon mouvement de rotation, des attractions de toutes ſes parties, & de celles du Soleil & de la Lune.

Ce grand Géomètre ne s'eſt pas apperçu que ſi les choſes ſe paſſoient ainſi dans la nature, il ne pourroit y avoir, en vertu des attractions du Soleil & de la Lune, aucune tendance au mouvement dans l'axe de rotation de la terre, & qu'ainſi il n'y auroit ni préceſſion des équinoxes, ni nutation dans

l'axe terreſtre. La ſuppoſition de l'homogénéité de la terre eſt détruite par les obſervations, & celle de l'équilibre des eaux de la mer, en vertu des attractions du Soleil & de la Lune, eſt contraire à la théorie. Ces attractions combinées avec le mouvement de ces aſtres & avec celui de rotation de la terre, produiſent dans les eaux de l'Océan, des oſcillations dont j'ai déterminé les loix ailleurs ; la preſſion & l'attraction qui en réſultent ſur la partie ſolide de la terre, jointes aux attractions du Soleil & de la Lune ſur cette partie ſolide, cauſent les phénomènes de la préceſſion & de la nutation, & j'ai fait voir que ces forces ſont tellement combinées, que la préceſſion & la nutation qui en réſultent, ſont les mêmes que ſi les fluides qui recouvrent la terre, formoient une maſſe ſolide avec elle. La même analyſe m'a conduit au réſultat ſuivant, ſavoir que ni les oſcillations de la mer, ni les vents occaſionnés ſoit par la chaleur du Soleil, ſoit par l'attraction du Soleil & de la Lune, ſoit enfin par les différentes cauſes accidentelles qui agiſſent à la ſurface ou dans l'intérieur de la terre, ne peuvent cauſer d'altération ſenſible dans ſon moyen mouvement de rotation, à moins qu'ils ne produiſent un dérangement permanent dans ſa maſſe ; ainſi l'on doit regarder comme une proprieté de la loi de la peſanteur univerſelle, l'inaltérabilité des mouvemens de rotation & de révolution des corps céleſtes.

VIII.

Suppoſons que toutes les parties d'une maſſe fluide homogène, s'attirent réciproquement, & ſoient attirées par tant de corps que l'on voudra placés à de grandes diſtances ; ſuppoſons encore que cette maſſe tourne autour d'un axe quelconque paſſant par ſon centre de gravité ; ſoient x', y', z' les

trois coordonnées d'un point de ſa ſurface, rapportées à cet axe & à deux autres qui lui ſoient perpendiculaires & qui le ſoient entre eux. Concevons enſuite qu'en vertu de toutes les forces qui l'animent, la maſſe fluide prenne la figure d'un ellipſoïde dont les trois axes principaux ſoient tels qu'en nommant x, y, z, les coordonnées de la molécule rapportées à ces trois axes, on ait

$$x = p.x' + q.y' + r.z'$$
$$y = p'.x' + q'.y' + r'.z'$$
$$z = p''.x' + q''.y' + r''.z'$$

$p, q, r, p', q', r', p'', q'', r''$ étant neuf conſtantes dont dépend la poſition des trois axes principaux de l'ellipſoïde relativement à l'axe de rotation. Ces conſtantes ne ſont pas toutes arbitraires, il exiſte entre-elles ſix équations de condition qui les réduiſent à trois conſtantes indéterminées. Pour trouver ces équations, on doit obſerver que le quarré de la diſtance de la molécule fluide au centre du ſphéroïde eſt égal à $x^2 + y^2 + z^2$, & à $x'^2 + y'^2 + z'^2$, ce qui donne $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. En ſubſtituant dans cette équation, au lieu de x, y, z, leurs valeurs en x', y', z', & en comparant les termes ſemblables, on aura les ſix équations ſuivantes:

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = 1;\ q^2 + q'^2 + q''^2 = 1;\ r^2 + r'^2 + r''^2 = 1$$
$$pq + p'q' + p''q'' = 0;\ pr + p'r' + p''r'' = 0;\ qr + q'r' + q''r'' = 0;$$

d'où il eſt aiſé de conclure les valeurs de x', y', z' en x, y, z, & l'on trouvera,

$$x' = p.x + p'.y + p''.z$$
$$y' = q.x + q'.y + q''.z$$
$$z' = r.x + r'.y + r''.z.$$

Soit maintenant S la maſſe d'un des corps attirans; 6, γ, λ ſes trois coordonnées rapportées à l'axe de rotation, & aux deux axes qui lui ſont perpendiculaires, ces coordonnées étant

ſuppoſées

ſuppoſées connues par l'obſervation; ſoient encore a, b, c, les trois coordonnées du même corps rapportées aux trois axes principaux du ſphéroïde, on aura

$$a = p.\beta + q.\gamma + r.\lambda$$
$$b = p'.\beta + q'.\gamma + r'.\lambda$$
$$c = p''.\beta + q''.\gamma + r''.\lambda.$$

Si l'on nomme s, la diſtance du corps S au centre du ſphéroïde, & f ſa diſtance à la molécule fluide, on aura $s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$f = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz}$;

l'attraction de S ſur la molécule fluide, dirigée parallelement à l'axe des x, & dans le ſens oppoſé au centre du ſphéroïde, eſt égale à $S.\frac{a-x}{f^3} = S.\left(\frac{d.\frac{1}{f}}{dx}\right)$; or on a en réduiſant en ſérie la valeur de $\frac{1}{f}$,

$$\frac{S}{f} = \frac{S}{s}.\left[1 + \frac{ax + by + cz - \frac{1}{2}.(x^2 + y^2 + z^2)}{s^2} + \frac{3}{2}.\frac{(ax + by + cz)^2}{s^4} + \&c\right];$$

on aura donc pour l'attraction dont il s'agit,

$$\frac{S}{s^3}\left[a - x + 3a.\frac{(ax + by + cz)}{s^2} + \&c\right].$$

Comme nous conſidérons ici l'équilibre de la maſſe fluide autour de ſon centre de gravité, il faut retrancher de cette force, celle dont ce centre eſt animé; car il eſt viſible que la molécule ne peut être troublée dans ſa poſition autour du centre du ſphéroïde, qu'en vertu de la différence de ces forces. On aura la force qui anime le centre, en faiſant x, y, z, nuls dans l'expreſſion précédente, ce qui donne $\frac{S.a}{s^3}$ pour cette force; donc la force perturbatrice dont la molécule fluide eſt animée pararellelement à x, en vertu de l'attraction de S, eſt à très-peu-près.

$$\frac{Sa}{s^3}\cdot\left[\frac{3a.(ax+by+cz)}{s^2}-x\right]$$

s étant ſuppoſé très-grand relativement à x, y, z. Pareillement les forces perturbatrices qui réſultent de l'attraction du corps S, parallelement aux axes des y, & des z, ſont

$$\frac{S}{s^3}\cdot\left[\frac{3b.(ax+by+cz)}{s^2}-y\right]$$

$$\frac{S}{s^3}\cdot\left[\frac{3c.(ax+by+cz)}{s^2}-z\right].$$

En marquant d'un trait, de deux traits, &c, les lettres S, s, ε, γ, λ, a, b, c, on aura les forces perturbatrices paralleles aux mêmes coordonnées x, y, z, produites par les attractions des corps S', S'', &c.

Si l'on nomme g la force centrifuge qui naît du mouvement de rotation de la maſſe fluide, à une diſtance de l'axe, priſe pour l'unité; cette force ſera nulle dans le ſens des x'; en la decompoſant parallelement aux axes des y', & des z', elle ſera égale à gy', & à gz'; d'où il eſt facile de conclure que cette force décompoſée parallelement à l'axe des x, ſera $gy'.\left(\frac{dy'}{dx}\right)+gz'.\left(\frac{dz'}{dx}\right)$; elle ſera conſéquemment égale à

$$g.q.(qx+q'y+q''z)+gr.(r.x+r'.y+r''z).$$

Cette force décompoſée parallelement aux axes des y, & des z ſera pareillement,

$$gq'.(qx+q'y+q''z)+gr'.(r.x+r'y+r''z);$$

$$gq''.(qx+q'y+q''z)+gr''.(rx+r'y+r''z).$$

Enfin, ſi dans les équations (L) de l'art VI, on change k' en k, ce qui donne $\mu=\frac{\theta}{k^2}$, $\mu'=\frac{\varpi}{k^2}$, & que l'on obſerve que les coordonnées de la molécule fluide qui dans ces

équations ſont déſignées par a, b, c, le ſont ici par x, y, z, on aura pour les trois forces paralleles aux axes des x, des y, & des z, réſultantes de l'attraction du ſphéroïde, & dirigées du côté oppoſé au centre du ſphéroïde,

$$-\frac{3M.x}{k^3}.F;\ -\frac{3.M.y}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right);\ -\frac{3M.z}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu'}{d\mu'}\right).$$

En raſſemblant donc toutes ces forces, on aura pour les forces entieres P, Q, R, qui ſollicitent la molécule fluide parallelement aux axes des x, des y, & des z,

$$P=-\frac{3M.x}{k^3}.F+\frac{S}{s^3}.\left\{\frac{3a.(ax+by+cz)}{s^2}-x\right\}+\frac{S'}{s'^3}.\left\{3a'.\left(\frac{a'x+b'y+c'z}{s'^2}\right)-x\right\}$$
$$+\&c+gq.(qx+q'y+q''z)+gr.(rx+r'y+r''z)$$

$$Q=-\frac{3M.y}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right)+\frac{S}{s^3}.\left\{\frac{3b.(ax+by+cz)}{s^2}-y\right\}+\frac{S'}{s'^3}.\left\{\frac{3b'.(a'x+b'y+c'z)}{s'^2}-y\right\}$$
$$+\&c+gq'.(qx+q'y+q''z)+gr'.(rx+r'.y+r''.z)$$

$$R=-\frac{3M.z}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu'}{d\mu'}\right)+\frac{S}{s^3}.\left\{\frac{3c.(ax+by+cz)}{s^2}-z\right\}+\frac{S'}{s^3}\left\{\frac{3c'(a'x+b'y+c'z)}{s^2}-z\right\}$$
$$+\&c+gq''.(qx+q'y+q''z)+gr''.(r.x+r'.y+r''.z).$$

L'équation, $0=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, qui, par l'Article précédent, doit avoit lieu à la ſurface, devient ainſi,

$$0=x\,dx.\left\{\frac{3M.F}{k^3}+\frac{S}{s^3}.\left(1-\frac{3a^2}{s^2}+\right)+\frac{S'}{s'^3}.\left(1-\frac{3a'^2}{s'^2}\right)+\&c.-g.(q^2+r^2)\right\}$$
$$+y\,dy.\left\{\frac{3M.}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu}{d\mu'}\right)+\frac{S}{s^3}.\left(1-\frac{3b^2}{s^2}\right)+\frac{S'}{s'^3}.\left(1-\frac{3b'^2}{s'^2}\right)+\&c.-g.(q'^2+r'^2)\right\}$$
$$+z\,dz.\left\{\frac{3M}{k^3}.\left(\frac{d.F\mu'}{d\mu'}\right)+\frac{S}{s^3}.\left(1-\frac{3c^2}{s^2}\right)+\frac{S'}{s'^3}.\left(1-\frac{3c'^2}{s'^2}\right)+\&c-g.(q''^2+r''^2)\right\}$$
$$-(y\,dx+x\,dy).\left\{\frac{3.S.ab}{s^5}+\frac{3.S'.a'b'}{s'^5}+\&c+g.(qq'+rr')\right\}$$
$$-(z\,dx+x\,dz).\left\{\frac{3.S.ac}{s^5}+\frac{3S'.a'c'}{s'^5}+\&c+g.(qq''+rr'')\right\}$$
$$-(z\,dy+y\,dz).\left\{\frac{3S.bc}{s^5}+\frac{3S'.b'c'}{s'^5}+\&c.+g.(q'q''+r'r'')\right\}$$

Le ſecond nombre de cette équation eſt une différence exacte, comme cela doit être par l'Article précédent; d'ailleurs pour que la ſuppoſition dont nous ſommes partis, ſavoir que

le ſphéroïde eſt un ellipſoïde, puiſſe ſubſiſter, il faut que cette différence coincide avec celle de l'équation finie, $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$, qui par l'Article I. repréſente la nature des ſphéroïdes elliptiques; on aura donc en comparant l'équation précédente à celle-ci

$$0 = x\,dx + my\,dy + nz\,dz,$$

les trois équations ſuivantes,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{3.S.ab}{s^5} + \frac{3.S'.a'b'}{s'^5} + \&c + g.(qq' + rr') \\ 0 &= \frac{3.S.ac}{s^5} + \frac{3.S'.a'c'}{s'^5} + \&c + g.(qq'' + rr'') \\ 0 &= \frac{3.S.bc}{s^5} + \frac{3.S'.b'c'}{s'^5} + \&c + g.(q'q'' + r'r'') \end{aligned}\right\} (Z)$$

a, b, c, a', b', c', &c. étant des fonctions des quantités connues β, γ, λ, β', γ', λ', &c. & des neuf quantités p, p', p'', q, q', q'', r, r', r''. Les trois équations précédentes ſont entre ces neuf quantités, & en les combinant avec les ſix que nous avons trouvées ci-deſſus entre ces mêmes quantités, on pourra les déterminer & par conſéquent fixer la poſition des trois axes principaux de l'ellipſoïde relativement à l'axe de rotation. On peut obſerver ici que cette poſition eſt indépendante de la maſſe & de la denſité du ſphéroïde.

On aura enſuite, en comparant les mêmes équations différentielles,

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\frac{3M.}{k^3}\left(\frac{d.F\mu}{d\mu}\right) + \frac{S}{s^3}.\left(1 - \frac{3b^2}{s^2}\right) + \&c - g.(q'^2 + r'^2)}{\frac{3M.F}{k^3} + \frac{S}{s^3}.\left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) + \&c - g.(q^2 + r^2)} \\ n &= \frac{\frac{}{k^3}\left(\frac{d.F\mu'}{d\mu'}\right) + \frac{S}{s^3}.\left(1 - \frac{3c^2}{s^2}\right) + \&c - g.(q''^2 + r''^2)}{\frac{3MF}{k^3} + \frac{S}{s^3}.\left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) + \&c - g.(q^2 + r^2)}; \end{aligned}\right\}; (V)$$

or on a, $m = \frac{k^2}{k^2 + \theta}$; $n = \frac{k^2}{k^2 + \varpi}$; d'ailleurs $\mu = \frac{\theta}{k^2}$, $\mu' = \frac{\varpi}{k^2}$;

ainſi les deux équations précédentes ſont entre les trois quantités k, θ, & ϖ; de ſorte que pour déterminer l'ellipſoïde, il faut encore une équation entre ces quantités. Cette troiſieme équation ſe tirera de la condition d'une maſſe fluide donnée M à laquelle il faut égaler la maſſe entiere du ſphéroïde; or ſi l'on nomme ρ ſa denſité, la maſſe du ſphéroïde eſt par l'Article I. égale à $\frac{4}{3}\rho\,.\,\pi\,.\,\frac{k^3}{\sqrt{mn}} = \frac{4}{3}\,.\,\rho\,.\,\pi\,.\,k\,.\,\sqrt{(k^2+\theta).(k^2+\varpi)}$; en égalant donc cette expreſſion à M, on aura l'équation,

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\rho\,.\,k\,.\sqrt{(k^2+\theta).(k^2+\varpi)} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,.\,\rho\,k^3\,.\sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)};$$

en ſubſtituant cette valeur de M dans les équations (V) & au lieu de m, & de n, leurs valeurs $\frac{1}{1+\mu^2}$, & $\frac{1}{1+\mu'^2}$, ces équations ne ſeront plus qu'entre μ, & μ', & lorſque par leur moyen, on aura déterminé ces variables, la valeur de k ſera donnée par l'équation

$$k^3 = \frac{3\,.\,M}{4\pi\rho\,.\sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)}}.$$

De là réſulte ce Théorême: ſi l'attraction ſuit la raiſon directe des maſſes, & la raiſon inverſe du quarré des diſtances, & que l'on imagine une maſſe fluide homogène tournant autour d'un axe quelconque, & dont toutes les parties s'attirent réciproquement, & ſont attirées par tant de corps que l'on voudra placés au loin dans l'eſpace, il eſt poſſible de lui donner la figure d'un ellipſoïde tel qu'elle ſoit en équilibre autour de ſon centre de gravité, en vertu de toutes les forces qui l'animent, pourvu cependant qu'elles n'excedent pas certaines limites.

Les équations (Z), ſimplifient les expreſſions des forces P,

Q, R, dont une molécule fluide eſt animée à la ſurface du ſphéroïde ; ſi & pour abréger, on ſuppoſe

$$L = \frac{3MF}{k^3} + \frac{S}{s^3} \cdot \left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) + \&c - g \cdot (q^2 + r^2)$$

$$L' = \frac{3M \cdot \left(\frac{d \cdot F\mu}{d\mu}\right)}{k^3} + \frac{S}{s^3} \cdot \left(1 - \frac{3b^2}{s^2}\right) + \&c - g \cdot (q'^2 + r'^2)$$

$$L'' = \frac{3M \cdot \left(\frac{dF\mu'}{d\mu'}\right)}{k^3} + \frac{S}{s^3} \cdot \left(1 - \frac{3c^2}{s^2}\right) + \&c - g \cdot (q''^2 + r''^2)$$

on aura en vertu des équations (Z),

$$P = -Lx ; \; Q = -L'y ; \; R = -L''z.$$

Si l'on nomme P', Q', R', les peſanteurs aux extrémités des axes des x, des y, & des z, on aura évidemment

$$P' = L \cdot k ; \; Q' = L' \cdot \frac{k}{\sqrt{m}} ; \; R' = L'' \cdot \frac{k}{\sqrt{n}} ;$$

d'ailleurs les équations (V) donnent

$$m = \frac{L'}{L} ; \; n = \frac{L''}{L}$$

partant

$$P' = Lk ; \; Q' = Lk\sqrt{m} ; \; R' = Lk\sqrt{n} ;$$

d'où l'on tire

$$P' : Q' : R' :: \frac{1}{k} : \frac{\sqrt{m}}{k} : \frac{\sqrt{n}}{k} ;$$

c'eſt-à-dire, que les peſanteurs aux extrémités des trois axes, ſont réciproquement comme ces axes. Il ſuit encore de là que ſi P' eſt poſitif, les valeurs de Q', & de R' ſeront poſitives, en ſorte que le fluide ne ſe diſſipera point, pourvu que m & n ſoient poſitifs : or m étant égale à $\frac{1}{1+\mu^2}$ il, ne peut-être poſitif que dans la cas où μ^2 eſt poſitif, ou négatif & au-deſſous de -1 ; donc toutes les valeurs de μ^2 & de μ'^2 qui ſatisferont aux équations (Z), & qui d'ailleurs ſeront ou poſitives, ou négatives & au-deſſous de -1, donneront autant de ſphéroïdes elliptiques avec leſquels l'équilibre pourra ſubſiſter ; & le

fluide ne se dissipera pas, si la pesanteur à l'extrémité d'un des axes, est dirigée vers l'intérieur du sphéroïde.

Si l'on nomme p la pesanteur à la surface du sphéroïde, & t la perpendiculaire abaissée de cette surface sur le plan des x & des y; il est visible que par la nature de l'équilibre, p devant être dirigé suivant t, on aura $-\frac{pz}{t}$, pour l'expression de la force qui anime la molécule de la surface parallelement à l'axe des z, d'où l'on tire

$$-\frac{pz}{t}=R=-L''z$$

partant $p=L''.t$; d'où il suit que la pesanteur à la surface du sphéroïde est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée de la surface sur le plan des x & des y, ou plus généralement sur le plan de deux quelconques des trois axes du sphéroïde. Quant à la pesanteur dans l'intérieur du sphéroïde, on observera que les expressions précédentes des forces P, Q, R ont lieu pour tous les points de l'intérieur du sphéroïde; ensorte que les pesanteurs des différens points d'un rayon quelconque mené du centre du sphéroïde à la surface, sont proportionelles à leurs distances respectives à ce centre.

I X.

On pourra, au moyen de l'analyse précédente, déterminer la figure que la terre supposée fluide & homogène, doit prendre pour être en équilibre sous l'action du Soleil & de la Lune; mais nous avons deja observé que cet état d'équilibre est impossible, à cause des mouvements de ces deux astres, & du mouvement de rotation de la terre. Pour que l'équilibre d'une masse fluide puisse subsister sous l'action d'un corps étranger, il est nécessaire que ce corps réponde constamment au même

point de sa surface ; or c'est ce qui a lieu à très-peu-près, relativement à l'attraction de la Terre sur la Lune, & l'on a quelques raisons de soupçonner que la même correspondance existe généralement entre les Planetes principales & leurs satellites. L'égalité des deux mouvemens moyens de rotation & de révolution de la Lune, maintient la Terre à-peu-près au-dessus du même point de sa surface ; ainsi l'attraction de la Terre doit influer d'une maniere constante sur sa figure, & l'on pourra déterminer, par ce qui précede, la nature de l'ellipsoïde dont toutes les parties seroient en équilibre en vertu du mouvement de rotation de la Lune, & de l'attraction de la Terre. Une circonstance particuliere à ce problême, en simplifie la solution. L'axe de rotation de la Lune peut être supposé sans erreur sensible, perpendiculaire au plan de son orbite, ce qui détermine *à priori* la position des trois axes principaux de l'ellipsoïde ; car il est clair que l'axe des x, sera l'axe même de rotation de la Lune ; que celui des y, sera situé sur le rayon vecteur qui joint les centres de la Terre & de la Lune ; & que l'axe des z sera perpendiculaire à ces deux axes : on pourra donc supposer que les x, y, z, coincident avec les x', y', z', ce qui donne

$$p = 1;\ q = 0;\ r = 0;\ p' = 0;\ q' = 1;\ r' = 0;\ p'' = 0;\ q'' = 0;\ r'' = 1.$$

On a d'ailleurs dans ce cas, $a = 0$; $b = s$; $c = 0$; enfin S représente alors la masse de la terre ; les équations (V) de l'Article précédent donneront conséquemment en y substituant au lieu de M, sa valeur $\frac{4}{3}\pi\rho.k^3.\sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)}$, & au lieu de m & n leurs valeurs $\frac{1}{1+\mu^2}$, & $\frac{1}{1+\mu'^2}$,

$$4\pi\rho.F.\sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)} + \frac{S}{s^3} = (1+\mu^2).\left\{\begin{array}{l} 4\pi\rho.\sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)}.\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right) \\ \qquad - \frac{2S}{s^3} - g \end{array}\right\}$$

$$4\pi\rho . F . \sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)} + \frac{S}{s^3} = (1+\mu'^2) . \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho . \sqrt{(1+\mu^2).(1+\mu'^2)} . \left(\frac{dF\mu'}{d\mu'}\right) \\ + \frac{S}{s^3} - g \end{array} \right\}$$

on aura au moyen de ces équations, μ & μ', & par conſéquent les deux excentricités de l'ellipſoïde.

μ & μ', étant très-petits dans le cas préſent, on aura facilement F, d'une maniere auſſi approchée que l'on voudra ; & ſi l'on ne conſerve que les puiſſances ſimples de μ^2 & de μ'^2, on trouvera

$$F = \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{(1+\mu^2 x^2).(1+\mu'^2 x^2)}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}\mu'^2$$

En ſubſtituant cette valeur de F, dans les deux équations précédentes, on aura par la premiere, $\mu^2 = \frac{5}{2} . \frac{\left(g + \frac{3 . S}{s^3}\right)}{\frac{4}{3}\pi . \rho}$, & par la ſeconde, $\mu'^2 = \frac{5}{2} . \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho}$; or les trois demi-axes de l'ellipſoïde ſont k, $k . \sqrt{1+\mu^2}$, $k\sqrt{1+\mu'^2}$, ou à très-peu-près, k, $k . (1 + \frac{1}{2}\mu^2)$, $k . (1 + \frac{1}{2}\mu'^2)$; on aura donc pour les valeurs approchées de ces demi-axes,

$$k, \quad k . \left\{ 1 + \frac{\frac{5}{4} . \left(g + \frac{3 S}{s^3}\right)}{\frac{4}{3}\pi . \rho} \right\}, \quad k . \left\{ 1 + \frac{\frac{5}{4} g}{\frac{4}{3}\pi\rho} \right\},$$

Si l'on prend pour unité de diſtance, le demi-diametre de la Lune, la maſſe de ce ſatellite ſera à fort peu-près égale à $\frac{4}{3}\pi\rho$; d'ailleurs ſon moyen mouvement de rotation étant préciſément égal à ſon mouvement moyen de révolution, la force centrifuge qui en réſulte à la diſtance s, eſt égale à la force centrifuge du mouvement de révolution de la Lune autour

de la Terre, & dont la valeur eſt, comme l'on ſçait, $\frac{S}{s^2}$; on aura ainſi $gs = \frac{S}{s^2}$; partant $g = \frac{S}{s^3}$; en nommant donc i, le rapport de la maſſe S de la Terre à celle de la Lune, les expreſſions précédentes des trois demi-axes du ſphéroïde lunaire deviendront,

$$k, k.\left(1 + \frac{5i}{s^3}\right), k.\left(1 + \frac{5i}{4s^3}\right);$$

d'où il ſuit que l'allongement du diamètre de la Lune, dirigé vers la Terre, eſt quadruple de l'allongement du diamètre qui lui eſt perpendiculaire dans le plan de l'orbite lunaire; & ce même réſultat a lieu pour tous les ſatellites ſuppoſés fluides & homogènes, ſi, comme la Lune, ils ont un mouvement de rotation égal en durée à leur mouvement de révolution, & ſi de plus l'axe de rotation eſt preſque perpendiculaire au plan de leur orbite.

s exprime la moyenne diſtance de la Lune à la Terre, & cette diſtance évaluée en parties du demi-diamètre de la Lune, eſt égale à l'unité diviſée par le ſinus du demi-diametre apparent de la Lune. Ce demi-diamètre dans les moyennes diſtances, eſt de 15′ 45″; on aura donc $\frac{1}{s} =$ ſin. 15′ 45″. Si l'on ſuppoſe enſuite $i = 70$, ce qui paroît aſſez conforme aux phénomenes des marées & du mouvement de l'axe terreſtre, on aura pour les trois demi-axes du ſphéroïde lunaire dans l'hypothèſe de la fluidité & de l'homogénéité,

$$k, \quad \frac{29712}{29711}.k, \quad \frac{118845}{118844}.k$$

X.

Conſidérons particulièrement le cas d'une maſſe fluide homogène qui n'eſt ſollicitée que par l'attraction de ſes parties

& par la force centrifuge de ſon mouvement de rotation. Ce cas eſt celui des planetes principales ſuppoſées homogènes, du moins lorſque l'on ne conſidere que ce qu'il y a de permanent dans leur figure, & lorſqu'on fait abſtraction des forces variables qui changent à chaque inſtant la figure des fluides qui les recouvrent. Il eſt viſible qu'alors, le ſphéroïde ſera un ellipſoïde de révolution dont on déterminera la nature, en faiſant $S = 0$, & $\mu' = \mu$, dans les formules de l'Article précédent. Les deux équations entre μ & μ', ſe réduiront ainſi à la ſuivante

$$4\pi\rho . F = 4\pi\rho . (1 + \mu^2) . \left(\frac{dF}{d\mu}\right) - g.$$

Or on a par l'article VI.

$$F = \frac{1}{\mu^3} . (\mu - ang. tang.\, \mu)$$

$$\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right) = \frac{1}{2\mu} . \left(\frac{d.F\mu^2}{d\mu}\right)' = \frac{1}{2\mu^3} . \left(ang. tang. \mu - \frac{\mu}{1 + \mu\mu}\right);$$

partant ſi l'on fait pour abréger, $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho} = q$, on aura

$$\frac{9\mu + 2q\mu^3}{9 + 3\mu^2} - ang. tang. \mu = 0; \; (\sigma)$$

on déterminera μ au moyen de cette équation, & l'on aura k, au moyen de l'équation, $\frac{4}{3}\pi . \frac{k^3}{m} = M$, ou $\frac{4}{3}\pi k^3 . (1 + \mu^2) = M$, M étant la maſſe du fluide; ayant ainſi μ & k, l'ellipſoïde ſera déterminé.

Si l'on ſuppoſe μ très-petit, l'équation (σ) donnera en y ſubſtituant au lieu de *ang. tang.* μ, ſa valeur en ſérie, $\mu - \frac{1}{3} \mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 - \&c$,

$$q = \frac{2}{5}\mu^2 - \frac{12}{35} . \mu^4 + \frac{2}{7}\mu^6 - \&c;$$

d'où l'on tire par le retour des ſuites,

$$\mu^2 = \frac{5}{2} q + \frac{75}{14} . q^2 + \&c;$$

ainſi le demi-axe de l'équateur étant égal à $k . \sqrt{1+\mu^2}$, ſera égal à

$$k.(1+\tfrac{5}{4}q+\tfrac{425}{224}q^2+\&c)$$

enſorte que ſi q eſt très-petit, le demi-axe de l'équateur ſera plus allongé que le demi-axe du pôle, de la quantité $\frac{5}{4}kq$; & le rapport des deux axes de l'équateur & du pôle ſera à très-peu-près. $1+\frac{5}{4}q$.

Pour déterminer la loi de la peſanteur à la ſurface de cet ellipſoïde, nous obſerverons que par l'Art. VIII, la peſanteur eſt proportionelle à la perpendiculaire à la ſurface, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre le plan des x & des y: or il eſt viſible que cette droite eſt perpendiculaire à la courbe du méridien, & qu'elle va rencontrer l'axe de révolution de l'ellipſoïde; d'ailleurs ſi l'on nomme $90^\circ-\psi$, l'angle qu'elle forme avec cet axe, ψ ſera la latitude du point de la ſurface que cette perpendiculaire rencontre, & l'on aura pour l'expreſſion de cette perpendiculaire, $\frac{k}{m.\sqrt{1+\mu^2.cos.\psi^2}}$; donc ſi P' repréſente la peſanteur au pôle, & p la peſanteur correſpondante à la latitude ψ, on aura

$$P' : p :: \frac{k}{m} : \frac{k}{m.\sqrt{1+\mu^2.cos.\psi^2}}$$

d'où l'on tire

$$p=\frac{P'}{\sqrt{1+\mu^2.cos.\psi^2}}=P'.(1-\tfrac{1}{2}\mu^2.cos.\psi^2+\tfrac{3}{8}.\mu^4.cos.\psi^4-\&c).$$

Si l'ellipſoïde differe peu de la ſphere, on aura à très-peu-près

$$p=P'.(1-\tfrac{1}{2}\mu^2.cos.\psi^2)=P'.(1-\tfrac{5}{4}q.cos.\psi^2);$$

d'où il ſuit que dans ce cas, la peſanteur va en diminuant du pôle vers l'équateur proportionnellement au quarré du coſinus de la latitude.

On a par l'Article VIII, $P' = L.k$, & $L = \frac{3MF}{k^3}$; en ſubſtituant au lieu de M, & de F leurs valeurs, on aura

$$P' = \frac{4\pi\rho k.(1+\mu^2).}{\mu^3}(\mu - ang.\,tang\,\mu);$$

& par conſéquent

$$p = \frac{4\pi.\rho.k.(1+\mu^2).(\mu - ang.\,tang.\,\mu)}{\mu^3.\sqrt{1+\mu^2.cof.\psi^2}}$$

d'où l'on tire en ſubſtituant au lieu de *ang. tang.* μ, ſa valeur tirée de l'équation (σ)

$$p = \frac{4\pi\rho.k.(1+\mu^2).(3-2q)}{(9+3\mu^2).\sqrt{1+\mu^2.cof.\psi^2}}.$$

L'obſervation ne donne point immédiatement la valeur de q; elle ne fait connoître que la grandeur du degré du méridien & la longueur du pendule à ſecondes à une latitude donnée. Pour en tirer la valeur de q, nommons l la longueur du pendule à la latitude ψ; en prenant une ſeconde pour unité de tems, la peſanteur p ſera égale à $\pi^2.\,l$. Si l'on nomme enſuite T, le nombre de ſecondes que la maſſe fluide employe à tourner ſur elle-même, la force centrifuge g, à la diſtance 1 de l'axe de rotation, ſera $\frac{4\pi^2}{T^2}$; on aura donc

$q = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho} = \frac{12.\pi^2}{4\pi\rho.T^2}$, ce qui donne $4\pi\rho = \frac{12.\pi^2}{q.T^2}$.

Le rayon oſculateur du méridien elliptique eſt $\frac{k.(1+\mu^2)}{(1+\mu^2.cof.\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$; en nommant donc c, la longueur du degré du méridien à la latitude ψ, on aura

$$\frac{k\pi.(1+\mu^2)}{(1+\mu^2.cof.\psi^2)^{\frac{3}{2}}} = 180.\,c;$$

cette équation combinée avec la précédente donne

$$\frac{4\pi.\rho.k.(1+\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2.cof.\psi^2}} = 180\,c.(1+\mu^2.cof.\psi^2).\frac{12\pi}{qT^2}$$

la valeur précédente de p, devient ainſi

$$p = \frac{180 \, . \, c \, . \, (3 - 2q) \, . \, (1 + \mu^2 \, . \, cof. \, \psi^2)}{3 + \mu^2} \, . \, \frac{4\pi}{q T^2} = \pi^2 \, . \, l.$$

d'où l'on tire

$$q = \frac{720 \, . \, c \, . \, (3 - 2q) \, . \, (1 + \mu^2 \, . \, cof. \, \psi^2)}{(3 + \mu^2) \, . \, \pi \, . \, l \, . \, T^2}.$$

On aura aū moyen de cette équation, & de l'équation (σ) les valeurs des deux inconnues q & μ; on aura enſuite la valeur de k, au moyen de l'équation précédente entre c & k.

L'intenſité de la force attractive d'une ſphère dont le rayon eſt k, & la denſité ρ, ſur un point ſitué au-dehors à la diſtance f, eſt $\frac{4}{3} . \pi \rho . \frac{k^3}{f^2}$; mais on a, par ce qui précéde,

$$\tfrac{4}{3} \pi \rho \, . \, k = \frac{(3 + \mu^2) \, . \, \sqrt{1 + \mu^2 \, . \, cof. \, \psi^2}}{(1 + \mu^2) \, . \, (3 - 2q)} \, . \, p;$$

la valeur de cette force attractive ſera donc,

$$\frac{k^2}{f^2} \, . \, \frac{(3 + \mu^2) \, . \, \sqrt{1 + \mu^2 \, . \, cof. \, \psi^2}}{(1 + \mu^2) \, . \, (3 - 2q)} \, . \, p;$$

d'où il ſera facile de conclure l'intenſité de la force attractive de toute autre ſphère, puiſqu'à diſtances égales, ces forces ſont proportionelles aux maſſes.

Les meſures du degré du méridien & de la longueur du pendule faites en France, donnent relativement à la terre;

$$\psi = 48^\circ \, 50' ; \; c = 57074^{\text{Toiſes}} ; \; l = 440^{\text{Lignes}}, 67 ;$$

d'ailleurs la durée de la rotation de cette planete étant de 23 heures 56′ 4″, on a $T = 86164''$; enfin μ^2 étant très-petit, on peut, au lieu de l'équation (σ), faire uſage de la valeur précédente de q en ſérie; les deux équations précédentes entre μ & q, deviendront ainſi

$$q = \tfrac{2}{5} \mu^2 - \tfrac{12}{35} \mu^4 + \tfrac{2}{7} \mu^6$$

$$q = \frac{0,003454374 \cdot (1 - \frac{2}{3} q) \cdot (1 + \mu^2 . \text{cof.}^2\, 48^\circ\, 50')}{1 + \frac{1}{3}\mu^2}.$$

ces équations donnent

$$q = 0,003449414 ; \mu^2 = 0,008687763.$$

Le rapport de l'axe de l'équateur à celui du pôle étant égal à $\sqrt{1+\mu^2}$, eſt dans ce cas égal à 1,004334487 ; ces deux axes ſont par conſéquent à-peu-près dans le rapport de 231 $\frac{7}{10}$ à 230 $\frac{7}{10}$, & par l'Article VIII, les peſanteurs au pôle & à l'équateur ſont à-peu-près dans le même rapport.

Le demi-axe k, du pôle = 3260256 Toiſes.

On trouve enfin qu'une ſphère d'un rayon quelconque r, dont la denſité eſt égale à la moyenne denſité de la Terre, multipliée par i, attireroit un corps placé au-dehors à la diſtance f de ſon centre, avec une force égale à 0,99842. $\frac{k^2}{f^2} \cdot \frac{r^3}{k^3} . i . p$, p exprimant la peſanteur obſervée à Paris.

Cette expreſſion de la force attractive de la matiere ſeroit rigoureuſe, ſi la Terre étoit fluide & homogène ; l'hétérogénéité de ſes parties & l'irrégularité de leur poſition, peuvent y produire une petite erreur, tout au-plus du même ordre que la différence de la figure de la Terre à celle d'une ſphère ; on doit ainſi la regarder comme fort approchée ; mais ſi l'hétérogénéité des parties de cette planete affecte peu cette valeur, elle répand une grande obſcurité ſur la connoiſſance de la denſité moyenne de la Terre, c'eſt-à-dire, ſur le rapport de cette denſité à celle des différents corps qui ſont à ſa ſurface. Il y a lieu de préſumer que la Terre eſt homogène depuis ſon centre juſqu'à un petit nombre de lieues de ſa ſurface ; car ſi dans ſon intérieur elle étoit compoſée de parties hétérogènes comme à ſa ſurface, elles y ſeroient très-probablement diſpoſées auſſi irrégulierement,

& la loi de la pesanteur, loin d'être à-peu-près uniforme de l'équateur aux pôles, seroit assujettie à des irrégularités très-sensibles. On connoîtroit donc la moyenne densité de la Terre si l'on pouvoit pénétrer à une assez grande profondeur pour parvenir jusqu'à ce noyau homogéne qui, selon toute apparence, remplit l'intérieur du globe terrestre; mais ce moyen étant impraticable, il ne nous reste qu'à comparer la pesanteur avec l'attraction d'un corps placé à la surface de la terre, dont la densité soit bien déterminée, & qui soit assez grand pour que son attraction ait un rapport sensible à celle de la terre entiere; aucun corps n'est plus propre à cet objet, qu'une haute montagne, d'un grand diamètre, & dont la constitution intérieure soit connue; on a déja fait dans cette vue, quelques observations intéressantes qui paroissent donner à la Terre, une moyenne densité quatre fois & demi plus grande que celle de l'eau commune; mais ces observations sont si délicates & leur résultat dépend de tant d'élémens si difficiles à bien connoître, qu'il est nécessaire de les répéter sur plusieurs montagnes, avant que de pouvoir prononcer sur cet objet, avec certitude.

XI.

Reprenons l'équation (σ) de l'Article précédent, & nommons φ la fonction, $\frac{9\mu + 2q\mu^3}{9 + 3\mu^2}$ — *ang. tang.* μ; ce qui réduit cette équation à celle-ci, $\varphi = 0$. Si l'on considére μ comme variable, on a

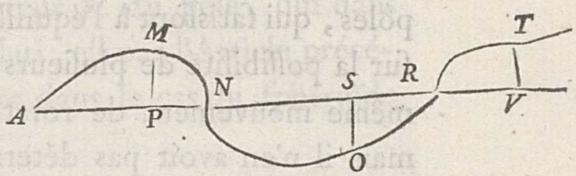
$$d\varphi = \frac{6\mu^2 . d\mu . [q\mu^4 + (10q - 6) . \mu^2 + 9q]}{(3\mu^2 + 9)^2 . (1 + \mu^2)} .$$

& par conséquent

$$\varphi = \int \frac{6\mu^2 . d\mu . [q\mu^4 + (10q - 6)\mu^2 + 9q]}{(3\mu^2 + 9)^2 . (1 + \mu^2)}$$

l'intégrale étant supposée commencer avec μ. Cela posé,

Si



Si l'on construit la courbe, *AMNORT*, de maniere que l'abscisse *AP* étant μ, l'ordonnée *PM* soit égale à $\frac{6\mu^2.(q.\mu^4+(10q-6).\mu^2+9q)}{(3\mu^2+9)^2.(1+\mu^2)}$; il est visible que les ordonnées commenceront & finiront par être positives, & que si du côté des abscisses positives, les seules que l'on doit considérer ici, la courbe coupe l'axe des abscisses, elle le coupera en deux points *N* & *R* tels que *AN* & *AR* seront déterminés par les deux racines positives de l'équation

$$o = q\mu^4 + (10q-6).\mu^2 + 9q;$$

où ce qui revient au même, par les deux valeurs suivantes de μ,

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9}}.$$

Pour que ces valeurs ne soient pas imaginaires, il faut que $\frac{3}{q} - 5$ soit positif & plus grand que 3; d'où il suit que la courbe ne coupera point son axe du côté des abscisses positives, ou qu'elle le coupera en deux points *N* & *R*, & il est bien clair qu'elle ne peut le couper qu'en ces deux points.

Maintenant, la fonction φ represente l'aire de cette courbe, & pour que cette fonction puisse être nulle, il faut que la courbe coupe son axe, & que l'aire négative *NOR*, excede, ou du moins soit égale à l'aire positive *AMN*; il doit donc exister un point *S* tel que l'aire *NOS* soit égale à l'aire *AMN*; mais puisque la fonction φ finit par être positive, il est clair qu'il existe un autre point *V* tel que l'aire *RTV* est égale à l'aire *SOR*, ensorte que l'aire φ de la courbe est nulle aux deux points *S* & *V*, & de plus il est visible qu'elle ne peut être nulle qu'à ces deux points.

Il suit delà que pour un mouvement de rotation

donné, il y a toujours deux figures elliptiques applaties vers les pôles, qui satisfont à l'équilibre. Cette remarque intéressante sur la possibilité de plusieurs figures d'équilibre relatives à un même mouvement de rotation, est dûe à M. d'Alembert; mais il n'en avoit pas déterminé le nombre que j'ai trouvé se réduire à deux, par l'analyse précédente dont je fis part à cet illustre Géometre dans le mois de Juillet de 1778.

Si l'on suppose q très-petit, on pourra satisfaire à l'équation (σ) dans les deux hypothèses de μ très-petit, & de μ très-grand. Dans l'une & l'autre hypothèse, μ est donné par une suite ascendante ordonnée relativement aux puissances de q. On a vu dans l'Article X, que μ étant supposé très-petit, on a

$$\mu = \tfrac{5}{2}.q + \tfrac{75}{14}.q^2 + \&c.$$

Pour avoir la valeur de μ, dans le cas où elle est fort grande, nous observerons qu'alors, *ang. tang.* μ differe très-peu de 90°; ensorte que si l'on suppose $\mu = \frac{\pi}{2} - \alpha$, α sera un très-petit angle dont la tangente sera $\frac{1}{\mu}$; on aura donc

$$\alpha = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{3\mu^3} + \frac{1}{5\mu^5} - \&c.$$

& par conséquent

$$ang.\ tang.\ \mu = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3\mu^3} - \frac{1}{5\mu^5} + \&c$$

l'équation (σ) de l'Article précédent deviendra ainsi,

$$\frac{9\mu + 2q\mu^3}{9 + 3\mu^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3\mu^3} - \&c.$$

d'où il est facile de conclure par le retour des suites,

$$\mu = \frac{3\pi}{4q} - \frac{8}{\pi} + \frac{4q}{\pi}\left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right) + \&c.$$

& en substituant au lieu de π, sa valeur très approchée $\frac{355}{113}$, on aura,

$$\mu = 2,356195.\tfrac{1}{q} - 2,546479 - 1,478885.q + \&c.$$

On a vu, dans l'Article précédent que relativement à la Terre, $q = 0,003449414$. Cette valeur de q, substituée dans

l'expreſſion précédente de μ, donne $\mu = 680, 519$; ainſi le rapport des deux axes de l'équateur & du pôle, qui dans le cas du ſphéroïde très-peu applati, eſt par l'Article précédent, égal à $1,004334487$, devient dans le cas du ſphéroïde très-applati, égal à $680, 519$.

XII.

La valeur de q a une limite au-delà de laquelle l'équilibre eſt impoſſible avec une figure elliptique ; en effet, il eſt néceſſaire pour la poſſibilité de l'équilibre, que dans la figure de l'Article précédent, l'aire négative *NOR*, ſoit au moins égale à l'aire poſitive *AMN*; ainſi la limite dont il s'agit, eſt la valeur de q, qui rend ces deux aires égales. Il ne peut y avoir qu'une limite de cette nature ; car la valeur de φ peut être miſe ſous cette forme

$$6q . \int \frac{\mu^2 d\mu (\mu^4 + 10\mu^2 + 9)}{(3\mu^2 + 9)^2 . (1 + \mu^2)} - 36 . \int \frac{\mu^4 . d\mu}{(3\mu^2 + 9)^2 . (1 + \mu^2)},$$

dans laquelle le terme poſitif commence & finit par être plus grand que le terme négatif. Partant, ſi l'on a choiſi q aſſez petit pour que le terme négatif commence à être égal au terme poſitif dans quelque point de l'intégrale, il eſt clair qu'avec une valeur plus grande de q, le terme négatif ſera conſtamment au-deſſous du terme poſitif, & la fonction φ ne pourra jamais devenir nulle.

Maintenant, lorſque l'aire poſitive *AMN* eſt égale à l'aire négative *NOR*, la fonction φ devient nulle, en y ſubſtituant *AR* pour μ; la valeur de *AR* eſt donnée par l'équation,

$$0 = \mu^4 + (10q - 6) . \mu^2 + 9q;$$

cette équation doit donc avoir lieu en même-tems que celle-ci,

$$0 = \frac{9\mu + 2q . \mu^3}{9 + 3\mu^3} - \text{ang. tang. } \mu.$$

de ces équations, on tire les deux ſuivantes

$$q = \frac{6\,\mu^2}{(1+\mu^2).(9+\mu^2)}$$

$$0 = \frac{7.\mu^5 + 30.\mu^3 + 27.\mu}{(1+\mu^2).(3+\mu^2).(9+\mu^2)} - \text{ang. tang. } \mu.$$

La valeur de μ, qui ſatisfait à cette derniere équation, eſt $\mu = 2,5292$, d'où l'on tire, $q = 0,337007$. La quantité $\sqrt{1+\mu^2}$, qui exprime le rapport de l'axe de l'équateur à celui du pôle, eſt dans ce cas égale à 2,7197.

q, relativement à la Terre, eſt égal à 0,00344941 4; cette valeur de q, répond à un mouvement de rotation de 23 heures 56′ 4″; or on a généralement $q = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\rho}$, enſorte que par rapport aux maſſes de même denſité, la valeur de q eſt proportionelle à la force centrifuge g du mouvement de rotation; d'ailleurs, ſuivant les théorêmes d'Huyghens ſur la force centrifuge, les valeurs de q ſont entr'elles réciproquement comme les quarrés des tems de rotation; d'où il eſt facile de conclure que relativement à une maſſe de même denſité que la Terre, la rotation qui répond à $q = 0,337007$, eſt de 2 heures 25′ 17″. Delà réſultent ces deux théorêmes.

Toute maſſe fluide homogène d'une denſité égale à la moyenne denſité de la Terre, ne peut pas être en équilibre avec une figure elliptique, ſi le tems de ſa rotation eſt moindre que 2 heures 25′ 17″; & ſi ce tems eſt plus conſidérable, il y a toujours deux figures elliptiques, & non davantage, qui ſatisfont à l'équilibre.

Si la denſité de la maſſe fluide eſt différente de celle de la Terre, on aura le tems de la rotation avec lequel l'équilibre ceſſe d'être poſſible avec une figure elliptique, en multipliant 2 heures 25′ 17″, par la racine quarrée du rapport de la denſité moyenne de la Terre, à celle de la maſſe fluide.

Ainſi relativement à une maſſe fluide dont la denſité ne ſeroit qu'un quart de celle de la Terre, ce qui a lieu à-peu-près pour le Soleil, ce tems ſeroit de $4^{heures}\ 50'\ 34''$; & ſi la denſité de la Terre ſuppoſée fluide & homogène étoit environ 98 fois moindre que ſa denſité actuelle, la figure qu'elle auroit en vertu de ſon mouvement de rotation, ſeroit la limite de toutes les figures elliptiques avec leſquelles l'équilibre peut ſubſiſter.

On pourroit croire que la limite de q, eſt celle où le fluide commenceroit à ſe diſſiper en vertu d'un mouvement de rotation trop rapide; mais il eſt facile de ſe convaincre du contraire, en obſervant que par l'Article VIII, la peſanteur à l'équateur de l'ellipſoïde, eſt à la peſanteur au pôle, dans le rapport de l'axe du pôle à celui de l'équateur, rapport qui dans ce cas eſt celui de 1 à 2,7197; l'équilibre ceſſe donc d'être poſſible, parce qu'avec un mouvement de rotation plus rapide, il eſt impoſſible de donner à la maſſe fluide, une figure elliptique telle que la réſultante de ſon attraction & de la force centrifuge ſoit perpendiculaire à ſa ſurface.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici μ^2 poſitif, ce qui donne des ſphéroïdes applatis vers les pôles; examinons préſentement ſi l'équilibre peut ſubſiſter avec une figure allongée vers les pôles. Cette ſuppoſition rend μ^2 négatif; ſoit donc $\mu^2 = -\mu'^2$, la valeur dans m étant par ce qui précéde, égale à $\frac{1}{1+\mu^2}$ devient $\frac{1}{1-\mu'^2}$; ainſi pour qu'elle ſoit poſitive, comme elle doit l'être relativement aux ellipſoïdes, il eſt néceſſaire que μ'^2 ſoit poſitif & moindre que l'unité. Voyons donc s'il eſt poſſible de ſatisfaire à l'équation $\varphi = 0$, donnée par la condition de l'équilibre, avec une valeur de μ' moindre

que l'unité. En ſubſtituant au lieu de φ, ſa valeur ſous forme intégrale, l'équation $\varphi = 0$, devient

$$0 = \int \frac{6\mu^2 d\mu . [q\mu^4 + (10.q - 6).\mu^2 + 9.q]}{(1+\mu^2).(9+3\mu^2)^2}.$$

Si l'on change μ, dans $\mu' \sqrt{-1}$, on aura

$$0 = \int \frac{\mu'^2 . d\mu' . [q.(1-\mu'^2).(9-\mu'^2) + 6.\mu'^2]}{(1-\mu'^2).(9-3\mu'^2)^2};$$

or il eſt clair que les élémens de cette intégrale correſpondans à des valeurs de μ' moindres que l'unité, ſont poſitifs, & qu'ainſi l'intégrale entiere correſpondante à ces valeurs eſt néceſſairement poſitive, & ne peut devenir nulle ; l'équilibre ne peut donc point ſubſiſter avec une figure elliptique allongée vers les pôles.

Je n'ai point eu égard dans les recherches précédentes, à la conſidération de la ſtabilité de l'équilibre ; parce que la détermination des loix de cette ſtabilité, tient eſſentiellement à la théorie des oſcillations d'une maſſe fluide infiniment peu dérangée de ſon état d'équilibre. Ce n'eſt point ici le lieu de traiter cet objet intéreſſant dont je me ſuis occupé ailleurs; (voyez les Mémoires de l'Académie pour l'année 1776, pag. 219).

XIII.

Si le fluide a un mouvement de rotation plus rapide que celui qui convient à l'équilibre, il fera des oſcillations continuelles, en ſuppoſant toutes ſes parties entiérement libres; mais ſi, comme dans tous les fluides connus, il exiſte entre ſes molécules, une force de tenacité qui les faſſe adhérer les unes aux autres, on conçoit qu'après un grand nombre d'oſcillations, il finira par prendre une figure elliptique & un

mouvement de rotation avec lesquels l'équilibre pourra subsister ; pour cela, il est nécessaire que par l'applatissement de l'ellipsoïde, & par son renflement à l'équateur, le mouvement angulaire de rotation diminue jusqu'au point d'être au-dessous de la limite où l'équilibre cesse d'être possible. La détermination de cette figure d'équilibre paroît d'abord présenter de grandes difficultés ; mais elle peut être extrêmement simplifiée au moyen du principe suivant qui est d'un grand usage dans toutes les recherches où l'on se propose de déterminer ce qu'il y a de permanent dans le mouvement d'un systême de corps.

« De quelque maniere que les différens corps d'un systê-
» me réagissent les uns sur les autres, si l'on projette sur un
» plan quelconque chacune de leurs molécules, & que d'un
» point fixe pris sur ce plan, on mene à ces projections des
» rayons vecteurs ; la somme des produits de chaque molé-
» cule par l'aire que trace son rayon vecteur, est constam-
» ment proportionelle au tems. »

Ce principe a l'avantage de s'étendre au cas où il y a des changemens brusques dans le mouvement du systême, ensorte qu'aucune circonstance ne peut en altérer l'exactitude. Cela posé,

Imaginons une sphère solide & homogène dont nous prendrons le rayon pour l'unité, & qui tourne autour d'un de ses diamètres ; nommons g' la force centrifuge à la distance 1 de l'axe de rotation ; supposons ensuite que cette sphère devienne tout-à-coup fluide, & qu'après un grand nombre d'oscillations, elle se fixe à une figure elliptique dont le demi-axe de révolution soit k, & dont le demi-axe de l'équateur soit $k \cdot \sqrt{1+\mu^2}$. Soit, comme précédemment, g la force

centrifuge due à ſon mouvement de rotation, à la diſtance 1 de l'axe; le principe que nous venons d'expoſer, donne une relation entre les quantités k, μ, g & g'; car en vertu de ce principe, le fluide, dans ſa nouvelle ſituation, doit avoir un mouvement de rotation tel que la ſomme des produits de chaque molécule par l'aire que décrit autour du centre du ſphéroïde, le rayon vecteur mené de ce centre à la projection de la molécule ſur le plan de l'équateur, ſoit la même dans un tems donné, qu'à l'origine du mouvement; or ſi l'on multiplie chaque molécule par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation, & par la quantité $\sqrt{g}$, qui eſt proportionelle au mouvement angulaire de rotation du ſphéroïde, la ſomme de ces produits ſera évidemment proportionelle à la ſomme précédente; il ne s'agit donc que de multiplier chaque molécule du ſphéroïde par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation, & par $\sqrt{g}$, & d'égaler la ſomme de ces produits, à ce qu'elle étoit à l'origine, lorſque le fluide formoit une ſphère.

Si l'on conſidere la ſomme des produits de chaque molécule d'un parallele par le quarré de ſa diſtance à l'axe du ſpéroïde, il eſt clair que cette ſomme ſera de la quatrieme dimenſion, puiſque la molécule étant alors une petite ſurface, eſt de la dimenſion 2; cette ſomme ſera donc porportionelle à la quatrieme puiſſance du rayon du parallele; or ſi l'on conçoit une ſphère du rayon k, inſcrite au ſphéroïde & ayant le même centre, le rayon d'un parallele de la ſphère ſera à celui du parallele correſpondant du ſphéroïde, comme $1 : \sqrt{1+\mu^2}$; donc les ſommes des produits des molécules de ces paralleles, par les quarrés de leur diſtances à l'axe, ſeront entre-elles comme $1 : (1+\mu^2)^2$; & comme le nombre des

des paralleles eſt le même dans le ſphéroïde & dans la ſphére, il en réſulte que la ſomme des produits de chaque molécule de la ſphére par le quarré de ſa diſtance à l'axe, eſt à cette même ſomme relativement au ſphéroïde, comme $1 : (1+\mu^2)^2$. Cette ſomme dans la ſphére eſt de la cinquieme dimenſion, puiſque chaque molécule eſt de la troiſieme dimenſion; elle eſt donc proportionelle à la cinquieme puiſſance du rayon, & par conſéquent elle peut-être exprimée par $i\,k^5$, i étant un coëfficient conſtant, quel que ſoit k; par-tant, la ſomme des produits de chaque molécule du ſphéroïde par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation, eſt égale à $i\,k^5.(1+\mu^2)^2$. En multipliant cette quantité par $\sqrt{g}$, le produit $i\,k^5.\sqrt{g}.(1+\mu^2)^2$, ſera proportionel à la ſomme des produits de chaque molécule par l'aire que trace le rayon vecteur de ſa projection ſur le plan de l'équateur, dans un tems donné.

Si l'on fait $k=1$, $g=g'$, & $\mu=0$, on aura $i\sqrt{g'}$, pour ce même produit relativement au ſphéroïde dans ſon état primitif; en égalant donc ces deux produits, on aura

$$\sqrt{g'}=\sqrt{g}.k^5.(1+\mu^2)^2.$$

L'égalité de la maſſe du ſphéroïde avec celle de la ſphére primitive donne une nouvelle relation entre μ & k; par l'Article I, la maſſe du ſphéroïde eſt $\frac{4}{3}\pi.k^3.(1+\mu^2)$, & celle de la ſphére eſt $\frac{4}{3}\pi$; d'où l'on tire

$$k=(1+\mu^2)^{-\frac{1}{3}};$$

en combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$g=g'.(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Si l'on fait $q'=\frac{g'}{\frac{4}{3}\pi.\rho}$, la quantité que nous avons nommée q, ſera égale à $q'.(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}$; & l'équation de l'équilibre

$$o = \frac{9\mu + 2q\mu^3}{9 + 3\mu^3} - ang.\ tang.\ \mu$$

que nous avons trouvée dans l'Article X, deviendra

$$o = \frac{9\mu + 2q'.\mu^3.(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}}{9 + 3\mu^2} - ang.\ tang.\ \mu.$$

Cette équation déterminera μ ; on aura enſuite le demi-axe k, de rotation du ſphéroïde, au moyen de l'équation $k = (1+\mu^2)^{-\frac{1}{3}}$; le demi-axe de l'équateur ſera $k\sqrt{1+\mu^2}$, ou $(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}}$; & le mouvement angulaire de rotation du ſphéroïde ſera à celui de la ſphére, comme $\sqrt{g} : \sqrt{g'}$, ou comme $1 : (1+\mu)^{\frac{1}{3}}$, c'eſt-à-dire que ces mouvemens ſeront proportionels aux axes de révolution du ſphéroïde & de la ſphére.

Nommons φ, la fonction $\frac{9\mu + 2q'.\mu^3.(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}}{9 + 3\mu^2} - ang.\,tang.\,\mu$, qui doit être égale à zéro dans le cas de l'équilibre ; cette fonction commence par être poſitive, lorſque μ eſt très-petit, & finit par être négative, lorſque μ eſt infini ; il exiſte donc entre $\mu = o$, & $\mu = \infty$, une valeur de μ qui rend cette fonction nulle, & par conſéquent, quel que ſoit q', il y a toujours une figure elliptique avec laquelle la maſſe fluide peut être en équilibre.

On peut mettre la valeur de φ, ſous cette forme intégrale.

$$\varphi = 2.\int \mu^4 d\mu. \frac{\left(\frac{27.q'}{\mu^2} + 18.q' - [q'\mu^2 + 18.(1+\mu^2)^{\frac{2}{3}}]\right)}{(9+3\mu^2)^2.(1+\mu^2)^{\frac{5}{3}}};$$

lorſqu'elle devient nulle, la fonction $\frac{27.q'}{\mu^2} + 18.q' - [q'\mu^2 + 18.(1+\mu^2)^{\frac{2}{3}}]$ a déja paſſé par zéro, pour devenir négative ; or dès l'inſtant où cette fonction commence à être négative, elle continue de l'être, à meſure que μ augmente, parce

que d'un côté, la partie poſitive $\frac{27 \cdot q'}{\mu^2} + 18 q'$ diminue, & d'un autre côté la partie négative $-[q'\mu^2 + 18 \cdot (1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}]$ augmente avec μ. La valeur de φ, ne peut donc devenir deux fois nulle; d'où il ſuit qu'il n'y a qu'une ſeule valeur réelle & poſitive de μ, qui ſatisfaſſe à l'équation de l'équilibre, & par conſéquent le fluide ne peut être en équilibre qu'avec une ſeule figure elliptique.

Nous avons ſuppoſé la maſſe fluide, ſphérique & ſolide à l'origine du mouvement; mais il eſt facile d'étendre les réſultats précédens au cas où cette maſſe auroit été primitivement fluide & terminée par une figure quelconque; car ſi l'on conçoit une ſphére ſolide, de même maſſe & de même denſité que le ſphéroïde, & avec le même centre de gravité; ſi l'on conçoit encore toutes les forces étrangeres qui ſollicitoient le ſphéroïde à l'origine, appliquées aux différens rayons de la ſphére, prolongés, s'il eſt néceſſaire, il ſera facile de déterminer le mouvement de rotation de cette ſphére & la poſition de ſon axe de rotation. Maintenant, ſi l'on applique l'analyſe précédente à cette ſphére, la figure d'équilibre que l'on obtiendra, ſera celle à laquelle ſe fixera la maſſe fluide, quelle qu'ait été ſa figure à l'origine; la poſition de l'axe de rotation & le mouvement de rotation ſeront pareillement ceux qui réſulteront de cette analyſe.

REMARQUE.

Les recherches précédentes ſur les attractions des ſphéroïdes elliptiques, peuvent ſervir à déterminer rigoureuſement les attractions d'un ſolide hétérogène compoſé de couches

elliptiques variables ſuivant une loi quelconque, depuis le centre juſqu'à la ſurface. M. Clairaut a traité cette matiere avec beaucoup d'élégance & de généralité dans la ſuppoſition où les couches ſont à très-peu-près ſphériques; & il a fait voir que ſi l'on regarde leurs excentricités comme des quantités très-petites du premier ordre, l'équilibre d'une maſſe fluide hétérogène douée d'un mouvement de rotation, peut ſubſiſter avec des couches elliptiques, en négligeant les quantités du ſecond ordre. Nous renvoyons ſur cet objet à ſon excellent Ouvrage ſur la figure de la Terre, & nous nous contenterons d'obſerver ici, que l'équilibre rigoureux eſt impoſſible dans l'hypothèſe de l'ellipticité des couches; car il réſulte des formules précédentes, que dans ce cas, l'attraction des couches intérieures du ſphéroïde ſur un point placé à la ſurface, a pour expreſſion, une fonction tranſcendante des coordonnées de ce point; ainſi l'équation donnée par la condition de l'équilibre à la ſurface, ſeroit tranſcendante, & par conſéquent ne pourroit coincider avec la ſuppoſition de l'ellipticité des couches; mais la figure des Planetes eſt ſi approchante de la ſphére, que l'on peut ſans erreur ſenſible, partir de cette ſuppoſition, en négligeant les quantités du ſecond ordre; car il eſt très-naturel de penſer que parmi toutes les variations du ſecond ordre que l'on peut faire ſubir à la figure des Planetes déterminée dans l'hypothèſe de l'ellipticité des couches, il exiſte une loi de variation avec laquelle l'équilibre peut ſubſiſter en rigueur.

XIV.

La figure elliptique que nous avons trouvée ſatisfaire à l'équilibre d'une maſſe fluide homogène dont toutes les par-

ties s'attirent mutuellement, & qui tourne sur elle-même, ne doit être considérée que comme une solution particuliere du problême général où l'on se propose de déterminer la figure que cette masse doit prendre en vertu de ces forces. Ce problême envisagé dans toute sa généralité, présente des difficultés insolubles dans l'état actuel de l'analyse; mais il peut être simplifié par cette considération que la figure des Planetes différant très-peu de la sphére, on peut traiter cette différence comme une quantité extrêmement petite dont il est permis de négliger le quarré & les puissances supérieures. Quoique cette condition rende la solution du problême incomparablement plus simple, cependant les tentatives que j'ai faites pour déterminer directement toutes les figures d'équilibre, ne m'ont point complettement réussi; mais j'ai été plus heureux dans la détermination de la loi de la pesanteur, & je suis parvenu sur cet objet à un théorême fort général, la loi de la pesanteur étant comme une puissance quelconque n de la distance.

Considérons l'attraction du sphéroïde sur un point quelconque déterminé par les trois coordonnées x, y, z. Soit dM un élément du sphéroïde; x', y', z', les trois coordonnées de cet élément; V, l'intégrale $\int dM.[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2]^{\frac{n+1}{2}}$; & A, B, C, les attractions du sphéroïde parallelement aux axes des x, des y & des z, & tendantes à augmenter ces variables; on aura évidemment

$$A=\int dM.(x'-x).[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{n-1}{2}}=-\frac{1}{n+1}\left(\frac{dV}{dx}\right);$$

& l'on trouvera de la même maniere,

$$B=-\frac{1}{n+1}.\left(\frac{dV}{dy}\right);\ C=-\frac{1}{n+1}.\left(\frac{dV}{dz}\right).$$

En général, si l'on nomme j l'attraction du sphéroïde sur le point dont il s'agit, décomposée parallelement à une droite quelconque t, & à deux autres droites perpendiculaires entre-elles & a t, on aura

$$j = -\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right).$$

Supposons que le sphéroïde différe infiniment peu d'une sphére dont nous prendrons le rayon pour l'unité, & que le point attiré soit à sa surface. Si l'on imagine une sphére du rayon 1, passant par ce point, & dont le centre soit dans l'intérieur du sphéroïde, sur la perpendiculaire à la surface, le sphéroïde sera égal à la sphére, plus à l'excès du sphéroïde sur la sphére; or on peut concevoir cet excès comme étant formé d'un nombre infini de molécules répandues sur la surface de la sphére, ces molécules devant être supposées négatives par-tout où la sphére excède le sphéroïde. On aura donc la valeur de V, en déterminant cette valeur, 1° relativement à la sphére; 2° relativement à l'excès du sphéroïde sur la sphére. Par rapport à la sphére, V est égal à une constante que nous désignerons par k; & si l'on nomme dR, une des molécules de l'excès du sphéroïde sur la sphére, & r sa distance au point attiré; la valeur de V relative à cet excès, sera $\int r^{n+1} . dR$: on aura donc pour la valeur entiere de V relative au sphéroïde,

$$V = k + \int r^{n+1} . dR.$$

Lorsque le sphéroïde différe infiniment peu de la sphére, il existe entre V & l'attraction verticale du sphéroïde, un rapport remarquable qui donne directement la loi de la pesanteur à la surface de ceux qui sont en équilibre. Pour y parvenir, nommons a cette attraction verticale; elle sera visi-

blement égale à l'attraction de la sphére, plus à l'attraction verticale de l'excès du sphéroïde sur la sphére, décomposée suivant le rayon de la sphére. La premiere de ces attractions est une constante que nous désignerons par k'; pour déterminer la seconde, concevons le point attiré un peu élevé au-dessus de la surface de la sphére, à la distance t de son centre; nommons encore γ l'angle formé par la droite t, & par le rayon mené du centre à la molécule dR; on aura $r^2 = 1 - 2t.\cos.\gamma + t^2$. D'ailleurs $\int r^{n+1}.dR$ étant la valeur de V relative à l'excès du sphéroïde sur la sphére, l'attraction de cet excès décomposée suivant la droite t, & tendante à l'augmenter, sera par ce qui précède, $-\frac{1}{n+1}.\frac{d.\int r^{n+1}dR}{dt}$, où $-\int r^n.\left(\frac{dr}{dt}\right).dR$; on aura donc $\int r^n\left(\frac{dr}{dt}\right).dR$ pour l'attraction de cet excès prise en sens contraire, & par conséquent dirigée vers le centre de la sphére; d'où l'on tire

$$a = k' + \int r^n.\left(\frac{dr}{dt}\right)dR.$$

Maintenant, on a $r\left(\frac{dr}{dt}\right) = t - \cos.\gamma$, & si le point attiré est à la surface, on a $t = 1$; partant $r\left(\frac{ar}{dt}\right) = 1 - \cos.\gamma$; on a ensuite $r^2 = 1 - 2t.\cos.\gamma + t^2 = 2.(1 - \cos.\gamma)$; donc $\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{1}{2}r$, & par conséquent $a = k' + \frac{1}{2}\int r^{n+1}.dR$; en substituant au lieu de $\int r^{n+1}.dR$, sa valeur $V - k$, on aura,

$$a = k' - \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}.V;$$

ensorte que a & $\frac{1}{2}V$ ne different entre-eux que par une constante, quelle que soit la position du point attiré sur la surface du sphéroïde.

Si l'on nomme a' l'attraction entiere du sphéroïde; a'',

cette même attraction décomposée suivant la verticale, ou suivant la droite qui joint le point attiré & le centre de gravité du sphéroïde, ou suivant toute autre droite formant un angle infiniment petit avec la verticale; si l'on nomme encore α, l'attraction perpendiculaire à a'', ensorte que la force a' soit décomposée en deux autres forces a'' & α, α sera une quantité infiniment petite, & l'on aura $a' = \sqrt{a''^2 + \alpha^2} = a'' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{a''}$; ainsi a'' ne différe de a', que par une quantité infiniment petite du second ordre, & l'on peut supposer que les quantités a, a', a'', sont égales entre-elles; donc l'équation $a = k' - \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} V$, est généralement vraie, a représentant l'attraction du sphéroïde décomposée suivant une droite quelconque, pourvu qu'elle ne s'écarte qu'infiniment peu du centre de gravité du sphéroïde.

Dans le cas de $n = -1$, c'est-à-dire, lorsque l'attraction est en raison réciproque de la simple distance, on a $\int r^{n+1} \cdot dR = R$, R étant l'excès du sphéroïde sur la sphére; partant $a = k' + \frac{1}{2} R$; ainsi l'attraction verticale est alors constante à la surface de tout sphéroïde homogène.

Si l'on nomme t une tangente quelconque à la surface du sphéroïde, menée par le point attiré, l'attraction du sphéroïde sur ce point décomposée suivant la tangente t, sera par ce qui précède, $-\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right)$; en substituant au lieu de V, sa valeur $2a + k - 2k'$, on aura $-\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{da}{dt}\right)$ pour l'expression de l'attraction horisontale suivant la tangente t; d'où résulte ce théorême.

A la surface de tout sphéroïde homogène infiniment peu différent d'une sphére dont le rayon est pris pour l'unité, l'attraction horisontale

horisontale dirigée suivant un petit côté du sphéroïde, & multipliée par ce côté, est égale au produit de $-\frac{2}{n+1}$, *par la différence des attractions verticales aux deux extrêmités de ce côté.*

XV.

Considérons maintenant les sphéroïdes homogènes en équilibre : si l'on nomme P, Q, R, les forces étrangeres à l'attraction du sphéroïde, & paralleles aux axes des x, des y, & des z, qui sollicitent le point de la surface déterminé par les trois coordonnées x, y, z; les forces entieres dont ce point est sollicité parallelement aux mêmes axes, seront $A+P$, $B+Q$, $C+R$; la condition de l'équilibre donnera donc par l'Article VII,

$$0=(A+P).dx+(B+Q).dy+(C+R).dz.$$

En substituant au lieu de A, B, C, leurs valeurs en différences partielles de V, on aura

$$0=-\frac{1}{n+1}.dV+Pdx+Qdy+Rdz;$$

partant

$$V=C+(n+1).\int(Pdx+Qdy+Rdz),$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation détermine la figure de l'équilibre; mais il faut pour cela connoître V en fonction de x, y, z; cette recherche présente déja de grandes difficultés lorsque la figure du sphéroïde est donnée; mais dans la question présente, cette figure est inconnue, & il faut la tirer de l'équation précédente, ce qui est impossible en général, au moins dans l'état actuel de l'analyse; cependant le problême se simplifie dans le cas où n est un nombre entier positif & impair; cette condition donne la forme de

l'équation à la ſurface du ſphéroïde. Pour le faire voir, reprenons la valeur de V, qui, par l'Article précédent, eſt égale à $\int dM . [(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{n+1}{2}}$. Lorſque n eſt un nombre entier poſitif & impair, on peut la décompoſer dans un nombre fini de termes de cette forme $\int k . x^{r} . y^{r'} . z^{r''} . x'^{\mu} . y'^{\mu'} . z'^{\mu''} . dM$; or l'intégrale devant être priſe en ſuppoſant x, y, z, conſtans, ſi l'on ſuppoſe $\int x'^{\mu} . y'^{\mu'} . z'^{\mu''} . dM = H$, H étant une conſtante indépendante de x, y, z, le terme précédent deviendra $k . H . x^{r} . y^{r'} . z^{r''}$; la valeur de V pourra donc ſe décompoſer dans un nombre fini de termes de cette forme, & cette valeur ſubſtituée dans l'équation précédente de l'équilibre, donnera la forme de cette équation. Il ne s'agira plus enſuite que de déterminer les conſtantes indéterminées H, H', &c. pour cela on déterminera la valeur de V, en faiſant uſage de l'équation de l'équilibre dans laquelle on laiſſera ces conſtantes indéterminées; on aura de cette maniere une nouvelle expreſſion de V, de la même forme que la précédente & dans laquelle les coëfficiens des différens termes ſeront fonctions des conſtantes H, H', &c; la comparaiſon terme à terme de ces deux expreſſions de V, déterminera ces conſtantes.

Si l'on ſuppoſe, $n=1$, & par conſéquent l'attraction en raiſon de la diſtance, ce qui eſt le cas le plus ſimple de ceux que nous conſidérons ici, on aura

$$V = \int dM . [x^2+y^2+z^2-2xx'-2yy'-2zz'+x'^2+y'^2+z'^2]:$$

or on a $\int dM . (x^2+y^2+z^2) = M . (x^2+y^2+z^2)$; $\int dM . (x'^2+y'^2+z'^2)$ eſt égal à une conſtante que nous déſignerons par H; & ſi l'on fixe l'origine des x, des y & des z, au centre de gravité du ſphéroïde, on a par la propriété de ce centre

$\int x x'.dM = 0$, $\int y y'.dM = 0$, $\int z z'.dM = 0$; donc $V = H + M.(x^2 + y^2 + z^2)$; ainsi l'équation à la surface du sphéroïde est dans ce cas

$$M.(x^2 + y^2 + z^2) = C' + 2.\int(P.dx + Q.dy + R.dz).$$

C' étant une constante.

Les forces P, Q, R, étant supposées très-petites, & le sphéroïde très-peu différent d'une sphére de même solidité, & dont nous prendrons le rayon pour unité; si l'on nomme $1 + u$, celui du sphéroïde, on pourra négliger le quarré & les puissances supérieures de u; V deviendra ainsi une fonction linéaire de u, & de ses différences. Supposons que l'on connoisse une figure qui satisfasse à l'équation

$$V = C + (n+1).\int(Pdx + Qdy + Rdz),$$

& nommons, $1 + t$, le rayon de cette figure; si l'on fait $1 + u = 1 + t + u'$, il est clair par la nature des équations linéaires, que le rayon $1 + u'$, satisfera à l'équation $V = const.$ Or cette équation est celle des figures d'équilibre, lorsque le fluide n'est sollicité que par l'attraction de ses parties; donc les forces étrangeres P, Q, R, ne font qu'augmenter de la petite quantité t, les rayons des différentes figures d'équilibre, trouvées dans la supposition où ces forces sont nulles.

La détermination de toutes les figures possibles d'équilibre, se réduit donc alors 1°, à trouver une figure d'équilibre dans le cas où le sphéroïde est sollicité par les forces P, Q, R; 2°, à déterminer toutes les figures avec lesquelles l'équilibre peut subsister en vertu de la seule attraction des molécules du sphéroïde. Nous avons résolu dans l'Article VIII, le premier problême pour le cas de la nature où $n = -2$, & en sup-

posant que les forces P, Q, R, soient le résultat de la force centrifuge du mouvement de rotation du sphéroïde, & de l'attraction d'un nombre quelconque de corps très-éloignés. La figure elliptique satisfait alors à l'équilibre, & il seroit aisé de faire voir qu'elle y satisfait encore, n étant quelconque, pourvu que les forces P, Q, R, soient très-petites; mais le second problême présente de grandes difficultés dont la solution paroît exiger une analyse nouvelle.

XVI.

Pour déterminer la loi de la pesanteur, nommons p cette force; nous aurons

$$p = \sqrt{(A+P)^2 + (B+Q)^2 + (C+R)^2}.$$

Si l'on suppose les forces P, Q, R, très-petites relativement à A, B, C, & que l'on néglige leurs quarrés & leurs puissances supérieures, l'expression précédente de p deviendra

$$p = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{AP + BQ + CR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, exprime l'attraction entiere du sphéroïde sur le point de la surface dont nous cherchons la pesanteur: soit a, cette attraction; la supposition d'une figure très-peu différente d'une sphére dont le rayon est 1, donne à très-peu-près

$$A = -ax; \quad B = -ay; \quad C = -az.$$

on aura donc en négligeant les quantités de l'ordre P^2,

$$p = a - Px - Qy - Rz.$$

Si l'on substitue au lieu de a, sa valeur $k' - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}V$, trouvée dans l'Article XIII, on aura

$$p = k' - \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}V - Px - Qy - Rz;$$

enfin si l'on substitue dans cette équation, au lieu de V, sa valeur tirée de la condition de l'équilibre, & qui par l'Article précédent est

$$V = C + (n+1).\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

on aura

$$p = H + \frac{n+1}{2}.\int(P.dx + Q.dy + R.dz) - Px - Qy - Rz),$$

H étant une constante qu'une seule observation de la pesanteur à la surface du sphéroïde fera connoître. Nous voilà donc parvenus à déterminer directement la loi de la pesanteur, ce qui est d'autant plus remarquable, que la figure du sphéroïde dont cette loi paroît dépendre, nous est entiérement inconnue.

Supposons que les forces P, Q, R, soient produites par la force centrifuge du mouvement de rotation du sphéroïde autour de l'axe des x, & par l'attraction d'un nombre quelconque de corps S, S', S'', &c; soit g, la force centrifuge à la distance 1 de l'axe de rotation; h, i, l, les trois coordonnées du corps S; f, sa distance au point de la surface que nous considérons, & s, sa distance au centre de gravité du sphéroïde; soient h', i', l', f', s', les mêmes quantités relativement au corps S', & ainsi du reste.

Il est visible que la force centrifuge du point de la surface déterminé par les coordonnées x, y, z, est $g\,y$, parallelement à l'axe des y, & gz parallelement à l'axe des z; l'attraction du corps S, parallelement à l'axe des x, est $S.(h-x).f^{n-1}$; or f étant égal à $\sqrt{(h-x)^2+(i-y)^2+(l-z)^2}$ on a $h-x = -f\left(\frac{df}{dx}\right)$; cette attraction est donc égale à $-S.f^n\left(\frac{df}{dx}\right)$. Comme nous considérons ici l'équilibre du

ſphéroïde autour de ſon centre de gravité, il faut tranſporter en ſens contraire au point de la ſurface, l'attraction du corps S ſur ce centre, parallelement à l'axe des x; or cette attraction eſt égale à $S h . s^{n-1}$; on aura donc $-S . f^{n} \left(\frac{df}{dx}\right) - S h . s^{n-1}$, pour la force dont le point de la ſurface eſt animé parallelement à l'axe des x, en vertu de l'attraction du corps S; on aura pareillement $- S . f^{n} . \left(\frac{df}{dy}\right) - S i . s^{n-1}$, & $- S . f^{n} . \left(\frac{df}{dz}\right) - S l . s^{n-1}$, pour les forces dont ce point eſt ſollicité parallelement aux axes des y & des z, en vertu de la même attraction; & ſi l'on marque d'un trait, de deux traits, &c. les lettres S, h, i, l, f, s, on aura les forces relatives aux attractions des corps S', S'', &c; en raſſemblent donc toutes ces forces, on aura

$$P = - \int . S . \left[f^{n} . \left(\frac{df}{dx}\right) + h . s^{n-3} \right]$$

$$Q = g y - \int . S . \left[f^{n} . \left(\frac{df}{dy}\right) + i . s^{n-1} \right]$$

$$R = g z - \int . S . \left[f^{n} . \left(\frac{df}{dz}\right) + l . s^{n-1} \right];$$

la caractériſtique $\int$ exprimant la ſomme de toutes les quantités qu'elle renferme, relatives aux différens corps S', S', &c. enſorte qu'elle devient un ſigne intégral, ſi le nombre de ces corps eſt infini. Ces valeurs de P, Q, R, ſubſtituées dans l'expreſſion précédente de p, donnent

$$p = H + \frac{n-3}{4} g . (y^2 + z^2) - \tfrac{1}{2} . \int . S f^{n-1} . (s^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$
$$- \left(\frac{n-1}{2}\right) . \int . S . s^{n-1} . (hx + iy + lz).$$

Suppoſons que les corps S, S', S''' &c. ſoient en nombre infini, & diſpoſés ſymmétriquement autour du ſphéroïde, comme l'an-

neau de Saturne paroît l'être autour de cette planete; S, ſera un corpuſcule infiniment petit, & l'on aura $\int. S s^{n-1}. (hx + iy + lz) = 0$, parce qu'il exiſte alors deux corpuſcules égaux en maſſe, placés à égales diſtances du centre du ſphéroïde, & relativement auxquels h, i, l, ont des ſignes contraires; d'ailleurs le ſphéroïde étant à très-peu-près une ſphére dont le rayon eſt 1, on peut ſuppoſer dans les termes renfermés ſous le ſigne $\int$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; on aura donc

$$P = H + \frac{n-3}{4} g.(y^2 + z^2) + \tfrac{1}{2}. \int. S f^{n-1}. (1 - s^2)$$

partant ſi l'on connoiſſoit la figure & la denſité de l'anneau de Saturne, & ſa poſition par rapport à l'axe de rotation de cette planete ſuppoſée homogène, on auroit la loi de la peſanteur à la ſurface de Saturne, ſans connoître ſa figure.

Si $n = 1$, c'eſt-à-dire, ſi l'attraction ſuit la raiſon de la ſimple diſtance, la quantité $\frac{1}{2}. \int. S. f^{n-1} (1 - s^2)$ devient $\frac{1}{2}. \int. S. (1 - s^2)$, & par conſéquent elle eſt indépendante des variables x, y, z; elle peut donc être cenſée compriſe dans la conſtante H, ce qui donne

$$p = H + -\tfrac{1}{2} g.(y^2 + z^2);$$

ainſi la loi de la peſanteur eſt alors la même que ſi la planete n'avoit point d'anneau.

Suppoſons que le ſphéroïde ne ſoit ſollicité que par l'attraction de ſes propres molécules, & par la force centrifuge de ſon mouvement de rotation, on aura

$$p = H + \frac{n-3}{4}. g.(y^2 + z^2).$$

Soit α le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur, on aura à très-peu-près $g = \alpha H$; ſi l'on nomme

ensuite θ, le complément de la latitude, on aura à très-peu-près $y^2+z^2=\mathit{sin.}\,\theta^2$; partant

$$p=H.\left\{1+\frac{n-3}{4}.\,\alpha.\,\mathit{sin.}\,\theta^2\right\}$$

H étant la pesanteur au pôle.

Dans le cas de la nature, $n=-2$, d'où l'on tire $p=H.(1-\frac{5}{4}\alpha.\,\mathit{sin.}\,\theta^2)$, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans l'Article X. Si $n=3$, on a $p=H$, d'où il suit que l'attraction étant proportionelle au cube de la distance, la pesanteur à la surface des sphéroïdes homogènes en équilibre est constante, quel que soit leur mouvement de rotation.

XVII.

Nous avons observé dans l'Article II, une propriété de la loi de la pesanteur qui contribue à la régularité des mouvemens célestes & à la simplicité de leur théorie, en ce qu'elle permet de considérer l'attraction des sphéres homogènes, comme si elles étoient réunies à leur centre, de maniere que l'on peut dans la détermination de leurs mouvemens, faire abstraction de leurs dimensions respectives. Cette propriété est-elle particuliere à la loi de la pesanteur qui a lieu dans la nature, ou s'étend-elle à d'autres loix de pesanteur? C'est ce que nous allons déterminer.

Pour cela, nous observerons que si la loi de la pesanteur est telle qu'une sphére homogène attire un point placé au-dehors, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre, le même résultat doit avoir lieu pour une couche sphérique d'une épaisseur constante; car si l'on enleve à une sphére, une couche sphérique d'une épaisseur constante, on formera une nouvelle sphére d'un plus

plus petit rayon, mais qui aura, ainsi que la premiere, la propriété d'attirer comme si toute sa masse étoit réunie à son centre; or il est bien évident que ces deux sphères ne peuvent avoir cette propriété commune, à moins qu'elle ne le soit encore à la couche sphérique qui forme leur différence. La question se réduit donc à déterminer les loix d'attraction suivant lesquelles une couche sphérique d'une épaisseur infiniment petite & constante, attire un point extérieur, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre.

Soit a la distance du point attiré au centre de la couche sphérique; u le rayon de cette couche & du son épaisseur; p l'angle que fait le rayon u avec la droite a; q l'angle que forme le plan qui passe par les deux droites a & u, avec un plan fixe passant par la droite a; l'élément de la couche sphérique sera par l'article III, $u^2\, du.\, dp.\, dq.\, \sin p$. Si l'on nomme ensuite f la distance de cet élément au point attiré, & que l'on représente par $\varphi(f)$, la loi de l'attraction; $\left(\frac{df}{da}\right).\, \varphi(f).\, u^2\, du.\, dp.\, dq.\, \sin. p$, sera l'attraction de l'élément sur le point attiré, décomposée suivant la droite a, & dirigée vers le centre de la couche sphérique; partant si l'on suppose $\int df.\, \varphi(f) = \psi(f)$, on aura l'attraction entiere de la couche sphérique, au moyen de l'intégrale $u^2\, du. \int dp. dq. \sin. p. \psi(f)$, différentiée par rapport à a.

Il est facile de s'assurer que f^2 est égal à $a^2 - 2au. \cos. p + u^2$, ce qui donne $\frac{fdf}{au} = dp. \sin. p$, & par conséquent

$$u^2\, du. \int dp.\, dq.\, \sin. p.\, \psi(f) = \frac{u\, du}{a}. \int dq.\, fdf.\, \psi.(f).$$

L'intégrale relative à q, doit être prise depuis $q=0$, jusqu'à $q = 360^\circ$, & l'intégrale relative à f, doit être prise depuis

$f = a - u$ jusqu'à $f = a + u$. En supposant donc $\int f\, df\, \psi(f) = \Pi.(f)$, on aura

$$u^2 du.\, \int dp.\, dq.\, \sin. p.\, \psi(f) = \frac{2\pi . u du}{a} . [\Pi.(a+u) - \Pi.(a-u)].$$

Le coëfficient de da dans la différentielle du second membre de cette équation, donnera l'attraction de la couche entiere dirigée vers son centre; partant si l'on a déterminé la loi de cette attraction par l'expérience, il sera facile d'en conclure, au moyen de la formulle précédente, la nature de la fonction $\Pi\,(a)$, & par conséquent celles des fonctions $\psi\,(a)$ & $\varphi\,(a)$ qui en dérivent; on pourroit donc ainsi déterminer la loi suivant laquelle l'attraction magnétique varie avec la distance.

Si l'on développe la fonction $\Pi.(a \pm u)$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de u, on aura

$$\Pi.(a \pm u) = \Pi.(a) \pm u . \frac{d.\Pi.(a)}{da} + \frac{u^2.}{1.2} \frac{d^2.\Pi.(a)}{da^2} \pm \frac{u^3}{1.2.3} . \frac{d^3.\Pi.(a)}{da^3} + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\frac{2\pi . u du}{a} . [\Pi.(a+u) - \Pi.(a-u)] = \frac{4\pi . u^2 . du}{a} . \left(\frac{d.\Pi(a)}{da} + \frac{u^2}{1.2.3} . \frac{d^3.\Pi.(a)}{da^3} + \&c\right).$$

La masse de la couche sphérique est $4\pi . u^2\, du$; en la désignant par m, & en différentiant le second membre de cette équation par rapport à a, on aura pour l'attraction de la couche sphérique, dirigée vers son centre,

$$m \left\{ \frac{d\left(\frac{1}{a}.d.\,\Pi(a)\right)}{da^2} + \frac{u^2}{1.2.3} . \frac{d\left(\frac{1}{a}.d^3.\Pi.(a)\right)}{da^4} + \frac{u^4}{1.2.3.4.5} . \frac{d\left(\frac{1}{\ }.d^5.\Pi.(a)\right)}{da^6} + \&c. \right\}$$

Présentement, on a $\frac{d.\Pi.(a)}{da} = a\,\psi\,(a)$, $\frac{d.\psi(a)}{da} = \varphi\,(a)$;

ce qui donne $\frac{d.(\frac{1}{a} d.\Pi.(a))}{da^2} = \varphi\,(a)$; le premier terme de la série précédente devient ainsi, $m.\varphi\,(a)$; d'où il suit que si le point attiré est fort éloigné du centre de la couche sphé-

rique, enſorte que l'on puiſſe regarder le rayon de cette couche, comme une quantité très-petite du premier ordre par rapport à ſa diſtance, ce point ſera attiré aux quantités près du ſeconde ordre, comme ſi la maſſe de la couche ſphérique étoit réunie à ſon centre.

Pour que ce réſultat ſoit rigoureux, il faut que la loi de l'attraction faſſe diſparoître les coëfficiens de u^2, u^4, &c; ce qui donne les équations ſuivantes,

$$0 = d.[\frac{1}{a} d^3 . \Pi.(a)]$$

$$0 = d.[\frac{1}{a} . d^5 . \Pi.(a)]$$

&c.

La premiere de ces équations donne

$$\Pi.(a) = H + H'.a + H''.a^2 + H'''.a^4,$$

H, H', H'', H''', étant des conſtantes arbitraires; & il eſt viſible que cette valeur de $\Pi.(a)$ ſatisfait a toutes les équations ſuivantes; on aura donc

$$\varphi(a) = \frac{d\left(\frac{1}{a} . d.\Pi.(a)\right)}{da^2} = -\frac{H'}{a^2} + 8.H'''a.$$

Ainſi toutes les loix d'attraction dans leſquelles une ſphère attire un point placé hors d'elle à la diſtance f, comme ſi ſa maſſe étoit réunie à ſon centre, ſont compriſes dans la formule générale

$$\frac{C}{f^2} + C'.f,$$

C, C', étant arbitraires. Si l'on ſuppoſe C' égal à zéro, on aura la loi de l'attraction des corps céleſtes; mais il eſt remarquable que dans le nombre infini des loix qui rendent l'attraction très-petite à de grandes diſtances, ce qui paroît avoir lieu pour toutes les forces attractives de la

nature, celle de l'attraction réciproque au quarré de la distance, soit la seule dans laquelle les sphères attirent, comme si leurs masses étoient réunies à leurs centres.

Addition à l'Article XV de la premiere Partie.

Dom Nouet, Religieux de l'Ordre de Cîteaux, & très-habile Calculateur, ayant formé des tables de la Planete Herschel, sur les élémens de cet article, les a comparées avec un grand nombre d'observations. Voici les résultats de ses calculs, qu'il a bien voulu me communiquer. Il est facile de se convaincre que les petites erreurs des tables doivent être rejettées en grande partie sur les observations; car la loi des erreurs de ces tables comparées avec des observations rigoureuses seroit régulière, vu la petitesse de l'arc que la Planete a décrit dans son orbite, depuis l'époque de sa découverte; or la loi des erreurs suivantes est très-irrégulière; par exemple, la plus grande erreur en longitude répond au 4 Mars 1782; elle est de $+21''$, tandis que les erreurs de l'observation du 18 Février & du 11 Mars, sont chacune de $-7''$: il est cependant visible que les élémens précédens doivent donner à très-peu près le mouvement de la Planete dans l'intervalle du 18 Février au 11 Mars, de sorte que si l'erreur est de $-7''$, au 18 Février, elle doit être la même dans tout cet intervalle; l'erreur correspondante au 4 Mars devroit donc être de $-7''$, au lieu d'être $+21''$; d'où il suit qu'une grande partie de cette erreur doit être attribuée à l'observation même.

On peut faire les mêmes remarques ſur les obſervations de la latitude. Le 11 Mai 1781, l'erreur étoit nulle en latitude; en ſuppoſant cette obſervation rigoureuſe, les erreurs en latitude depuis cette époque, devroient avoir conſtamment le même ſigne; ce qui n'eſt pas, puiſque l'erreur étoit + 24″, le 18 Novembre 1782, & — 10″, le 30 Décembre 1783. On doit donc attribuer en grande partie aux obſervations, l'erreur des tables, & il ſeroit inutile de chercher à les repréſenter avec plus de préciſion.

ANNÉES.	Tems moyen à Paris.	Longitude obſervée.	Latitude boréale obſervée.	Erreurs des élémens en longitude.	Erreur en latitude.	
	H. M. S.	Sig. D. M. S.	M. S.	S.	S.	
1756. 25 Sept. Obſervation de Mayer.	10 21 18	11 16 37 47	48. 31 Latitude auſtrale.	+ 11	— 9	
1781.						
Avril. . . . 25	9. 57. 0	2. 25. 39. 17	11. 40	— 2	+ 3	
26	10. 0. 0	2. 25. 41. 55	11. 40	+ 1	+ 4	
Mai. . . . 11	8. 47. 0	2. 26. 25. 13	11. 46	+ 4	—0,7	
Juillet. . . 20	15. 14. 28	3. 0. 27. 24	12. 26	+ 4	— 6	*
21	15. 8. 31	3. 0. 30. 50	12. 26	— 8	— 5	*
22	15. 13. 40	3. 0. 34. 17	12. 25	— 19	— 3	*
Août. . . . 18	16. 19. 0	3. 1. 51. 13	12. 53	0	— 6	
21	15. 58. 54	3. 1. 58. 33	12. 51	— 17	+ 1	*
22	16. 2. 51	3. 2. 0. 44	12. 46	— 12	+ 6	*
23	16. 11. 49	3. 2. 2. 55	12. 50	— 9	+ 3	*
Septembre. . 5	17. 5. 30	3. 2. 27. 58	13. 13	— 13	— 4	
23	16. 45. 54	3. 2. 49. 36	13. 22	+ 9	+ 9	*
24	16. 41. 0	3. 2. 50. 16	13. 24	+ 12	+ 9	*
25	17. 10. 24	3. 2. 50. 56	13. 27	+ 13	+ 7	*
Octobre. . 20	10. 7. 21	3. 2. 50. 44	13. 56	+ 9	+ 10	*
21	9. 40. 47	3. 2. 49. 58	13. 57	+ 18	+ 9	*
22	9. 36. 53	3. 2. 49. 11	14. 2	+ 19	+ 6	*
Décembre. 21 opposition.	18. 5. 43	3. 0. 52. 17	15. 10	+ 3	— 2	

ANNÉES.	Tems moyen à Paris.	Longitude observée.	Latitude boréale observée.	Erreur des élémens en longitude.	Erreurs en latitude.	
	H. M. S.	Sig. D. M. S.	M. S.	S.	S.	
1782.						
Février. . . 1	7. 20. 46	2. 29. 18. 12	15. 20	+ 2	— 2	
16	6. 29. 0	2. 28. 58. 39	15. 14	— 4	+ 2	
18	6. 27. 0	2. 28. 56. 53	15. 19	— 7	— 6	
Mars. . . . 4	6. 52. 0	2. 28. 49. 33	15. 19	+ 21	— 5	
11	9. 0. 0	2. 28. 50. 25	15. 13	— 7	+ 7	
Avril. . . . 14	9. 3. 30	2. 29. 29. 21	15. 5	— 1	— 2	
20	8. 43. 0	2. 29. 41. 53	15. 7	+ 2	— 5	
Mai. . . . 13	9. 1. 0	3. 0. 43. 10	15. 3	+ 6	— 2	
Août. . . . 23	16. 30. 0	3. 6. 19. 41	15. 58	+ 2	+ 8	
Septembre. 30	15. 31. 0	3. 7. 19. 38	16. 41	+ 8	+ 17	
Octobre. . 5	13. 38. 0	3. 7. 21. 53	16. 44	+ 15	+ 21	
Novembre. 18	10. 37. 0	3. 6. 48. 42	17. 42	— 8	+ 24	
Décembre. 26 opposition.	9. 18. 44	3. 5. 20. 30	18. 20	+ 3	+ 20	
1783.						
Janvier. . . 26	6. 20. 0	3. 4. 6. 14	18. 44	— 3	+ 5	
Février. . . 3	9. 21. 0	3. 3. 50. 25	18. 44	+ 11	+ 4	**
17	7. 3. 0	3. 3. 30. 24	18. 37	— 2	+ 8	
18	8. 20. 34	3. 3. 28. 58	18. 51	+ 6	— 6	**
24	6. 48. 0	3. 3. 23. 38	18. 27	— 3	+ 16	
Mars. . . . 20	8. 43. 0	3. 3. 19. 50	18. 27	+ 8	— 6	
Avril. . . . 19	10. 2. 0	3. 3. 57. 51	18. 19	+ 12	+ 1	
26	9. 3. 0	3. 4. 12 43	18. 17	+ 10	+ 1	
Mai. . . . 9	9. 2. 30	3. 4. 47. 38	18. 9	+ 11	+ 6	
Août. . . . 16	16. 31. 20	3. 10. 18. 39	18. 43	— 14	+ 21	
Septembre. 27	16. 16. 0	3. 11. 43. 31	19. 57	— 12	+ 7	
Décembre. 30	12. 5. 51	3. 9. 52. 17	22. 20	+ 11	— 10	**

Nota. Les obſervations ſans étoile ſont de M. Mechain; celles qui ſont marquées d'une étoile ont été faites à l'Obſervatoire de Milan, & celles qui ſont marquées de deux étoiles ont été faites à l'Obſervatoire Royal de Paris. L'obliquité de l'écliptique dont on a fait uſage dans ces calculs eſt de 23° 28′ 10″ pour le premier Janvier 1783.

ERRATA.

Page 26, *ligne* 13, *au lieu de* e; *lisez* : c.
Page 43, *ligne* 11, *au lieu de* & en en-retranchant; *lisez* : & en retranchant de son logarithme.
Page 112, *ligne* 3, *en comptant d'en bas*, *au lieu de* (*Z*); *lisez* (*V*).

Extrait des Registres de l'Académie des Sciences.

Du 31 Janvier 1784.

Les Commissaires nommés par l'Académie, leur ayant rendu compte d'un Ouvrage intitulé : *Théorie du Mouvement & de la Figure elliptique des Planètes*, par M. de la Place; l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de son Approbation, & d'être imprimé sous son Privilége. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 31 Janvier 1784.

Le Marquis DE CONDORCET,
Secrétaire Perpétuel.

THÉORIE
DES ATTRACTIONS
DES SPHÉROÏDES
ET DE LA FIGURE
DES PLANÈTES.

Par M. DE LA PLACE, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXV.

THÉORIE
DES ATTRACTIONS DES SPHÉROÏDES
ET DE LA FIGURE DES PLANÈTES.

Par M. DE LA PLACE.

LA matière qui fait l'objet de ces Recherches, a depuis Newton, occupé un grand nombre de Géomètres, & les résultats auxquels ils sont parvenus, sont également intéressans, par l'analyse délicate qu'ils exigent & par leur importance dans le système du Monde. Mais en considérant attentivement les méthodes dont ils ont fait usage, on voit qu'elles laissent plusieurs choses à desirer encore; elles sont pour la plupart, restreintes à des sphéroïdes particuliers, & celles qui sont plus générales, manquent de cette simplicité si desirable dans la manière de traiter les objets compliqués: il m'a paru que sous ce point de vue, on pouvoit perfectionner cette branche importante de la Physique céleste, & j'ose me flatter de présenter aux Géomètres, dans cet Ouvrage, une théorie des attractions des Sphéroïdes, & de la figure des Planètes, plus générale & plus simple que celles qui sont déjà connues.

Il est partagé en cinq sections; dans la première, je donne une théorie complète des attractions des sphéroïdes terminés par des surfaces du second ordre; cette théorie a déjà paru dans l'Ouvrage que j'ai publié sur le mouvement & sur la figure elliptique des Planètes; mais elle est ici présentée d'une manière plus directe & plus simple.

Je considère dans la seconde section, les attractions des sphéroïdes quelconques, & je les fais dépendre d'une équation aux différences partielles du second ordre: cette équation est la base de mes recherches sur la figure des Planètes; elle me conduit d'abord à quelques résultats généraux sur l'ex-

preſſion en ſérie, des attractions des ſphéroïdes; en ſuppoſant enſuite les ſphéroïdes fort approchans de la ſphère, & en combinant ces réſultats avec une équation différentielle qui a lieu à leur ſurface, & dont j'ai tiré autrefois les loix de la peſanteur ſur les ſphéroïdes homogènes en équilibre, je parviens à une expreſſion en ſéries, générale & ſimple, des attractions des ſphéroïdes quelconques très-peu différens de la ſphère, expreſſion qui ſe termine toutes les fois que l'équation de leur ſurface eſt finie & rationnelle. Il eſt aſſez remarquable que cette expreſſion qui par les méthodes ordinaires, exigeroit des intégrations très-compliquées, ſoit donnée ſans aucune intégration, & par la ſeule différentiation des fonctions. Ces recherches ſont l'objet de la troiſième ſection; toute la théorie de la figure des Planètes & de la loi de la peſanteur à leur ſurface, en eſt un ſimple corollaire; il en réſulte que ſi la Planète eſt homogène, elle ne peut être en équilibre que d'une ſeule manière, quelles que ſoient les forces qui l'animent, & qu'ainſi la Terre eſt néceſſairement, dans cette hypothèſe, un ellipſoïde de révolution; mais ce réſultat fondé ſur le développement en ſérie, des attractions des ſphéroïdes, pouvant laiſſer quelques doutes; je le démontre *a priori*, indépendamment des ſuites, & je fais voir en même temps, que dans un grand nombre de cas, un fluide qui recouvre une ſphère, eſt ſuſceptible de pluſieurs états d'équilibre. La méthode des ſéries conduit aux mêmes réſultats; d'où il ſuit que cette méthode a toute la généralité poſſible, & qu'il n'eſt point à craindre qu'aucune figure d'équilibre lui échappe.

Si la Planète eſt hétérogène, ſa figure dépend de celle de ſes couches & de la loi de leurs denſités; la peſanteur à ſa ſurface, dépend des mêmes données; mais en combinant les équations qui déterminent la peſanteur à la ſurface du ſphéroïde, & ſa figure, je parviens à une relation entre ces deux quantités, indépendante de la conſtitution intérieure du ſphéroïde, & qui, lorſqu'on aura un nombre ſuffiſant d'obſervations ſur la grandeur des degrés terreſtres & ſur la longueur du pendule, pourra fournir une nouvelle

confirmation du principe de la pesanteur universelle. Je fais voir que dans l'état actuel de nos connoissances, ce principe satisfait aussi-bien qu'on peut le desirer, à tous les phénomènes qui dépendent de la figure de la Terre.

Pour compléter cette théorie de la figure des Planètes, il reste à déterminer les conditions qui donnent un équilibre ferme; dans cette vue, je considère les oscillations d'un fluide de peu de profondeur, qui recouvre une sphère. M. d'Alembert en a fait l'objet de ses savantes Recherches sur la cause des vents; mais cet illustre Auteur n'a résolu que le cas où le fluide est tiré de l'état de repos, par l'attraction d'un astre immobile. Environ trente ans après, aidé des progrès que l'analyse & la théorie des fluides avoient faits dans cet intervalle, je repris le même problème, & j'en donnai la solution, en supposant à l'astre attirant, un mouvement quelconque dans l'espace; mais l'imperfection de la théorie des attractions des sphéroïdes, ne me permit pas alors de m'élever à la considération générale des oscillations du fluide, quels que fussent son état & son ébranlement primitifs. Les nouvelles recherches dont je viens de parler, m'ont conduit à une solution complète de ce problème; les conditions de la stabilité de l'équilibre du fluide, étant données par celles qui rendent ses oscillations périodiques, je trouve que cette stabilité exige que la densité du fluide soit moindre que celle de la sphère qu'il recouvre; condition différente de celle que les Géomètres ont donnée pour cet objet, mais qui s'accorde avec ce que j'ai trouvé dans nos Mémoires pour l'année 1776, en ayant égard au mouvement de rotation du sphéroïde. L'équilibre des eaux de la mer, que les vents & un grand nombre d'autres causes agitent d'une manière fort irrégulière, ne seroit donc pas ferme, si leur densité étoit égale ou plus grande que celle du globe terrestre; ainsi quand même les observations faites sur l'attraction des montagnes, ne nous auroient pas appris que cette densité est plus petite, la stabilité de l'équilibre de la mer, eût suffi pour nous en convaincre.

Cet Ouvrage eſt entièrement fondé ſur le calcul aux différences partielles; j'ai montré dans nos Mémoires pour l'année 1777, ſon utilité dans le développement des fonctions en ſéries; les nouveaux uſages que je préſente ici de ce même calcul, ſerviront à faire voir de plus en plus ſon importance dans l'analyſe.

PREMIÈRE SECTION.

Des attractions des Sphéroïdes terminés par des ſurfaces du ſecond ordre.

I.

L'ÉQUATION générale des ſurfaces du ſecond ordre, rapportées à trois coordonnées orthogonales, eſt

$$0 = A + Bx + Cy + E.z + Fx^2 + Hxy + Ly^2 + M.xz + N.yz + O.z^2.$$

Le changement de l'origine des coordonnées introduit trois arbitraires, puiſque la poſition de cette nouvelle origine par rapport à la première, dépend de trois coordonnées arbitraires; le changement de la poſition des coordonnées autour de leur origine, introduit trois angles arbitraires; en faiſant donc changer à la fois, dans l'équation précédente, les coordonnées, d'origine & de poſition, on aura une nouvelle équation du ſecond degré, dont les coéfficiens ſeront fonctions des précédens & de ſix arbitraires; ſi l'on égale enſuite à zéro, les coéfficiens des premières puiſſances des coordonnées & de leurs produits deux à deux, on déterminera ces arbitraires, & l'équation générale du ſecond ordre prendra cette forme très-ſimple,

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2;$$

c'eſt ſous cette forme que nous allons la conſidérer.

Nous n'aurons égard dans ces recherches, qu'aux ſolides terminés par des ſurfaces finies, ce qui ſuppoſe m & n poſitifs, & dans ce cas le ſolide eſt un ellipſoïde dont les trois demi-axes ſont égaux aux variables x, y, z, lorſqu'on

ſuppoſe deux d'entr'elles, égales à zéro ; on aura ainſi k, $\frac{k}{\sqrt{(m)}}$ & $\frac{k}{\sqrt{(n)}}$ pour ces trois demi-axes reſpectivement parallèles aux x, aux y & aux z; & la ſolidité de l'ellipſoïde ſera $\frac{4\pi.k^3}{3.\sqrt{(mn)}}$, en déſignant par π, comme nous le ferons toujours dans la ſuite, le rapport de la demi-circonférence au rayon.

I I.

POUR déterminer l'attraction d'un pareil ſphéroïde, ſur un point quelconque ; ſoit A l'attraction du ſphéroïde ſur ce point, décompoſée parallèlement à l'axe des x; B cette attraction décompoſée parallèlement à l'axe des y; & C cette même attraction décompoſée parallèlement à l'axe des z; ſoient encore a, b, c, les trois coordonnées du point attiré, parallèlement à ces axes ; x, y, z, celles d'une molécule ∂M du ſphéroïde ; r un rayon mené de cette molécule au point attiré ; p le complément de l'angle que forme ce rayon, avec le plan des y & des z; & q l'angle que forme la projection de ce rayon ſur ce plan, avec l'axe des y; on aura

$$x = a - r.\text{coſ}.p;$$
$$y = b - r.\text{ſin}.p.\text{coſ}.q;$$
$$z = c - r.\text{ſin}.p.\text{ſin}.q.$$

La molécule ∂M eſt égale au parallélipipède rectangle dont les trois dimenſions ſont ∂r, $r\partial p$ & $r d q.\text{ſin}.p$, & dont la maſſe eſt par conſéquent $r^2.\partial r.\partial p.\partial q.\text{ſin}.p$; pour avoir ſon attraction parallèlement aux axes des x, des y & des z, il faut la multiplier reſpectivement par $\text{coſ}.p$, $\text{ſin}.p.\text{coſ}.q$, $\text{ſin}.p.\text{ſin}.q$, & diviſer ces produits par r^2; on aura ainſi, en prenant la ſomme de toutes les attractions relatives à chaque molécule du ſphéroïde,

$$A = \iiint \partial r.\partial p.\partial q.\text{ſin}.p.\text{coſ}.p;$$
$$B = \iiint \partial r.\partial p.\partial q.\text{ſin}.p^2.\text{coſ}.q;$$
$$C = \iiint \partial r.\partial p.\partial q.\text{ſin}.p^2.\text{ſin}.q;$$

Les intégrations ſont faciles, relativement à r; mais elles ſont différentes, ſuivant que le point attiré eſt dans l'intérieur ou au dehors du ſphéroïde: dans le premier cas, la droite qui paſſant par le point attiré, traverſe le ſphéroïde, eſt diviſée en deux parties par ce point; & ſi l'on nomme r & r^{I} ces deux parties, on aura

$$A = \int\int (r^{\text{I}} + r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p . \text{coſ} . p;$$
$$B = \int\int (r^{\text{I}} + r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p^2 . \text{coſ} . q;$$
$$C = \int\int (r^{\text{I}} + r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p^2 . \text{ſin} . q;$$

les intégrales relatives à p & à q, devant être priſes depuis p & q, égaux à zéro, juſquà p & q, égaux à 180 degrés. Dans le ſecond cas, ſi l'on nomme toujours r, le rayon r à ſon entrée dans le ſphéroïde, & r' ce même rayon à ſa ſortie, on aura

$$A = \int\int (r^{\text{I}} - r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p . \text{coſ} . p;$$
$$B = \int\int (r^{\text{I}} - r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p^2 . \text{coſ} . q;$$
$$C = \int\int (r^{\text{I}} - r) . \partial p . \partial q . \text{ſin} . p^2 . \text{ſin} . q;$$

les limites des intégrales relatives à p & à q, devant être fixées aux points où l'on a $r^{\text{I}} - r = 0$, c'eſt-à-dire, où le rayon r eſt tangent à la ſurface du ſphéroïde. Il ne s'agit plus maintenant que de ſubſtituer dans ces expreſſions, au lieu de r & de r^{I}, leurs valeurs en p & en q, données par l'équation du ſphéroïde.

Pour cela, nous obſerverons que ſi l'on met dans l'équation générale $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$, au lieu de x, y, z, leurs valeurs précédentes, on aura

$$\begin{aligned} r^2 . (\text{coſ}.p^2 + m . \text{ſin}.p^2 . \text{coſ}.q^2 + n . \text{ſin}.p^2 . \text{ſin}.q^2) \\ - 2r.(a.\text{coſ}.p + mb.\text{ſin}.p.\text{coſ}.q + nc.\text{ſin}.p.\text{ſin}.q) \\ = k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2, \end{aligned}$$

en ſorte que ſi l'on ſuppoſe

$$L = \text{coſ}.\ p^2 + m . \text{ſin}.\ p^2 . \text{coſ}.\ q^2 + n . \text{ſin}.\ p^2 . \text{ſin}.\ q^2,$$
$$I = a.\text{coſ}.p + m\,b . \text{ſin}.\ p . \text{coſ}.\ q + n\,c . \text{ſin}.\ p . \text{ſin}.\ q,$$
$$R = I^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) . L,$$

on aura

$$r = \frac{I \pm \sqrt{(R)}}{L};$$

d'où l'on tire $r^{\prime}$ en prenant le radical en plus, & r en le prenant en moins ; on aura donc $r^{\prime} + r = \frac{2I}{L}$, $r^{\prime} - r = \frac{2.\sqrt{(R)}}{L}$; ce qui donne relativement aux points intérieurs du ſphéroïde,

$$A = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . I . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p}{L};$$

$$B = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . I . \text{ſin.} p^2 . \text{coſ.} q}{L};$$

$$C = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . I . \text{ſin.} p^2 . \text{ſin.} q}{L};$$

& relativement aux points extérieurs,

$$A = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p . \sqrt{(R)}}{L};$$

$$B = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p^2 . \text{coſ.} q . \sqrt{(R)}}{L};$$

$$C = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p^2 . \text{ſin.} q . \sqrt{(R)}}{L};$$

ces trois dernières intégrales étant priſes entre les limites qui correſpondent à $\sqrt{(R)} = 0$.

Si l'on nomme V, la ſomme de toutes les molécules du ſphéroïde, diviſées par leurs diſtances à un point extérieur; on aura

$$V = \int \frac{\partial M}{r} = \int\int\int r \partial r . \partial p \partial q . \text{ſin.} p = \tfrac{1}{2}\int\int (r^{\prime 2} - r^2) . \partial p \partial q . \text{ſin.} p,$$

& ſi l'on ſubſtitue au lieu de r & de $r^{\prime}$ leurs valeurs, on aura

$$V = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p . I . \sqrt{(R)}}{L^2}.$$

I I I.

Les expreſſions relatives aux points intérieurs, étant les plus ſimples, nous allons commencer par les conſidérer. Nous obſerverons d'abord, que le demi-axe k du ſphéroïde, n'entre point dans les valeurs de I & de L; les valeurs de A, B, C, en ſont par conſéquent indépendantes; d'où il ſuit que l'on peut augmenter à volonté, les couches du ſphéroïde, ſupérieures au point attiré, ſans changer l'attraction du ſphéroïde ſur ce point, pourvu que les valeurs de m & de n ſoient conſtantes. De-là réſulte ce théorème,

Un point placé dans l'intérieur d'une couche elliptique, dont les ſurfaces intérieures & extérieures ſont ſemblables & ſemblablement ſituées, eſt également attiré de toutes parts.

Reprenons maintenant la valeur de A; ſi l'on y ſubſtitue au lieu de I & de L, leurs valeurs, elle devient

$$A = 2\int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p . (a . \text{coſ.} p + mb . \text{ſin.} p . \text{coſ.} q + nc . \text{ſin.} p . \text{ſin.} q)}{\text{coſ.} p^2 + m . \text{ſin.} p^2 . \text{coſ.} q^2 + n . \text{ſin.} p^2 . \text{ſin.} q^2}.$$

Les intégrales relatives à p & à q étant priſes depuis p & q égaux à zéro, juſqu'à p & q égaux à 180 degrés; il eſt clair que l'on a généralement $\int P \partial p . \text{coſ.} p = 0$, P étant une fonction rationnelle de ſin. p & de coſ. p^2; par ce qu'à égale diſtance de 90 degrés, les valeurs de P . coſ. p ſont égales & de ſignes contraires; on aura donc

$$A = 2a . \int\int \frac{\partial p . \partial q . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p^2}{\text{coſ.} p^2 + m . \text{ſin.} p^2 . \text{coſ.} q^2 + n . \text{ſin.} p^2 . \text{ſin.} q^2};$$

& ſi l'on intègre par rapport à q, on trouvera par les méthodes connues,

$$A = \frac{2a\pi}{\sqrt{(mn)}} . \int \frac{\partial p . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p^2}{\sqrt{[(1 + \frac{1-m}{m} . \text{coſ.} p^2) . (1 + \frac{1-n}{n} . \text{coſ.} p^2)]}},$$

l'intégrale devant être priſe depuis coſ. $p = 1$, juſqu'à coſ. $p = -1$. Si l'on fait coſ. $p = x$, & que l'on obſerve

obſerve que la maſſe M du ſphéroïde étant $\frac{4\pi . k^3}{3\sqrt{(mn)}}$, on a $\frac{4\pi}{\sqrt{(mn)}} = \frac{3M}{k^3}$; on aura

$$A = \frac{3aM}{k^3} . \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{[(1 + \frac{1-m}{m} . x^2) . (1 + \frac{1-n}{n} . x^2)]}};$$

l'intégrale étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$.

En intégrant de la même manière, les expreſſions de B & de C, on les réduiroit à de ſimples intégrales; mais il eſt plus facile de conclure ces intégrales, de l'expreſſion de A; pour cela, on obſervera qu'elle peut être conſidérée comme une fonction des quatre quantités a, k^2, $\frac{k^2}{m}$, $\frac{k^2}{n}$; & qu'en nommant k'^2, le carré du demi-axe parallèle à b, & par conſéquent $k'^2 . m$ & $\frac{k'^2 . m}{n}$, les carrés des deux autres demi-axes; B eſt pareille fonction de b, k'^2, $k'^2 . m$, $\frac{k'^2 . m}{n}$; il faut donc pour avoir B, changer dans l'expreſſion de A, a en b, k en k' ou $\frac{k}{\sqrt{(m)}}$, m dans $\frac{1}{m}$, & n dans $\frac{n}{m}$; ce qui donne

$$B = \frac{3bM}{k^3} . \int \frac{m^{\frac{3}{2}} . x^2 \partial x}{\sqrt{\{[1 + (m-1)x^2] . (1 + \frac{m-n}{n} . x^2)\}}}.$$

Soit $x = \frac{t}{\sqrt{[m + (1-m) . t^2]}}$, on aura

$$B = \frac{3bM}{k^3} . \int \frac{t^2 . \partial t}{(1 + \frac{1-m}{m} . t^2)^{\frac{1}{2}} . (1 + \frac{1-n}{n} . t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

l'intégrale relative à t devant être priſe, comme l'intégrale relative à x, depuis $t = 0$ juſqu'à $t = 1$, parce que $x = 0$ donne $t = 0$, & que $x = 1$ donne $t = 1$.

il suit de-là, que si l'on suppose

$$\frac{1 - m}{m} = \mu^2; \quad \frac{1 - n}{n} = \mu'^2,$$

$$F = \int \frac{x^2 \, \partial x}{\sqrt{[(1 + \mu^2 . x^2) . (1 + \mu'^2 . x^2]}},$$

on aura

$$B = \frac{3 b M}{k^3} . \left(\frac{\partial F \mu}{\partial \mu} \right).$$

Si l'on change dans cette expression, b en c, & μ en μ', on aura la valeur de C: les attractions A, B, C du sphéroïde, parallèlement à ses trois axes, seront ainsi données par les formules suivantes,

$$A = \frac{3 a . M}{k^3} . F; \; B = \frac{3 b . M}{k^3} . \left(\frac{\partial F \mu}{\partial \mu} \right); \; C = \frac{3 c . M}{k^3} . \left(\frac{\partial F \mu'}{\partial \mu'} \right).$$

On doit observer que ces expressions ayant lieu pour tous les points intérieurs, & par conséquent pour les points infiniment voisins de la surface, elles ont lieu pour ceux de la surface elle-même. La détermination de ces attractions ne dépend que de la valeur de F; mais quoique cette valeur soit une intégrale définie, elle a cependant toute la difficulté de l'intégrale indéfinie, lorsque μ & μ' sont indéterminés; car, si l'on représente l'intégrale définie prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, par $\varphi(\mu^2, \mu'^2)$; il est facile de s'assurer que l'intégrale indéfinie sera $x^3 . \varphi(\mu^2 . x^2, \mu'^2 . x^2)$, en sorte que la première étant donnée, la seconde l'est pareillement. L'intégrale indéfinie n'est possible que lorsque l'une des quantités μ & μ' est nulle, ou lorsqu'elles sont égales; dans ces deux cas, l'ellipsoïde est de révolution, & k sera son demi-axe de révolution si μ & μ' sont égaux: on a dans ce dernier cas,

$$F = \int \frac{x^2 . \partial x}{1 + \mu^2 . x^2} = \frac{1}{\mu^3} . (\mu - \text{ang. tang. } \mu);$$

pour en conclure les différences partielles $(\frac{\partial . F\mu}{\partial \mu})$ & $(\frac{\partial . F\mu^1}{\partial \mu^1})$, qui entrent dans les expressions de B & de C, on observera que

$$\partial F = (\frac{\partial F}{\partial \mu}).\partial \mu + (\frac{\partial F}{\partial \mu^1}).\partial \mu^1 = \frac{1}{\mu}.(\frac{\partial F\mu}{\partial \mu}).\partial \mu + \frac{1}{\mu^1}.(\frac{\partial F\mu^1}{\partial \mu^1}) - F(\frac{\partial \mu}{\mu} + \frac{\partial \mu^1}{\mu^1});$$

or on a, lorsque $\mu = \mu^1$, $(\frac{\partial F\mu}{\partial \mu}) = (\frac{\partial F\mu^1}{\partial \mu^1})$; partant

$$(\frac{\partial F\mu}{\partial \mu}).\partial \mu = \tfrac{1}{2}\mu \partial F + F\partial \mu = \frac{1}{2\mu}.\partial.F\mu^2.$$

En substituant au lieu de F sa valeur, on aura

$$(\frac{\partial F\mu}{\partial \mu}) = \frac{1}{2\mu^3}.(\text{ang. tang.}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2});$$

on aura donc, relativement aux ellipsoïdes de révolution,

$$A = \frac{3a.M}{k^3.\mu^3}.(\mu - \text{ang. tang.}\,\mu);$$

$$B = \frac{3b.M}{2k^3.\mu^3}.(\text{ang. tang.}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2});$$

$$C = \frac{3c.M}{2k^3.\mu^3}.(\text{ang. tang.}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}).$$

IV.

Considérons maintenant l'attraction du sphéroïde sur un point extérieur; cette recherche présente de plus grandes difficultés que la précédente, à cause du radical $\sqrt{(R)}$ qui entre dans l'expression des attractions, & qui rend les intégrations impossibles: il faut recourir alors à des artifices particuliers; celui dont je vais faire usage, m'a paru mériter l'attention des Géomètres, tant par sa singularité, que par l'utilité dont il peut être dans des circonstances semblables.

Si l'on désigne par V, la somme de toutes les molécules du sphéroïde, divisées par leurs distances respectives au point attiré; que l'on nomme x, y, z les coordonnées d'une molécule

∂M du ſphéroïde, & a, b, c, celles du point attiré; on aura

$$V = \int \frac{\partial M}{\sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]}}.$$

En déſignant enſuite par A, B, C, les attractions du ſphéroïde, parallèlement aux axes des x, des y & des z, on aura

$$A = \int \frac{(a-x) \cdot \partial M}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right);$$

on aura pareillement $B = -\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)$; $C = -\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$; d'où il ſuit généralement que ſi l'on connoît V, il ſera facile d'en conclure par la ſeule différenciation, l'attraction du ſphéroïde, parallèlement à une droite quelconque a, en conſidérant cette droite comme une des coordonnées rectangles du point attiré.

La valeur précédente de V, réduite en ſérie, devient

$$V = \int \frac{\partial M}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2ax + 2by + 2cz - x^2 - y^2 - z^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ + \frac{3}{8} \cdot \frac{(2ax + 2by + 2cz - x^2 - y^2 - z^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ + \&c. \end{array} \right\};$$

cette ſuite eſt aſcendante relativement aux dimenſions du ſphéroïde, & deſcendante relativement aux coordonnées du point attiré; & ſi l'on n'a égard qu'à ſon premier terme, ce qui ſuffit lorſque le point attiré eſt à une très-grande diſtance, on aura $V = \frac{M}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, M étant la maſſe entière du ſphéroïde. Cette expreſſion ſera plus exacte encore, ſi l'on place l'origine des coordonnées au centre de gravité du ſphéroïde, car on a par la propriété de ce centre, $\int x \cdot \partial M = 0$, $\int y \cdot \partial M = 0$, $\int z \cdot \partial M = 0$; en ſorte que ſi l'on conſidère le rapport des dimenſions du ſphéroïde, à ſa diſtance au point attiré, comme une très-petite quantité du premier ordre; l'équation $V = \frac{M}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, ſera exacte aux quantités

près du troisième ordre. Nous allons présentement chercher une expression rigoureuse de V, relativement aux sphéroïdes elliptiques.

V.

Pour cela, reprenons les valeurs de V, A, B, & C de l'*article II.*

$$V = 2.\int\int \frac{\partial p.\partial q.\text{sin.}p.I.\sqrt{(R)}}{L^2}; \quad A = 2.\int\int \frac{\partial p.\partial q.\text{sin.}p.\text{cos.}p.\sqrt{(R)}}{L};$$

$$B = 2.\int\int \frac{\partial p.\partial q.\text{sin.}p^2.\text{cos.}q.\sqrt{(R)}}{L}; \quad C = 2.\int\int \frac{\partial p.\partial q.\text{sin.}p^2.\text{sin.}q.\sqrt{(R)}}{L}.$$

Puisqu'aux limites de ces intégrales, on a $\sqrt{(R)} = 0$, il est clair qu'en prenant les premières différences de V, A, B & C, par rapport à l'une quelconque des six quantités, a, b, c, k, m & n, on peut se dispenser d'avoir égard aux variations des limites, en sorte que l'on a, par exemple,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 2\int\int \partial p.\partial q.\text{sin.}p.\left(\frac{\partial.\frac{I\sqrt{(R)}}{L^2}}{\partial a}\right);$$

cela posé, il est facile de s'assurer par la différenciation, que si pour abréger, on fait $aA + bB + cC = F$, on aura entre les quatre quantités F, B, C & V, l'équation suivante aux différences partielles,

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2).\left\{\begin{array}{l} V - \frac{1}{2}.\left[a.\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + b.\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) + c.\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)\right] \\ - F + \frac{1}{2}.\left[a.\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right) + b.\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right) + c.\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)\right] \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}.k^3.\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right) - k^2.\left\{F - \frac{1}{2}.\left[a.\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + b.\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) + c.\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)\right]\right\}$$

$$+ k^2.\frac{m-1}{m}.b.\left[\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) - B\right]$$

$$+ k^2.\frac{n-1}{n}.c.\left[\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) - C\right]$$

$$- k^2.(m-1).\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right) - k^2.(n-1).\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right).$$

On peut éliminer de cette équation, les quantités B, C & F, en y ſubſtituant leurs valeurs $-\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$, & $-a.\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)-b.\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)-c.\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$; on aura ainſi une équation aux différences partielles en V ſeul. Soit donc

$$V=\frac{4\pi.k^3}{3.\sqrt{(mn)}}.\upsilon=M.\upsilon,$$

M étant par l'*article I*, la maſſe du ſphéroïde elliptique; & au lieu des variables m & n, introduiſons celles-ci θ & ϖ, qui ſont telles que

$$\theta=k^2.\frac{1-m}{m};\ \varpi=k^2.\frac{1-n}{n};$$

nous aurons

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)=\frac{2\theta}{k};\ \left(\frac{\partial\varpi}{\partial k}\right)=\frac{2\varpi}{k};\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial m}\right)=-\frac{k^2}{m^2};\ \left(\frac{\partial\varpi}{\partial n}\right)=-\frac{k^2}{n^2};$$

ce qui donne

$$k.\left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)=M.\left[2\theta.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}\right)+2\varpi.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\varpi}\right)+3\upsilon+k.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial k}\right)\right];$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial m}\right)=-M.\left[\frac{k^2}{m^2}.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}\right)+\frac{\upsilon}{2m}\right];$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)=-M.\left[\frac{k^2}{n^2}.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\varpi}\right)+\frac{\upsilon}{2n}\right].$$

Cela poſé, l'équation précédente deviendra en y ſubſtituant $\frac{k^2}{k^2+\theta}$, au lieu de m; $\frac{k^2}{k^2+\varpi}$, au lieu de n, & en ſuppoſant $Q=a.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial a}\right)+b.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial b}\right)+c.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial c}\right)$,

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (a^2 + b^2 + c^2).\{v + \frac{1}{2}.Q - \frac{1}{2}[a.(\frac{\partial Q}{\partial a}) + b.(\frac{\partial Q}{\partial b}) + c.(\frac{\partial Q}{\partial c})]\} \\ \quad + \theta^2.(\frac{\partial Q}{\partial \theta}) + \varpi^2.(\frac{\partial Q}{\partial \varpi}) - \frac{k^3}{2}.(\frac{\partial Q}{\partial k}) + \frac{1}{2}.(\theta + \varpi).Q \\ \quad + b\theta.(\frac{\partial Q}{\partial b}) + c\varpi.(\frac{\partial Q}{\partial c}) - \frac{1}{2}.b\theta.(\frac{\partial v}{\partial b}) - \frac{1}{2}.c\varpi.(\frac{\partial v}{\partial c}) \end{array}\right\}; \quad (1)$$

V I.

Concevons maintenant la fonction v réduite dans une ſuite aſcendante par rapport aux dimenſions k, $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$ du ſphéroïde, & par conſéquent deſcendante relativement aux quantités a, b & c; cette ſuite ſera de la forme ſuivante,

$$v = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \&c.$$

$U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, &c. étant des fonctions homogènes de a, b, c, k, $\sqrt{(\theta)}$, $\sqrt{(\varpi)}$, & ſéparément homogènes relativement aux trois premières & aux trois dernières de ces ſix quantités; les dimenſions relatives aux trois premières allant toujours en diminuant, & les dimenſions relatives aux trois dernières croiſſant ſans ceſſe. Ces fonctions ſont toutes de la même dimenſion que v; or V étant la ſomme des molécules du ſphéroïde, diviſées par leurs diſtances au point attiré, & chaque molécule étant de trois dimenſions, V eſt de deux dimenſions; donc v étant égal à V diviſé par la maſſe M du ſphéroïde, il ſera de la dimenſion -1.

Si l'on ſubſtitue dans l'équation (1), au lieu de v, ſa valeur précédente en ſérie; que l'on nomme s, la dimenſion de $U^{(i)}$ en k, $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$, & par conſéquent $-s-1$, ſa dimenſion en a, b, c; ſi l'on nomme pareillement s', la dimenſion de $U^{(i+1)}$ en k, $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$, & par conſéquent $-s'-1$, ſa dimenſion en a, b & c; ſi l'on conſidère enſuite que, par la nature des fonctions homogènes, on a

$$a.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial a}\right)+b.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right)+c.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right)=-(s+1).U^{(i)};$$

$$a.\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial a}\right)+b.\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial b}\right)+c.\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial c}\right)=-(s'+1).U^{(i+1)};$$

on aura, en rejetant les termes d'une dimenſion en k', $\surd(\theta)$ & $\surd(\varpi)$, ſupérieure à celle des termes que l'on conſerve

$$U^{(i+1)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}.(s+1).k^3.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial k}\right)-(s+1).\theta^2.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\theta}\right)\\-(s+1).\varpi^2.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\varpi}\right)-\left(\frac{s+1}{2}\right).(\theta+\varpi).U^{(i)}\\-(s+\tfrac{3}{2}).b\theta.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right)-(s+\tfrac{3}{2}).c\varpi.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right)\end{array}\right\}}{s'.\frac{s'+3}{2}.(a^2+b^2+c^2)};\ (2)$$

Cette équation donne la valeur de $U^{(i+1)}$, au moyen de $U^{(i)}$, & de ſes différences partielles : or, on a

$$U^{(0)}=\frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

puiſqu'en n'ayant égard qu'au premier terme de la ſérie nous avons trouvé dans l'*article IV*, $V=\frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$.

En ſubſtituant donc cette valeur de $U^{(0)}$ dans la formule précédente, on aura celle de $U^{(1)}$; au moyen de $U^{(1)}$, on aura $U^{(2)}$, & ainſi de ſuite ; mais il eſt remarquable qu'aucune de ces quantités ne renferme k; car il eſt clair par la formule (2), que $U^{(0)}$ ne renfermant point k, $U^{(1)}$ ne le renfermera pas ; que $U^{(1)}$ ne le renfermant point, $U^{(2)}$ ne le renfermera pas, & ainſi du reſte ; en ſorte que la ſérie entière $U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+U^{(3)}+$ &c., eſt indépendante de k, ou ce qui revient au même,

$\left(\frac{\partial v}{\partial k}\right) = 0$. Les valeurs de v, $-\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)$, $-\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)$, & $-\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)$, ſont donc les mêmes pour tous les ſphéroïdes elliptiques ſemblablement ſitués, & qui ont les mêmes excentricités $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$; or, $-M\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)$, $-M\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)$, & $-M\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)$, expriment par l'*article IV*, les attractions du ſphéroïde, parallèlement à ſes trois axes; donc les attractions de différens ſphéroïdes elliptiques qui ont le même centre, la même poſition des axes, & les mêmes excentricités, ſur un même point extérieur, ſont entr'elles comme leurs maſſes.

Il eſt aiſé de voir par l'inſpection de la formule (2), que les dimenſions de $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, &c. en $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$, croiſſent de deux en deux unités, en ſorte que $s = 2i$ & $s' = 2i + 2$: on a d'ailleurs par la nature des fonctions homogènes,

$$\varpi.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \varpi}\right) = i.U^{(i)} - \theta.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta}\right);$$

cette formule deviendra donc

$$U^{(i+1)} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(2i+1).\theta.(\varpi-\theta).\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta}\right) - (2i+\frac{3}{2}).b.\theta.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right) \\ -(2i+\frac{3}{2}).c.\varpi.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right) - \frac{1}{2}.(2i+1).[\theta+(2i+1).\varpi].U^{(i)}\end{array}\right\}}{(i+1).(2i+5).(a^2+b^2+c^2)}; \quad (3)$$

on aura, au moyen de cette équation, la valeur de v, dans une ſérie qui ſera convergente, toutes les fois que les excentricités $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$ ſeront fort petites, ou que la diſtance $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ du point attiré au centre du ſphéroïde, ſera fort grande relativement aux dimenſions du ſphéroïde.

Si le ſphéroïde eſt une ſphère, on aura $\theta = 0$ &

$\varpi = 0$, ce qui donne $U^{(1)} = 0$, $U^{(2)} = 0$, &c. partant $v = U^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, & $V = \frac{M}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$; d'où il ſuit que la valeur de V, eſt la même que ſi toute la maſſe de la ſphère étoit réunie à ſon centre, & qu'ainſi une ſphère attire un point quelconque extérieur, comme ſi toute ſa maſſe étoit réunie à ſon centre. Les Planètes s'attirent donc à très-peu-près, comme ſi leurs maſſes étoient réunies à leurs centres de gravité, non-ſeulement parce que leurs diſtances reſpectives ſont très-grandes par rapport aux dimenſions de leurs maſſes, mais encore parce que leurs figures ſont très-peu différentes de la ſphère.

VII.

La propriété de la fonction v, d'être indépendante de k, fournit un moyen de réduire ſa valeur ſous la forme la plus ſimple dont elle eſt ſuſceptible; car puiſque l'on peut faire varier à volonté k, ſans changer cette valeur, pourvu que l'on conſerve au ſphéroïde, les mêmes excentricités $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$; on pourra ſuppoſer k, tel que le ſphéroïde ſoit infiniment aplati, ou que ſa ſurface paſſe par le point attiré; dans ces deux cas, la recherche des attractions du ſphéroïde ſe ſimplifie; mais comme nous avons déterminé précédemment les attractions des ſphéroïdes elliptiques ſur des points placés à leur ſurface, nous ſuppoſerons k, tel que la ſurface du ſphéroïde paſſe par le point attiré.

Si l'on nomme k', m' & n', relativement à ce nouveau ſphéroïde, ce que nous avons nommé k, m, n, dans l'*article I*, par rapport au ſphéroïde que nous avons conſidéré juſqu'ici; la condition que le point attiré eſt à ſa ſurface, & qu'ainſi a, b, c ſont les coordonnées d'un point de cette ſurface, donnera

$$a^2 + m'.\, b^2 + n'.\, c^2 = k'^2;$$

& puiſque l'on ſuppoſe que les excentricités $\sqrt{(\theta)}$ & $\sqrt{(\varpi)}$ reſtent les mêmes, on aura

$$k'^2 . \frac{1 - m'}{m'} = \theta; \; k'^2 . \frac{1 - n'}{n'} = \varpi,$$

d'où l'on tire

$$m^{\text{I}} = \frac{k^{\text{I}^2}}{k^{\text{I}^2} + \theta}; \; n^{\text{I}} = \frac{k^{\text{I}^2}}{k^{\text{I}^2} + \varpi};$$

on aura donc pour déterminer k^{I}, l'équation

$$a^2 + \frac{k^{\text{I}^2}}{k^{\text{I}^2} + \theta} \cdot b^2 + \frac{k^{\text{I}^2}}{k^{\text{I}^2} + \varpi} \cdot c^2 = k^{\text{I}^2}; \quad (4)$$

Il eſt aiſé d'en conclure qu'il n'y a qu'un ſeul ſphéroïde elliptique dont la ſurface paſſe par le point attiré, θ & ϖ reſtant les mêmes; car ſi l'on ſuppoſe, comme cela ſe peut toujours en choiſiſſant convenablement l'axe k, que θ & ϖ ſoient poſitifs; il eſt clair qu'en faiſant croître k^{I^2} dans l'équation (4), d'une quantité quelconque que nous pouvons conſidérer comme une partie aliquote de k^{I^2}, chacun des termes du premier membre de cette équation, croîtra dans un rapport moindre que k^{I^2}; donc ſi dans le premier état de k^{I^2}, il y avoit égalité entre les deux membres de l'équation, cette égalité ne ſubſiſtera plus dans le ſecond état; d'où il ſuit que k^{I^2} n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule valeur réelle & poſitive.

Maintenant, ſoit M^{I} la maſſe du nouveau ſphéroïde; A^{I}, B^{I}, C^{I}, ſes attractions parallèlement aux axes des a, des b & des c; ſi l'on fait $\frac{1 - m^{\text{I}}}{m^{\text{I}}} = \mu^2$; $\frac{1 - n^{\text{I}}}{n^{\text{I}}} = \mu^{\text{I}^2}$;

$$F = \int \frac{x^2 \cdot \partial x}{\sqrt{(1 + \mu^2 . x^2) . (1 + \mu^{\text{I}^2} . x^2)}},$$

l'intégrale étant priſe depuis $x = 0$, juſqu'à $x = 1$; on aura par l'*article III*,

$$A^{\text{I}} = \frac{3a . M^{\text{I}}}{k^{\text{I}^3}} . F; \; B^{\text{I}} = \frac{3b . M^{\text{I}}}{k^{\text{I}^3}} . \left(\frac{\partial F \mu}{\partial \mu}\right); \; C^{\text{I}} = \frac{3c . M^{\text{I}}}{k^{\text{I}^3}} . \left(\frac{\partial F \mu^{\text{I}}}{\partial \mu^{\text{I}}}\right).$$

En diviſant ces valeurs de A^{I}, B^{I}, C^{I}, par M^{I}; & en les multipliant enſuite par M, on aura par ce qui précède,

les valeurs de A, B, C, relatives au premier ſphéroïde; or on a $k'^2 \frac{1-m'}{m'} = \theta$, $k'^2 . \frac{1-n'}{n'} = \varpi$; $\sqrt{(\theta)}$ $\sqrt{(\varpi)}$ étant les excentricités des ſphéroïdes; d'où l'on tire

$$\mu^2 = \frac{\theta}{k'^2}; \mu'^2 = \frac{\varpi}{k'^2};$$

k'^2 étant donné par l'equation (4) que l'on peut mettre ſous cette forme,

$$o = k'^6 - (a^2 + b^2 + c^2 - \theta - \varpi) . k'^4$$
$$- [(a^2 + c^2).\theta + (a^2 + b^2).\varpi - \theta.\varpi] . k'^2 - a^2.\theta.\varpi;$$

on aura donc

$$A = \frac{3aM}{k'^3} . F; B = \frac{3bM}{k'^3} . (\frac{\partial F\mu}{\partial \mu}); C = \frac{3cM}{k'^3} . (\frac{\partial F\mu'}{\partial \mu'}).$$

Ces valeurs ont lieu relativement à tous les points extérieurs au ſphéroïde, & pour les étendre aux points intérieurs ou à ceux de la ſurface, il ſuffit d'y changer k' en k.

Si le ſphéroïde eſt de révolution, en ſorte que $\varpi = \theta$, l'équation (4) donnera

$$2k'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \theta + \sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2 - \theta)^2 + 4a^2.\theta]};$$

& l'on aura par l'*article III*,

$$A = \frac{3.a.M}{k'^3.\mu^3} . (\mu - \text{ang. tang.}\, \mu);$$

$$B = \frac{3.b.M}{2k'^3.\mu^3} . (\text{ang. tang.}\, \mu - \frac{\mu}{1+\mu\mu});$$

$$C = \frac{3.c.M}{2k'^3.\mu^3} . (\text{ang. tang.}\, \mu - \frac{\mu}{1+\mu\mu}).$$

Nous voilà donc parvenus à une théorie complète des attractions des ſphéroïdes elliptiques; car la ſeule choſe qui reſte à

desirer, est l'intégration de la valeur de F, & cette intégration est impossible, non-seulement par les méthodes connues, mais encore en elle-même. Je me suis assuré par une méthode qu'il n'est pas de mon objet d'exposer ici, que la valeur de F ne peut être exprimée en termes finis, au moyen de quantités algébriques, logarithmiques & circulaires, ou ce qui revient au même, par une fonction algébrique de quantités dont les exposans soient constans, nuls ou variables; or, les fonctions de ce genre étant les seules que l'on puisse exprimer indépendamment du signe $\int$; toutes les intégrales qui ne peuvent se ramener à des fonctions semblables, sont impossibles en termes finis.

Si le sphéroïde elliptique n'est pas homogène, mais qu'il soit composé de couches elliptiques variables de position, d'excentricités & de densité, suivant des loix quelconques; on aura l'attraction d'une de ses couches, en déterminant par ce qui précède, la différence des attractions de deux sphéroïdes elliptiques homogènes de même densité que cette couche, dont l'un auroit pour surface, la surface extérieure de la couche, & dont l'autre auroit pour surface, la surface intérieure de cette même couche; en sommant ensuite cette attraction différentielle, on aura l'attraction du sphéroïde entier.

DEUXIÈME SECTION.

Du développement en série, des attractions des Sphéroïdes quelconques.

VIII.

CONSIDÉRONS généralement les attractions des sphéroïdes quelconques; nous avons vu dans *l'article IV*, que l'expression V de la somme des molécules d'un sphéroïde, divisées par leurs distances à un point attiré, a l'avantage de donner par sa différenciation, l'attraction de ce sphéroïde, parallelement à une droite quelconque; nous verrons

d'ailleurs, en parlant de la figure des Planètes, que l'attraction de leurs molécules, se présente sous cette forme dans l'équation de leur équilibre ; ainsi nous allons nous occuper particulièrement de la recherche de V. Soient comme ci-dessus, a, b, c, les coordonnées du point attiré ; x, y, z, celles d'une molécule du sphéroïde ; nommons de plus r, la distance $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ du point attiré, à l'origine des coordonnées que nous supposerons dans l'intérieur du sphéroïde ; θ, l'angle que forme le rayon r avec l'axe des x ; ϖ, l'angle que forme le plan qui passe par l'axe des x & par le point attiré, avec un plan invariable passant par les axes des x & des y ; nous aurons

$$a = r.\text{cos}.\,\theta;\; b = r.\text{sin}.\,\theta.\text{cos}.\,\varpi;\; c = r.\text{sin}.\,\theta.\text{sin}.\,\varpi.$$

Nommons ensuite R la distance $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, de la molécule à l'origine des coordonnées ; & supposons que θ' & ϖ', soient ce que deviennent les angles θ & ϖ, relativement à cette molécule ; nous aurons

$$x = R.\text{cos}.\,\theta';\; y = R.\text{sin}.\,\theta'.\text{cos}.\,\varpi';\; z = R.\text{sin}.\,\theta'.\text{sin}.\,\varpi';$$

la distance

$$\sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]},$$

de la molécule au point attiré, sera donc égale à

$$\sqrt{\{r^2 - 2rR.[\text{cos}.\,\theta.\text{cos}.\,\theta' + \text{sin}.\,\theta.\text{sin}.\,\theta'.\text{cos}.\,(\varpi - \varpi')] + R^2\}};$$

d'ailleurs la molécule du sphéroïde est égale à

$$R^2.\partial R.\partial\theta'.\partial\varpi'.\text{sin}.\,\theta';$$

nous aurons donc

$$V = \int \frac{R^2.\partial R.\partial\varpi'.\partial\theta'.\text{sin}.\,\theta'}{\sqrt{[r^2 - 2rR.(\text{cos}.\,\theta.\text{cos}.\,\theta' + \text{sin}.\,\theta.\text{sin}.\,\theta'.\text{cos}.\,(\varpi-\varpi')) + R^2]}};$$

l'intégrale relative à R devant être prise depuis $R = 0$, jusqu'à la valeur de R à la surface du sphéroïde ; l'intégrale relative à ϖ' devant être prise depuis $\varpi' = 0$, jusqu'à

$\varpi' = 360$ degrés; & celle qui eſt relative à θ', devant être priſe depuis $\theta' = 0$, juſqu'à $\theta' = 180$ degrés.

J'ai obſervé dans nos Mémoires pour l'année 1779, que les intégrales des équations linéaires aux différences partielles du ſecond ordre, n'étoient ſouvent poſſibles qu'au moyen d'intégrales définies ſemblables à l'expreſſion de V; ainſi lorſqu'on a de ſemblables intégrales, il eſt facile dans un grand nombre de cas, d'en tirer des équations aux différences partielles, dont la conſidération peut fournir des remarques intéreſſantes, & faciliter la réduction des intégrales en ſéries. Dans le cas préſent, il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation, que ſi l'on fait $\text{coſ.}\ \theta = \mu$, on aura l'équation ſuivante aux différences partielles,

$$0 = \left\{\frac{\partial.\left[(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\right]}{\partial \mu}\right\} + \frac{\left(\frac{\partial\partial V}{\partial \varpi^2}\right)}{1-\mu\mu} + r.\left(\frac{\partial\partial.rV}{\partial r^2}\right); \quad (5)$$

nous verrons dans la ſection ſuivante, toute la théorie des attractions des ſphéroïdes très-peu différens de la ſphère, découler de cette équation fondamentale.

IX.

Supposons d'abord le point attiré, extérieur au ſphéroïde; ſi l'on réduit V en ſérie, elle doit être dans ce cas, deſcendante par rapport aux puiſſances de r, & par conſéquent de cette forme,

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \frac{U^{(3)}}{r^4} + \&c.$$

Si l'on ſubſtitue cette valeur de V, dans l'équation précédente aux différences partielles; on aura, quel que ſoit i,

$$0 = \left\{\frac{\partial.\left[(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu}\right)\right]}{\partial \mu}\right\} + \frac{\left(\frac{\partial\partial U^{(i)}}{\partial \varpi^2}\right)}{1-\mu\mu} + i.(i+1).U^{(i)},$$

& il eſt viſible par la ſeule inſpection de l'expreſſion intégrale de V, que $U^{(i)}$ eſt une fonction rationnelle & entière de μ, $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi$ & $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi$, dépendante de la nature du ſphéroïde. Voyons comment on peut la déterminer.

Nommons T, le radical

$$\frac{1}{\sqrt{[r^2 - 2rR.(\text{coſ.}\,\theta.\text{coſ.}\,\theta' + \text{ſin.}\,\theta.\text{ſin.}\,\theta'.\text{coſ.}(\varpi-\varpi')) + R^2]}},$$

nous aurons

$$o = \left\{\frac{\partial.[(1-\mu\mu).(\frac{\partial T}{\partial\mu})]}{\partial\mu}\right\} + \frac{(\frac{\partial\partial T}{\partial\varpi^2})}{1-\mu\mu} + r.(\frac{\partial\partial.rT}{\partial r^2}):$$

cette équation ſubſiſteroit encore en y changeant θ en θ', ϖ en ϖ' & réciproquement, parce que T eſt une pareille fonction de θ' & de ϖ', que de θ & de ϖ. Si l'on réduit T dans une ſuite deſcendante relativement à r, on aura

$$T = \frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{Q^{(1)}.R}{r^2} + \frac{Q^{(2)}.R^2}{r^3} + \frac{Q^{(3)}.R^3}{r^4} + \&c.$$

$Q^{(i)}$ étant, quel que ſoit i, donné par cette équation

$$o = \left\{\frac{\partial.[(1-\mu\mu).(\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial\mu})]}{\partial\mu}\right\} + \frac{(\frac{\partial\partial Q^{(i)}}{\partial\varpi^2})}{1-\mu\mu} + i.(i+1).Q^{(i)};$$

& de plus il eſt viſible que $Q^{(i)}$ eſt une fonction rationnelle & entière de μ, & $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}(\varpi-\varpi')$. $Q^{(i)}$ étant connu, on aura $U^{(i)}$ au moyen de l'équation

$$U^{(i)} = \int R^{i+2}.\partial R.Q^{(i)}.\partial\varpi'.\partial\theta'.\text{ſin.}\,\theta'$$
$$= \frac{1}{i+3}.\int R'^{\,i+3}.Q^{(i)}.\partial\varpi'.\partial\theta'.\text{ſin.}\,\theta',$$

R' étant le rayon R prolongé juſqu'à la ſurface du ſphéroïde; or on a, par la nature du ſphéroïde, R' en fonction de θ' & de ϖ': en ſubſtituant donc cette fonction dans la

valeur

valeur de $U^{(i)}$, il ne s'agira plus que d'exécuter par les méthodes connues, les intégrations relatives à ϖ^{1} & θ^{1} ; mais pour cela il est nécessaire de déterminer $Q^{(i)}$.

Développons cette quantité suivant les cosinus de l'angle $\varpi - \varpi^{1}$, & de ses multiples, & nommons β, le coéfficient de cos. $n.(\varpi - \varpi^{1})$; en substituant dans l'équation précédente aux différences partielles en $Q^{(i)}$, le terme β.cos. $n(\varpi - \varpi^{1})$, on aura pour déterminer β, l'équation aux différences ordinaires,

$$o = \left\{ \frac{\partial . [(1 - \mu\mu).(\frac{\partial . \beta}{\partial \mu})]}{\partial \mu} \right\} - \frac{n^{2}.\beta}{1 - \mu\mu} + i.(i + 1).\beta,$$

β étant une fonction rationnelle & entière de μ & de cos. θ^{1}, si n est pair ou zéro, & étant égal à une pareille fonction multipliée par sin. $\theta^{1}.\sqrt{(1 - \mu^{2})}$, si n est impair.

L'équation précédente ne renfermant point l'angle θ^{1}, il est clair que cet angle ne peut se trouver que dans les deux constantes arbitraires de l'intégrale; de plus, cette équation étant linéaire, elle a deux valeurs particulières qui étant respectivement multipliées par des constantes arbitraires, & ensuite ajoutées, donnent l'intégrale complète : or il n'y a qu'une seule de ces deux valeurs qui puisse être une fonction rationnelle & entière de μ; il n'y en a pareillement qu'une seule qui puisse être égale au produit de $\sqrt{(1 - \mu^{2})}$, par une fonction rationnelle & entière de μ; car si l'on substitue de pareilles fonctions pour β dans l'équation précédente, on verra facilement qu'en partant de la plus haute puissance de μ, tous les coéfficiens des puissances successives de cette variable, seront entièrement déterminés par ceux qui précèdent, en sorte qu'il ne restera que le premier d'arbitraire. En désignant donc par λ, cette valeur particulière de β, qui est rationnelle & entière en μ, si n est pair, ou celle qui est égale à $\sqrt{(1 - \mu^{2})}$ multiplié

par une fonction rationnelle & entière en μ, si n est impair, on aura $\beta = H.\lambda$, H étant une fonction de θ'. Pour la déterminer, on observera que les deux angles θ & θ' entrant de la même manière dans T; si l'on fait cos. $\theta' = \mu'$, les équations différentielles en $Q^{(i)}$ & β, subsisteront encore en y changeant μ en μ'; β est donc une pareille fonction de μ' que de μ; partant, si l'on désigne par λ', ce que devient λ lorsqu'on y change μ en μ', on aura $H = \gamma.\lambda'$, γ étant une fonction de i & de n, indépendante de μ & de μ'; on aura donc

$$\beta = \gamma.\lambda.\lambda',$$

c'est-à-dire que β peut se décomposer en trois facteurs dont le premier est une fonction de i & de n, sans μ ni μ'; dont le second est fonction de μ; & dont le troisième est une fonction semblable en μ'.

X.

Cherchons d'abord la valeur de β lorsque $n = 0$. Pour cela, nous observerons que, si dans l'expression de T, on suppose sin. $\theta' = 0$, elle deviendra $\frac{1}{\sqrt{(r^2 - 2rR\mu + R^2)}}$; d'où l'on tire

$$Q^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots i} \times$$
$$\left\{\mu^i - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-2} + \frac{i.(i-1).(i-2).(i-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)}.\mu^{i-4} - \&c.\right\}$$

& comme cette valeur de $Q^{(i)}$ est indépendante de l'angle $\varpi - \varpi'$, elle sera égale à ce que devient β lorsque $n = 0$, & lorsqu'on y fait d'ailleurs $\mu' = 1$. Maintenant si l'on prend pour la fonction λ, cette valeur même de $Q^{(i)}$; puisqu'elle est égale à $\gamma.\lambda.\lambda'$, lorsqu'on fait $\mu' = 1$ dans λ', il est clair que l'on aura dans ce cas, $\gamma\lambda' = 1$; or si, dans l'expression de T, on fait à la fois $\mu = 1$ & $\mu' = 1$, elle devient $\frac{1}{r-R}$;

partant $Q^{(i)}$ se réduit à l'unité, ou ce qui revient au même, on a $\gamma.\lambda.\lambda^{\prime} = 1$; mais on a $\gamma\lambda^{\prime} = 1$; donc λ se réduit à l'unité lorsqu'on y fait $\mu = 1$, ce qui a lieu également pour $\lambda^{\prime}$, lorsqu'on y fait $\mu^{\prime} = 1$; on aura ainsi $\gamma = 1$, &

$$\lambda = \frac{1.3.5.7.\ldots.(2i-1)}{1.2.3.\ldots.i} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mu^{i} - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-2} + \frac{i.(i-1).(i-2).(i-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)}.\mu^{i-4} \\ - \frac{i.(i-1).(i-2).(i-3).(i-4).(i-5)}{2.4.6.(2i-1).(2i-3).(2i-5)}.\mu^{i-6} + \&c. \end{array}\right\}.$$

En changeant μ en $\mu^{\prime}$ dans cette valeur de λ, on aura $\lambda^{\prime}$; on aura ensuite $\beta = \lambda.\lambda^{\prime}$; ce sera la partie de $Q^{(i)}$, indépendante de l'angle $\varpi - \varpi^{\prime}$.

Cette partie est la seule à laquelle on doit avoir égard, relativement aux sphéroïdes de révolution dont l'axe des x, est l'axe même de révolution ; car alors $R^{\prime}$ étant indépendant de $\varpi^{\prime}$, le terme $\beta.\text{cos}.\, n\, (\varpi - \varpi^{\prime})$ substitué pour $Q^{(i)}$ dans l'intégrale $\int R^{\prime\, i+3}.Q^{(i)}.\partial\varpi^{\prime}.\partial\theta^{\prime}.\text{sin}.\,\theta^{\prime}$, donne un résultat nul, excepté lorsque $n = 0$; on aura donc alors

$$U^{(i)} = \frac{1}{i+3}.\int R^{\prime\, i+3}.\,Q^{(i)}.\,\partial\varpi^{\prime}.\,\partial\theta^{\prime}.\,\text{sin}.\,\theta^{\prime}$$
$$= -\frac{2\pi.\lambda}{i+3}.\int R^{\prime\, i+3}.\,\lambda^{\prime}.\,\partial\mu^{\prime},$$

λ & $\lambda^{\prime}$ étant déterminés par ce qui précède, & l'intégrale relative à $\mu^{\prime}$, devant être prise depuis $\mu^{\prime} = 1$ jusqu'à $\mu = -1$. Il suit de-là que si l'on suppose

$$A^{(i)} = -\frac{2\pi}{i+3}.\int R^{\prime\, i+3}.\lambda^{\prime}.\partial\mu^{\prime},$$

& que l'on nomme $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, &c. les valeurs de λ, lorsqu'on y fait successivement $i = 0, i = 1, i = 2$, &c.

l'expreſſion de V relative aux ſphéroïdes de révolution, ſera

$$V = \frac{\lambda^{(0)}.A^{(0)}}{r} + \frac{\lambda^{(1)}.A^{(1)}}{r^2} + \frac{\lambda^{(2)}.A^{(2)}}{r^3} + \frac{\lambda^{(3)}.A^{(3)}}{r^4} + \&c.$$

Si l'on fait $\mu = 1$, on aura la valeur de V relative à un point placé ſur le prolongement de l'axe de révolution, à la diſtance r de l'origine des coordonnées ; & comme alors on a, par ce qui précède, $\lambda^{(i)} = 1$, on aura

$$V = \frac{A^{(0)}}{r} + \frac{A^{(1)}}{r^2} + \frac{A^{(2)}}{r^3} + \frac{A^{(3)}}{r^4} + \&c.$$

ainſi lorſqu'on aura déterminé en ſérie, la valeur de V relative à un point placé ſur le prolongement de l'axe de révolution ; on aura cette même valeur, relativement à un point quelconque placé à la même diſtance de l'origine des coordonnées, mais ſur un rayon qui fait avec l'axe de révolution, un angle dont μ eſt le coſinus ; en multipliant les termes de la première ſérie, reſpectivement par $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, &c.

Lorſque le point attiré eſt placé ſur le prolongement de l'axe de révolution, il eſt aiſé de voir qu'en nommant x l'abſciſſe, & y l'ordonnée du méridien du ſphéroïde, & en repréſentant par $y = X$, l'équation de ce méridien ; on aura

$$V = 2\pi . \int \partial x . \{x - r + \sqrt{[(r-x)^2 + X^2]}\},$$

l'intégrale devant s'étendre à l'axe entier de révolution ; cette intégrale réduite dans une ſuite deſcendante par rapport aux puiſſances de r, donnera les valeurs de $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c.

X I.

CONSIDÉRONS maintenant l'expreſſion générale de $\mathfrak{C}$, lorſque n n'eſt pas nul. Si l'on fait dans l'expreſſion de T, coſ. $\theta^1 = 0$, on aura

$$T = \frac{1}{\sqrt{[r^2 - 2r.R \text{ ſin. } \theta . \text{ coſ. } (\varpi - \varpi^1) + R^2]}},$$

ce qui donne dans ce cas

$$Q^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots i} \times \left\{ \begin{array}{l} (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}} . \text{cos}. (\varpi - \varpi^{\prime})^{i} \\ - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)} . (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}-1} . \text{cos}. (\varpi - \varpi^{\prime})^{i-2} \\ + \frac{i.(i-1).(i-2).(i-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)} . (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}-2} . \text{cos}. (\varpi - \varpi^{\prime})^{i-4} \\ - \&c. \end{array} \right\}$$

en développant cette fonction, en cosinus de l'angle $\varpi - \varpi^{\prime}$, & de ses multiples, il est aisé de voir que l'on n'aura que des multiples pairs ou impairs, suivant que i sera lui-même pair ou impair ; & que le coéfficient de cos. $n\,(\varpi - \varpi^{\prime})$ sera égal à

$$2 . \frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots\ldots(i+n).2.4.6\ldots\ldots(i-n)} \times \left\{ \begin{array}{l} (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}} - \frac{(i^2-n^2)}{2.(2i-1)} . (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}-1} \\ + \frac{(i^2-n^2).[(i-2)^2-n^2]}{2.4.(2i-1).(2i-3)} . (1-\mu\mu)^{\frac{i}{2}-2} \\ - \&c. \end{array} \right\}$$

ce sera la valeur de ζ ou de $\gamma . \lambda . \lambda^{\prime}$, lorsqu'on fait $\mu^{\prime} = 0$, dans $\lambda^{\prime}$. En prenant donc pour λ, la partie de ce coéfficient qui est comprise entre les deux parenthèses, on aura

$$\gamma \lambda^{\prime} = 2 . \frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots\ldots(i+n).2.4.6\ldots\ldots(i-n)},$$

$\mu^{\prime}$ étant supposé nul dans $\lambda^{\prime}$. Cette équation donnera γ ; mais on l'obtiendra plus simplement de cette manière.

Si l'on fait à-la-fois dans T, μ & μ^{I} égaux à zéro, on aura

$$T = \frac{1}{\left[r - R.e^{(\varpi - \varpi^{\text{I}})\sqrt{(-1)}}\right]^{\frac{1}{2}} . \left[r - R.e^{-(\varpi - \varpi^{\text{I}})\sqrt{(-1)}}\right]^{\frac{1}{2}}};$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Le coéfficient de

$$\frac{R^i}{r^{i+1}} . \left[\frac{e^{n.(\varpi - \varpi^{\text{I}})\sqrt{(-1)}} + e^{-n.(\varpi - \varpi^{\text{I}})\sqrt{(-1)}}}{2}\right],$$

ou, ce qui revient au même, de $\frac{R^i}{r^{i+1}} . \text{cos}. n . (\varpi - \varpi^{\text{I}})$, dans le développement de cette fonction, est égal à

$$2 . \frac{1.3.5 \ldots . (i + n - 1) . 1.3.5 \ldots . (i - n - 1)}{2.4.6 \ldots\ldots (i + n) . 2.4.6 \ldots\ldots (i - n)},$$

c'est la valeur de $\mathfrak{C}$ ou de $\gamma\, \lambda . \lambda^{\text{I}}$, lorsqu'on y fait μ & μ^{I} nuls ; or, on a dans cette hypotèse $\lambda = \lambda^{\text{I}}$; on aura donc ainsi la valeur de $\gamma\, \lambda^{\text{I}^2}$. En la combinant avec celle que nous venons de trouver pour $\gamma\, \lambda^{\text{I}}$, il est facile d'en conclure,

$$\gamma = \frac{2.(i+n+1).(i+n+3) \ldots (2i-1).(i-n+1).(i-n+3) \ldots (2i-1)}{2.4.6 \ldots\ldots (i + n) . 2.4.6 \ldots\ldots (i - n)};$$

la valeur générale de $\mathfrak{C}$, sera par conséquent

$$\mathfrak{C} = \frac{2.(i + n + 1) \ldots . (2i - 1).(i - n + 1) \ldots . (2i - 1)}{2.4 \ldots\ldots\ldots\ldots (i + n) . 2.4 \ldots\ldots\ldots\ldots (i - n)} \times$$

$$. \left\{ \begin{array}{l} (1 - \mu\mu)^{\frac{i}{2}} - \frac{(i^2 - n^2)}{2.(2i - 1)} . (1 - \mu\mu)^{\frac{i}{2} - 1} \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\} \times$$

$$. \left\{ \begin{array}{l} (1 - \mu^{\text{I}}\mu^{\text{I}})^{\frac{i}{2}} - \frac{(i^2 - n^2)}{2.(2i - 1)} . (1 - \mu^{\text{I}}\mu^{\text{I}})^{\frac{i}{2} - 1} \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

Si l'on fait successivement dans le terme

$\mathfrak{C} . \text{cos}.\ n\,(\varpi - \varpi^{\text{I}})$; $n = 1$, $n = 2 \ldots n = i$;

la ſomme de ces termes, ſera la partie de $Q^{(i)}$ dépendante de l'angle $\varpi - \varpi^{\prime}$; en lui ajoutant la partie qui en eſt indépendante, & que nous avons déterminée dans l'*article précédent*, on aura la valeur entière de $Q^{(i)}$, d'où l'on tirera celle de $U^{(i)}$, & par conſéquent la valeur de V en ſérie.

XII.

Cette valeur eſt relative aux points extérieurs; mais ſi le point attiré eſt placé dans l'intérieur du ſphéroïde, il faut alors développer l'expreſſion de V de l'*article VIII*, dans une ſuite aſcendante par rapport à r, ce qui donne

$$V = v^{(0)} + v^{(1)}.r + v^{(2)}.r^2 + v^{(3)}.r^3 + \&c.$$

Pour déterminer $v^{(i)}$, on obſervera que l'expreſſion de T, réduite dans une ſuite aſcendante par rapport à r, devient

$$T = \frac{Q^{(0)}}{R} + \frac{Q^{(1)}.r}{R^2} + \frac{Q^{(2)}.r^2}{R^3} + \frac{Q^{(3)}.r^3}{R^4} + \&c.$$

les quantités $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, étant les mêmes que ci-deſſus; on aura donc par l'*article VIII*,

$$v^{(i)} = \int \frac{Q^{(i)}.\partial R.\partial\varpi^{\prime}.\partial\theta^{\prime}.\text{ſin.}\,\theta^{\prime}}{R^{i-1}};$$

mais comme l'expreſſion précédente de T en ſérie, n'eſt convergente qu'autant que R eſt plus grand que r; nous ne conſidérerons la valeur de $v^{(i)}$ que relativement à une couche dont la ſurface intérieure eſt ſphérique, & d'un rayon quelconque a plus grand que r, & dont le rayon de la ſurface extérieure eſt $R^{\prime}$; ce qui revient à prendre l'intégrale relative à R, depuis $R = a$, juſqu'à $R = R^{\prime}$. Nous aurons ainſi la valeur de V relative à cette couche, & pour avoir celle qui eſt relative au ſphéroïde entier, il ſuffit de lui ajouter la valeur de V relative à une ſphère du rayon a, valeur que l'on trouvera facilement être égale à $2\pi.a^2 - \frac{2}{3}\pi.r^2$.

Si le ſphéroïde eſt de révolution, il eſt aiſé de voir par l'analyſe de l'*article X*, que l'on aura la valeur de V relative à la couche dont nous venons de parler, en déterminant cette valeur lorſque le point attiré eſt ſitué dans l'axe de révolution, en la réduiſant dans une ſérie aſcendante par rapport aux puiſſances de r, & en multipliant ſes termes reſpectivement par $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, &c.

TROISIÈME SECTION.

Des attractions des ſphéroïdes très-peu différens de la ſphère.

XIII.

LES réſultats que nous venons de préſenter ſur les attractions des ſphéroïdes quelconques, ſe ſimplifient relativement aux ſphéroïdes très-peu différens de la ſphère, & donnent une théorie complette de leurs attractions, en les ſuppoſant même hétérogènes.

Conſidérons d'abord le cas où le point attiré eſt extérieur au ſphéroïde, & reprenons la formule de l'*article VIII.*

$$V = \int \frac{R^2 . \partial R . \partial \varpi' . \partial \theta' . \text{ſin.}\, \theta'}{\sqrt{\left\{ r^2 - 2rR . [\text{coſ.}\, \theta\, \text{coſ.}\, \theta' + \text{ſin.}\, \theta . \text{ſin}\, \theta' . \text{coſ.}\, (\varpi - \varpi')] + R^2 \right\}}};$$

Suppoſons que le rayon R^1, mené du centre du ſphéroïde à ſa ſurface, ſoit très-peu différent de la conſtante a, en ſorte que l'on ait $R^1 = a.(1 + \alpha y)$, α étant un très-petit coëfficient dont nous négligerons le carré & les puiſſances ſupérieures, & y étant une fonction quelconque de μ ou de coſ. θ, & de l'angle ϖ. Cela poſé.

Si l'on conçoit une ſphère dont le centre ſoit celui du ſphéroïde, & dont le rayon ſoit $a.(1 + \alpha y)$, μ & ϖ étant ſuppoſés conſtans dans y; il eſt clair que la valeur de V relative au ſphéroïde, ſera égale à ſa valeur relativement à cette ſphère, plus à la valeur de V relative à l'excès du ſphéroïde ſur la ſphère. La première de ces deux valeurs étant,

par

par l'*article VI*, égale à la maſſe de la ſphère diviſée par r, ſera $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3 \cdot (1 + \alpha y)^3}{r}$. Quant à la ſeconde, on la déterminera en faiſant dans l'expreſſion intégrale de V, $R = a$, & $\partial R = \alpha a \cdot (y^1 - y)$, y^1 étant ce que devient y, lorſqu'on y change θ & ϖ, en θ^1 & ϖ^1; on aura ainſi, pour la valeur de V relative à un ſphéroïde très-peu différent de la ſphère,

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3 \cdot (1 + \alpha y)^3}{r}$$

$$+ \alpha a^3 \cdot \int \frac{(y^1 - y) \cdot \partial\varpi^1 \cdot \partial\theta^1 \cdot \text{ſin.}\,\theta^1}{\sqrt{[r^2 - 2ar \cdot (\text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\theta^1 + \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\theta^1 \cdot \text{coſ.}\,(\varpi - \varpi^1)) + a^2]}}.$$

Si l'on différencie cette équation par rapport à r, on aura,

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3 \cdot (1 + \alpha y)^3}{r^2} + \alpha a^3 \times$$

$$\cdot \int \frac{(y^1 - y)\partial\varpi^1 \cdot \partial\theta^1 \cdot \text{ſin.}\,\theta^1 \cdot [r - a(\text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\theta^1 + \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\theta^1 \cdot \text{coſ.}\,(\varpi - \varpi^1))]}{[r^2 - 2ar \cdot (\text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\theta^1 + \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\theta^2 \cdot \text{coſ.}\,(\varpi - \varpi^1)) + a^2]^{\frac{3}{2}}};$$

ce qui donne à la ſurface du ſphéroïde où $r = a(1 + \alpha y)$,

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot a(1 + \alpha y)$$

$$+ \alpha a \int \frac{(y^1 - y) \cdot \partial\varpi^1 \cdot \partial\theta^1 \cdot \text{ſin.}\,\theta^1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{[1 - \text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\theta^1 \cdot - \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\theta^1 \cdot \text{coſ.}\,(\varpi - \varpi^1)]}};$$

mais la valeur de V, devient dans ce cas

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot a^2 \cdot (1 + 2\alpha y)$$

$$+ \alpha a^2 \cdot \int \frac{(y^1 - y) \cdot \partial\varpi^1 \cdot \partial\theta^1 \cdot \text{ſin.}\,\theta^1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{[1 - \text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\theta^1 - \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\theta^1 \cdot \text{coſ.}\,(\varpi - \varpi^1)]}};$$

on a donc à la ſurface du ſphéroïde, cette équation remarquable

$$-a \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot a^2 + \frac{1}{2}V; \quad (6).$$

Reprenons maintenant la formule de l'*article IX*.

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \frac{U^{(3)}}{r^4} + \&c.$$

Puiſque le ſphéroïde diffère très-peu d'une ſphère du rayon a; il eſt évident que l'on aura aux quantités près de l'ordre α, $V = \frac{4}{3}\pi . \frac{a^3}{r}$; d'où il ſuit que dans la formule précédente, 1.° la quantité $U^{(0)}$ eſt égale à $\frac{4}{3}\pi . a^3$, plus à une très-petite quantité de l'ordre α, & que nous déſignerons par $U'^{(0)}$. 2.° les quantités $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, &c. ſont très-petites de l'ordre α. Si l'on différencie cette formule par rapport à r, on aura

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{4}{3}\pi . \frac{a^3}{r^2} + \frac{U'^{(0)}}{r^2} + \frac{2 . U^{(1)}}{r^3} + \frac{3 . U^{(2)}}{r^4} + \&c.$$

on aura par conſéquent à la ſurface où $r = a . (1 + \alpha y)$,

$$-a\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{4}{3}\pi . a^2 . (1 - 2\alpha y)$$
$$+ \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{2 . U^{(1)}}{a^2} + \frac{3 . U^{(2)}}{a^3} + \&c.$$

La valeur précédente de V donne à cette ſurface,

$$\frac{1}{2} . V = \frac{2}{3}\pi . a^2 . (1 - \alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{2a} + \frac{U^{(1)}}{2a^2} + \frac{U^{(2)}}{2a^3} + \&c.$$

en ſubſtituant donc ces valeurs dans l'équation (6), on aura

$$4\alpha\pi . a^2 . y = \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{3U^{(1)}}{a^2} \quad \frac{5 . U^{(2)}}{a^3} + \&c.$$

partant ſi l'on conçoit y, ſous cette forme

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \&c.$$

les quantités $Y^{(0)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}$, &c. étant ainſi que $U'^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, &c. aſſujetties à cette équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{\frac{\partial . (1 - \mu\mu) . \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}\right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2}\right]}{1 - \mu\mu} + i . (i + 1)\, Y^{(i)};$$

on aura généralement, en comparant les fonctions semblables,

$$U^{(i)} = \frac{4\alpha\pi}{2i+1} \cdot a^{i+3} \cdot Y^{(i)};$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3}{r} + 4\alpha\pi \cdot \frac{a^3}{r} \times \\ \left[Y^{(0)} + \frac{a}{3r} \cdot Y^{(1)} + \frac{a^2}{5r^2} \cdot Y^{(2)} + \frac{a^3}{7r^3} \cdot Y^{(3)} + \&c. \right] \end{array} \right\} ; (7).$$

Il ne s'agit donc plus pour avoir V, que de réduire y, sous la forme que nous venons de lui supposer. Nous allons donner pour cet objet, une méthode fort simple, lorsque l'équation de la surface du sphéroïde, rapportée à trois coordonnées orthogonales, est une fonction rationnelle & entière de ces coordonnées.

XIV.

Si l'on nomme x'', y'', z'', ces coordonnées; l'équation de la surface du sphéroïde, pourra être mise sous cette forme,

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = a^2 \cdot \{1 + 2\alpha \cdot \varphi(x'', y'', z'',)\}$$

$\varphi(x'', y'', z'',)$ étant une fonction rationnelle & entière de x'', y'', z''. Soit i, le degré de cette fonction : comme elle est multipliée par α, on pourra y substituer au lieu de z'', sa valeur $\sqrt{(a^2 - x''^2 - y''^2)}$, qui est approchée aux quantités près de l'ordre α; elle sera ainsi composée de deux parties; l'une rationnelle & entière, en x'' & y'', de l'ordre i; & l'autre rationnelle & entière de l'ordre $i - 1$, & multipliée par $\sqrt{(a^2 - x''^2 - y''^2)}$. Le nombre des coéfficiens de la première partie, est $\frac{(i+1).(i+2)}{2}$; & celui des coéfficiens de la seconde, est $\frac{i.(i+1)}{2}$, en sorte que le nombre de coéfficiens de la fonction entière, est $(i+1)^2$. Cela posé.

Si l'on nomme, comme ci-dessus, $a.(1 + \alpha y)$ le rayon du sphéroïde; θ, l'angle que forme ce rayon avec l'axe des x^{II}; ϖ, l'angle que forme avec le plan des x^{II} & des y^{II}, celui qui passe par l'axe des x^{II}, & par le point de la surface déterminé par les coordonnées x^{II}, y^{II} & z^{II}; on aura en faisant $\text{cos.}\ \theta = \mu$,

$$x^{II} = a.(1 + \alpha y).\mu;$$
$$y^{II} = a.(1 + \alpha y).\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{cos.}\ \varpi;$$
$$z^{II} = a.(1 + \alpha y).\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{sin.}\ \varpi;$$

l'équation précédente donnera donc, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$y = \varphi.\{a\mu,\ a.\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{cos.}\varpi,\ a.\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{sin.}\ \varpi\}.$$

Cette dernière fonction peut être mise sous la forme

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} \ldots\ldots + Y^{(i)};$$

car $Y^{(i)}$ étant une fonction rationnelle & entière de μ, $\sqrt{(1 - \mu^2.)}\ \text{cos.}\ \varpi$, & $\sqrt{(1 - \mu^2)}.\text{sin.}\ \varpi$, qui satisfait à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{\frac{\partial.(1 - \mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}\right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2}\right]}{1 - \mu\mu} + i.(i + 1).Y^{(i)};$$

il est visible qu'elle sera composée, 1.° d'une partie indépendante de ϖ, & qui aura un coéfficient indéterminé; 2.° de parties multipliées par

$$\text{cos.}\ \varpi,\ \text{cos.}\ 2\ \varpi,\ \text{cos.}\ 3\ \varpi, \ldots\ldots \text{cos.}\ i\ \varpi,$$

qui auront chacune un coéfficient indéterminé; 3.° de parties multipliées par

$$\text{sin.}\ \varpi,\ \text{sin.}\ 2\ \varpi,\ \text{sin.}\ 3\ \varpi \ldots\ldots \text{sin.}\ i\ \varpi,$$

& qui auront chacune un coéfficient indéterminé. Le nombre des coéfficiens indéterminés de $Y^{(i)}$ sera donc $2\,i + 1$,

& par conséquent celui des coéfficiens indéterminés de la fonction $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} \ldots + Y^{(i)}$ sera $(i+1)^2$; il sera donc le même que celui des coéfficiens de la fonction $\varphi\,[a\mu, a.\sqrt{(1-\mu^2.)}\,\text{cos.}\,\varpi, a.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{sin.}\,\varpi]$; d'où il suit que l'on peut transformer la seconde de ces deux fonctions dans la première. Cette possibilité étant une fois démontrée, on pourra exécuter la transformation, de la manière suivante.

L'équation précédente aux différences partielles, donne celle-ci,

$$\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\partial.[Y^{(0)}+Y^{(1)}\ldots+Y^{(i)}]}{\partial\mu^2}\right\}+\frac{\left\{\frac{\partial\partial.[Y^{(0)}+Y^{(1)}\ldots+Y^{(i)}]}{\partial\varpi^2}\right\}}{1-\mu\mu}$$

$$=-1.2.Y^{(1)}-2.3.Y^{(2)}\ldots-i.(i+1).Y^{(i)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu}$$

$$=-1.2.Y^{(1)}-2.3.Y^{(2)}-3.4.Y^{(3)}\ldots-i.(i+1).Y^{(i)}.$$

En suivant ce procédé, il est aisé de voir que si l'on fait

$$\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{\partial^2.y}{\partial\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu}=y^{(1)},$$

$$\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial.y^{(1)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\}+\frac{\left[\frac{\partial^2.y^{(1)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu}=y^{(2)},$$

$$\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial y^{(2)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\}+\frac{\left[\frac{\partial^2.y^{(2)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu}=y^{(3)},$$

&c.

on aura les $i+1$ équations,

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} \ldots\ldots + Y^{(i)} = y,$$

$$1.2.Y^{(1)} + 2.3.Y^{(2)} \ldots + i.(i+1).Y^{(i)} = -y^{(1)},$$

$$(1.2)^2.Y^{(1)} + (2.3)^2.Y^{(2)} \ldots + [i.(i+1)]^2.Y^{(i)} = y^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1.2)^i.Y^{(1)} + (2.3)^i.Y^{(2)'} \ldots + [i.(i+1)]^i.Y^{(i)} = (-1)^i.y^{(i)};$$

On déterminera, au moyen de ces équations, les $i+1$, quantités $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, &c. ce qui ſera d'autant plus facile, que chaque inconnue étant, dans ces diverſes équations, multipliée par les puiſſances ſucceſſives d'un même nombre, il exiſte des méthodes très-ſimples pour avoir dans ce cas, les inconnues.

Les expreſſions de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, &c. ſe préſentent ſous une forme fractionnaire; mais puiſqu'elles ſont égales à la ſomme des fonctions entières $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, &c. multipliées par des conſtantes; on voit *à priori*, qu'elles doivent être, ainſi que y, des fonctions rationnelles & entières de

$$\mu, \sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi, \& \sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi.$$

Le nombre des quantités $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, &c. eſt fini, toutes les fois que l'équation du ſphéroïde eſt une fonction finie & rationnelle de $x^{\prime\prime}$, $y^{\prime\prime}$, $z^{\prime\prime}$. Dans ce cas, la formule (7) de l'*article précédent*, ſe termine, & le nombre de ſes termes eſt égal au degré de l'équation du ſphéroïde, augmenté de deux unités. Si cette équation étoit telle que l'on eût $y = Y^{(i)}$; la valeur de V relative à l'excès du ſphéroïde ſur la ſphère dont le rayon eſt a, ou, ce qui revient au même, à une couche ſphérique dont le rayon eſt a, & l'épaiſſeur $\alpha a y$, ſeroit $\frac{4\alpha\pi.a^{i+3}}{(2i+1).r^{i+1}}.Y^{(i)}$; cette valeur ſeroit par conſéquent proportionnelle à y, & il eſt viſible que ce n'eſt que dans ce cas, que cette proportionnalité peut avoir lieu.

Lorſque la ſurface du ſphéroïde eſt du ſecond ordre, on

peut, en déterminant convenablement l'origine des coordonnées, réduire ſon équation à cette forme $y = Y^{(2)}$; ainſi la valeur de V, relative à l'excès de ce ſphéroïde ſur une ſphère dont le rayon eſt a, eſt proportionnelle à l'excès du rayon du ſphéroïde ſur celui de la ſphère.

X V.

Supposons maintenant le point attiré, dans l'intérieur du ſphéroïde; nous aurons par l'*article XII*,

$$V = 2\pi . a^2 - \tfrac{2}{3}\pi . r^2 + v^{(0)} + v^{(1)} . r + v^{(2)} . r^2 + v^{(3)} . r^3 + \&c.$$

$v^{(i)}$ étant égal à $\int \frac{Q^{(i)}}{R^{i-1}} . \partial R . \partial \varpi' . \partial \theta' . \text{ſin.}\, \theta'$, & cette valeur étant relative à une couche dont la ſurface intérieure eſt ſphérique & du rayon a, & dont le rayon de la ſurface extérieure eſt R'; en ſorte que ſi l'on fait $R' = a(1 + \alpha y')$, y' étant une fonction de ϖ' & de θ', ſemblable à celle de y en ϖ & θ, on aura aux quantités près de l'ordre α^2,

$$v^{(i)} = \frac{\alpha}{a^{i-2}} . \int y' . Q^{(i)} . \partial \varpi' . \partial \theta' . \text{ſin.}\, \theta'.$$

Maintenant on a par l'*article XIII*, relativement aux points extérieurs,

$$V = \tfrac{4}{3} . \pi . \frac{a^3}{r} + \frac{U'^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \&c.$$

& il eſt clair que $\frac{4}{3}\pi . \frac{a^3}{r}$ étant la valeur de V, relative à une ſphère dont le rayon eſt a; la partie $\frac{U'^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \&c.$ de l'expreſſion précédente de V, eſt relative à une couche dont le rayon intérieur eſt a, & dont le rayon extérieur eſt $a . (1 + \alpha y)$. Or on a, par l'*article IX*,

$$U^{(i)} = \int R^{i+2} . \partial R . Q^{(i)} . \partial \varpi' . \partial \theta' . \text{ſin.}\, \theta';$$

ainſi, pour que cette valeur ſoit uniquement relative à la couche dont nous venons de parler, il faut qu'en ne prenant l'intégrale relative à R, que depuis $R = 0$, juſqu'à $R = a$, on ait $U^{(i)} = 0$. On aura la partie de $U^{(i)}$ qui dépend de l'intégrale priſe depuis $R = a$, juſqu'à $R = R'$ ou $R = a(1 + \alpha y')$, en faiſant dans cette expreſſion, $R = a$, & $\partial R = \alpha a y'$; d'où l'on tire

$$U^{(i)} = \alpha a^{i+3} \int y' . Q^{(i)} \partial \varpi' . \partial \theta' . \text{ſin. } \theta' :$$

partant,

$$v^{(i)} = \frac{U^{(i)}}{a^{2i+1}};$$

mais on a par l'*article XIII*, $U^{(i)} = \frac{4 \alpha \pi . a^{i+3}}{2i+1} Y^{(i)}$; donc

$$v^{(i)} = \frac{4 \alpha \pi}{(2i+1) . a^{i-2}} . Y^{(i)}.$$

la valeur de V, relative à un point intérieur, ſera ainſi,

$$\left. \begin{array}{l} V = 2\pi . a^2 - \frac{2}{3}\pi . r^2 + 4 \alpha \pi . a^2 \times \\ \left[Y^{(0)} + \frac{r}{3a} . Y^{(1)} + \frac{r^2}{5a^2} . Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a^3} . Y^{(3)} + \&c.\right] \end{array} \right\} ; (8).$$

X V I.

CETTE formule & la formule (7) de l'*article XIII*, embraſſent toute la théorie des attractions des ſphéroïdes homogènes; il eſt facile d'en tirer celle des attractions des ſphéroïdes hétérogènes, quelle que ſoit la loi de la variation de la figure & de la denſité de leurs couches. Pour cela, ſoit $a.(1 + \alpha y)$ le rayon d'une des couches d'un ſphéroïde hétérogène; & ſuppoſons que y ſoit ſous cette forme $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.$ les coéfficiens qui entrent dans les quantités $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, &c. étant des fonctions de a, & par conſéquent variables d'une couche à l'autre. Si l'on prend la différentielle en a, de la valeur de V donnée par la formule (7) de l'*article XIII*, & que l'on nomme ρ, la denſité de la couche dont le rayon eſt $a.(1 + \alpha y)$,

ρ étant

ρ étant une fonction de a; la valeur de V correspondante à cette couche, sera pour un point extérieur,

$$\left.\begin{array}{r} \frac{4\pi}{3r}\,\rho\,\partial.a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r}.\rho\times \\ \partial.[a^3.Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2}.Y^{(2)} + \&c.] \end{array}\right\};$$

cette valeur sera donc relativement au sphéroïde entier,

$$\left.\begin{array}{r} V = \frac{4\pi}{3r}.\int\rho\,\partial.a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r}\times \\ \int\rho\partial.[a^3.Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2}.Y^{(2)} + \frac{a^6}{7r^3}.Y^{(3)} + \&c.] \end{array}\right\};(9).$$

les intégrales étant prises depuis $a = 0$, jusqu'à la valeur de a, qui a lieu à la surface du sphéroïde, & que nous désignerons par a.

Pour avoir la valeur de V relative à un point intérieur, on déterminera d'abord la partie de cette valeur qui est relative à toutes les couches dans l'intérieur desquelles ce point se trouve; on lui ajoutera ensuite l'autre partie de cette valeur, qui est relative à toutes les couches auxquelles ce point est extérieur.

On aura la première de ces deux parties, en différenciant la formule (8), par rapport à a; en multipliant ensuite cette différentielle par ρ, & en en prenant l'intégrale depuis $a = a$ jusqu'à $a =$ a, a étant la valeur de a, relative à la couche sur laquelle se trouve le point attiré. On aura ainsi pour cette première partie de V,

$$\left.\begin{array}{r} 2\pi.\int\rho\partial.a^2 + 4\alpha\pi\times \\ \int\rho\partial.[a^2.Y^{(0)} + \frac{a.r}{3}.Y^{(1)} + \frac{r^2}{5}.Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a}.Y^{(3)} + \&c.] \end{array}\right\}.$$

La seconde partie de V, sera par ce qui précède

$$\frac{4\pi}{3r}.\int\rho\partial.a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r}.\int\rho\,\partial.[a^3.Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r}.Y^{(1)} + \&c.];$$

ces dernières intégrales étant priſes depuis $a = 0$ juſqu'à $a = a$. On aura donc pour la valeur entière de V, relative à un point intérieur

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} V = 2\pi . \int \rho \partial . a^2 + 1 \alpha \pi \times \\ \int \rho \partial . [a^2 . Y^{(0)} + \frac{a.r}{3} . Y^{(1)} + \frac{r^2}{5} . Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a} . Y^{(3)} + \&c.] \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} + \frac{4\pi}{3r} . \int \rho \partial . a^3 + \frac{3\alpha\pi}{r} \times \\ \int \rho \partial . [a^3 . Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2} . Y^{(2)} + \&c.] \end{array}\right\} \end{array}\right\} ; (10)$$

les deux premières intégrales étant priſes depuis $a = a$ juſqu'à $a = \mathrm{a}$, & les deux dernières étant priſes depuis $a = 0$ juſqu'à $a = a$. Il faut de plus après les intégrations, ſubſtituer a au lieu de r, dans les termes multipliés par α, & $\frac{1 - \alpha y}{a}$ au lieu de $\frac{1}{r}$, dans le terme $\frac{4\pi}{3r} . \int \rho \partial . a^3$.

QUATRIÈME SECTION.

De la figure des Planètes.

XVII.

L'OBSERVATION nous apprend que les Planètes ſont des ſphéroïdes très-peu différens de la ſphère, & l'analogie nous porte à penſer que, ſemblables à la Terre, elles ſont recouvertes, au moins en partie, d'un fluide en équilibre: ce ſont les conditions de cet équilibre, qui déterminent leurs figures, & par cette raiſon nous allons rappeler ici l'équation générale de l'équilibre d'une maſſe fluide ſollicitée par des forces quelconques.

Si l'on nomme ρ la denſité d'une molécule fluide; Π la preſſion qu'elle éprouve; F, $F^{\prime}$, $F^{\prime\prime}$, &c. les forces dont elle eſt animée; ∂f, $\partial f^{\prime}$, $\partial f^{\prime\prime}$, &c. les élémens des directions de ces forces; l'équation générale de l'équilibre de la maſſe fluide, ſera, comme l'on ſait,

$$\frac{\partial \Pi}{\rho} = F . \partial f + F^{\prime} . \partial f^{\prime} + F^{\prime\prime} . \partial f^{\prime\prime} + \&c.$$

Suppoſons que le ſeçond membre de cette équation ſoit une différence exacte; Π ſera néceſſairement fonction de ρ; ainſi relativement aux couches de denſité conſtante, on aura $\partial \Pi = 0$, & par conſéquent

$$0 = F.\partial f + F^{I}.\partial f^{I} + F^{II}.\partial f^{II} + \&c.$$

équation qui indique que la réſultante de toutes les forces F, F^{I}, F^{II}, &c. eſt perpendiculaire à la ſurface de ces couches, en ſorte qu'elles ſont en même temps *couches de niveau.* Π étant nul à la ſurface extérieure, ρ doit y être conſtant, & la réſultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de cette ſurface, lui eſt perpendiculaire; cette réſultante eſt ce que l'on nomme *peſanteur.* Les conditions générales de l'équilibre d'une maſſe fluide, ſont donc, 1.° que la direction de la peſanteur ſoit perpendiculaire à chaque point de ſa ſurface extérieure; 2.° que dans l'intérieur de la maſſe, les directions de la peſanteur de chaque molécule, ſoient perpendiculaires à la ſurface des couches de denſité conſtante. Comme on peut dans l'intérieur d'une maſſe homogène, prendre telles couches que l'on veut, pour couches de denſité conſtante; la ſeconde des deux équations précédentes de l'équilibre, eſt toujours ſatisfaite, & il ſuffit pour l'équilibre, que la première ſoit remplie, c'eſt-à-dire, que la réſultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de la ſurface extérieure, ſoit perpendiculaire à cette ſurface.

Relativement aux Planètes, les forces F, F^{I}, F^{II}, &c. ſont produites par l'attraction de leurs molécules, par la force centrifuge dûe à leur mouvement de rotation, & par l'attraction de corps étrangers. Il eſt facile de s'aſſurer que dans ce cas, la différence $F.\partial f + F^{I}.\partial f^{I} +$ &c. eſt exacte; mais on le verra clairement par l'analyſe que nous allons faire de ces différentes forces, en déterminant la partie de l'intégrale $\int (F.\partial f + F^{I}.\partial f^{I} + \&c.)$ qui eſt relative à chacune d'elles.

Si l'on nomme ∂M une molécule quelconque du ſphéroïde, & f ſa diſtance à la molécule attirée, ſon action ſur cette dernière molécule ſera $\frac{\partial M}{f^2}$; en multipliant cette action par l'élément de ſa direction, qui eſt $-\partial f$, puiſqu'elle tend à diminuer f; on aura relativement à l'action de la molécule ∂M, $\int F \partial f = \frac{\partial M}{f}$; d'où il ſuit que la partie de l'intégrale $\int (F.\partial f + F^1.\partial f^1 + \&c.)$ qui dépend de l'attraction des molécules du ſphéroïde, eſt égale à la ſomme de toutes ces molécules diviſées par leurs diſtances reſpectives à la molécule attirée: nous repréſenterons cette ſomme par V, comme nous l'avons fait précédemment.

Dans la théorie de la figure des Planètes, on ne ſe propoſe point de déterminer leur équilibre dans l'eſpace abſolu, mais ſeulement l'équilibre de toutes leurs parties autour de leurs centres de gravité; il faut donc tranſporter en ſens contraire à la molécule attirée, toutes les forces dont ce centre eſt animé en vertu de l'action réciproque de toutes les parties du ſphéroïde; mais on ſait que par la propriété de ce centre, la réſultante de toutes ces actions ſur ce point, eſt nulle; il n'y a donc rien à ajouter à V, pour avoir l'effet total de l'attraction du ſphéroïde ſur la molécule attirée.

Pour déterminer l'effet de la force centrifuge, nous ſuppoſerons la poſition de la molécule, déterminée par les trois coordonnées x^{11}, y^{11} & z^{11}, dont nous fixerons l'origine au centre même de gravité du ſphéroïde; nous ſuppoſerons enſuite que l'axe des x^{11} eſt l'axe de rotation, & que g exprime la force centrifuge dûe à la vîteſſe de rotation, à la diſtance 1 de l'axe. Cette force ſera nulle dans le ſens des x^{11}, & égale à gy^{11} & gz^{11} dans le ſens des y^{11} & des z^{11}; en multipliant donc ces deux dernières forces, reſpectivement par les élémens ∂y^{11} & ∂z^{11} de leurs directions; on aura $\frac{1}{2} g.(y^{11^2} + z^{11^2})$, pour la partie de l'intégrale $\int (F \partial f + F^1 \partial f^1 + \&c.)$ qui eſt dûe à la force centrifuge du mouvement de rotation.

Si l'on nomme comme ci-dessus, r la distance de la molécule attirée au centre de gravité du sphéroïde; θ, l'angle que forme le rayon r avec l'axe des $x^{\prime\prime}$; & ϖ, l'angle que forme le plan qui passe par l'axe des $x^{\prime\prime}$ & par cette molécule, avec le plan des $x^{\prime\prime}$ & des $y^{\prime\prime}$; enfin si l'on fait $\cos.\theta = \mu$, on aura

$$x^{\prime\prime} = r.\mu;\ y^{\prime\prime} = r.\sqrt{(1-\mu^2.)}\cos.\varpi;\ z^{\prime\prime} = r.\sqrt{(1-\mu^2.)}\sin.\varpi;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}g.(y^{\prime\prime 2} + z^{\prime\prime 2}) = \frac{1}{2}g.r^2.(1-\mu^2).$$

Nous mettrons cette dernière quantité sous la forme suivante, $\frac{1}{3}g.r^2 - \frac{1}{2}g.r^2.(\mu^2 - \frac{1}{3})$, pour assimiler ses termes à ceux de V, c'est-à-dire, pour leur donner la propriété de satisfaire à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left[\frac{\partial(1-\mu\mu).(\frac{\partial P}{\partial\mu})}{\partial\mu}\right] + \frac{(\frac{\partial\partial P}{\partial\varpi^2})}{1-\mu\mu} + i.(i+1).P,$$

dans laquelle P est un terme quelconque, & i l'exposant de sa plus haute puissance en μ; car il est clair que chacun des deux termes $\frac{1}{3}gr^2$ & $-\frac{1}{2}gr^2.(\mu^2 - \frac{1}{3})$, satisfait à l'équation précédente. Il nous reste présentement à déterminer la partie de l'intégrale

$$\int(F.\partial f + F^1.\partial f^1 + \text{\&c.})$$

qui résulte de l'action des corps étrangers.

Soit S la masse d'un de ces corps; f, sa distance à la molécule attirée; & s, sa distance au centre de gravité du sphéroïde. Son attraction sur la molécule sera $\frac{S}{f^2}$; en la multipliant par l'élément $-\partial f$ de sa direction, & en

l'intégrant ensuite, on aura $\frac{S}{f}$. Ce n'est pas la partie entière de l'intégrale $\int(F\,\partial f + F^{\text{I}}.\partial f^{\text{I}} + \&c.)$ dûe à l'action de S; il faut encore transporter en sens contraire à la molécule, l'action de ce corps sur le centre de gravité du sphéroïde : pour cela, nommons v, l'angle que forme s, avec l'axe des x^{II}; & ψ, l'angle que forme le plan qui passe par cet axe & par le corps S, avec le plan des x^{II} & des y^{II}; l'action $\frac{S}{s^2}$ de ce corps, sur le centre de gravité du sphéroïde, décomposée parallèlement aux axes des x^{II}, des y^{II} & des z^{II}, produira les trois forces suivantes,

$$\frac{S}{s^3}\,.\,(s\,.\,\text{cos}.\,v - x^{\text{II}});$$

$$\frac{S}{s^3}\,.\,(s\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{cos}.\,\psi - y^{\text{II}});$$

$$\frac{S}{s^3}\,.\,(s\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{sin}.\,\psi - z^{\text{II}}).$$

En les transportant en sens contraire à la molécule attirée, ce qui revient à les faire précéder du signe —, en les multipliant ensuite respectivement par les élémens ∂x^{II}, ∂y^{II}, & ∂z^{II} de leurs directions, & en les intégrant; la somme de ces intégrales sera

$$-\frac{S}{s^2}\,.\,(x^{\text{II}}\,.\,\text{cos}.\,v + y^{\text{II}}\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{cos}.\,\psi + z^{\text{II}}\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{sin}.\,\psi)$$
$$+\frac{S}{2s^3}\,.\,(x^{\text{II}\,2} + y^{\text{II}\,2} + z^{\text{II}\,2}) + \text{const.}$$

La partie entière de l'intégrale $\int(F.\partial f + F^{\text{I}}.\partial f^{\text{I}} + \&c.)$ dûe à l'action du corps S, sera donc

$$\frac{S}{f} - \frac{S}{s^2}\,.\,(x^{\text{II}}\,.\,\text{cos}.\,v + y^{\text{II}}\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{cos}.\,\psi + z^{\text{II}}\,.\,\text{sin}.\,v\,.\,\text{sin}.\,\psi)$$
$$+\frac{S}{2s^3}\,.\,(x^{\text{II}\,2} + y^{\text{II}\,2} + z^{\text{II}\,2}) + \text{const},$$

& comme cette quantité doit être nulle par rapport au centre de gravité du sphéroïde, que nous supposons immobile; &

que, relativement à ce point, f devient s, & x^{II}, y^{II} & z^{II}, sont nuls; on a, const. $= -\frac{S}{s}$.

Maintenant f est égal à

$$\sqrt{[(s.\text{cos}.\nu - x^{II})^2 + (s.\text{sin}.\nu.\text{cos}.\psi - y^{II})^2 + (s.\text{sin}.\nu.\text{sin}.\psi - z^{II})^2]},$$

ce qui donne en substituant pour x^{II}, y^{II} & z^{II}, leurs valeurs,

$$\frac{S}{f} = \frac{S}{\sqrt{[s^2 - 2sr.(\text{cos}.\theta.\text{cos}.\nu + \text{sin}.\theta.\text{sin}.\nu.\text{cos}.(\varpi - \psi)) + r^2]}};$$

Si l'on réduit cette quantité dans une suite descendante par rapport aux puissances de s, & que l'on représente cette suite par la suivante,

$$\frac{S}{s}.[P^{(0)} + \frac{r}{s}.P^{(1)} + \frac{r^2}{s^2}.P^{(2)} + \&c.];$$

Il est aisé de voir par l'*article X*, qu'en faisant

$$\text{cos}.\theta.\text{cos}.\nu + \text{sin}.\theta.\text{sin}.\nu.\text{cos}.(\varpi - \psi) = \delta$$

on aura généralement

$$P^{(i)} = \frac{1.3.5.\ldots\ldots(2i-1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots i} \times$$

$$.[\delta^i - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)}.\delta^{i-2} + \frac{i.(i-1).(i-2).(i-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)}.\delta^{i-4} - \&c.]$$

Il résulte d'ailleurs de l'*article IX*, que l'on a

$$o = \left\{\frac{\partial(1-\mu\mu).[\frac{\partial P^{(i)}}{\partial\mu}]}{\partial\mu}\right\} + \frac{[\frac{\partial\partial P^{(i)}}{\partial\varpi^2}]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).P^{(i)};$$

en sorte que les termes de la série précédente, ont cette propriété commune avec ceux de V. On aura, cela posé,

$$\frac{S}{f} - \frac{S}{s^2}.(x^{II}.\text{cos}.\nu + y^{II}.\text{sin}.\nu.\text{cos}.\psi + z^{II}.\text{sin}.\nu.\text{sin}.\psi) + \frac{S}{2s^3}.(x^{II2} + y^{II2} + z^{II2}) - \frac{S}{s}$$

$$= \frac{S.r^2}{2s^3} + \frac{S.r^2}{s^3}.[P^{(2)} + \frac{r}{s}.P^{(3)} + \frac{r^2}{s^2}.P^{(4)} + \&c.]$$

S'il y a d'autres corps S^I, S^{II}, &c. en désignant par s^I, ν^I,

ψ^{I}, P^{I}; s^{II}, v^{II}, ψ^{II}, P^{II}, &c. relativement à ces différens corps ; ce que nous avons nommé s, v, ψ, P, relativement au corps S; on aura les parties de l'intégrale

$$\int (F\partial f + F^{\mathrm{I}}.\partial f^{\mathrm{I}} + \&c.)$$

dûes à leur action, en marquant successivement d'un trait, de deux traits, &c. les lettres s, v, ψ, P, dans l'expression précédente de la partie de cette intégrale, qui est dûe à l'action du corps S.

Si l'on rassemble toutes les parties de cette intégrale, & que l'on fasse

$$\frac{g}{3} + \frac{S}{2s^3} + \frac{S^{\mathrm{I}}}{2s^{\mathrm{I}^3}} + \&c. = \alpha\, Z^{(0)}$$

$$\frac{S}{s^3}.P^{(2)} + \frac{S^{\mathrm{I}}}{s^{\mathrm{I}^3}}.P^{\mathrm{I}^{(2)}} + \&c. - \frac{g}{2}.(\mu^2 - \frac{1}{3}) = \alpha\, Z^{(2)}$$

$$\frac{S}{s^4}.P^{(3)} + \frac{S^{\mathrm{I}}}{s^{\mathrm{I}^4}}.P^{\mathrm{I}^{(3)}} + \&c. = \alpha\, Z^{(3)},$$

&c.

α étant un très-petit coéfficient, parce que la condition d'un sphéroïde très-peu différent de la sphère, exige que les forces perturbatrices soient très-petites ; on aura

$$\int (F.\partial f + F^{\mathrm{I}}.\partial f^{\mathrm{I}} + \&c.) = V + \alpha r^2.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \&c.]$$

$Z^{(i)}$ satisfaisant quel que soit i, à l'équation aux différences partielles

$$0 = \left\{ \frac{\partial (1-\mu\mu).[\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial \mu}]}{\partial \mu} \right\} + \frac{[\frac{\partial\partial Z^{(i)}}{\partial \varpi^2}]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).Z^{(i)}.$$

L'équation générale de l'équilibre, sera donc

$$\int \frac{\partial \Pi}{\rho} = V + \alpha r^2.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \&c.]; \quad (11)$$

Si les corps étrangers sont très-éloignés du sphéroïde, on pourra négliger les quantités $r^3.Z^{(3)}$, $r^4.Z^{(4)}$, &c. parce que les

les différens termes de ces quantités étant divisés respectivement par s^4, s^5, &c. s'^4, s'^5, &c. ces termes deviennent très-petits, lorsque s est très-grand par rapport à r. Ce cas a lieu pour les Planètes & pour leurs Satellites, à l'exception de Saturne dont l'anneau est trop près de sa surface, pour n'avoir pas égard aux termes précédens. Il faut donc dans la théorie de la figure de cette Planète, prolonger indéfiniment le second membre de la formule (11), qui a l'avantage de former une série toujours convergente ; & comme alors le nombre des corpuscules extérieurs au sphéroïde est infini, les valeurs de $Z^{(0)}$, $Z^{(2)}$, &c. seront données en intégrales définies, dépendantes de la figure & de la constitution intérieure de l'anneau de Saturne.

On peut observer que si le sphéroïde est formé d'un noyau solide de figure quelconque, recouvert par un fluide; l'équation (11) peut servir encore à déterminer la nature des couches de la partie fluide, en considérant que Π doit toujours être fonction de ρ, & qu'ainsi le second membre de cette équation doit être constant à la surface extérieure & à celle de toutes les couches de densité constante.

XVIII.

Considérons d'abord le cas où le sphéroïde est homogène. Nous avons vu dans l'*article précédent*, qu'il suffit alors que l'on ait à la surface extérieure,

$$V + \alpha r^2.(Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \&c.) = \text{const.}; \quad (12)$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de V, sa valeur donnée par la formule (7) de l'*article XIII*, on aura

$$\frac{4\pi.a^3}{3r} + \frac{4\alpha\pi.a^3}{r}.(Y^{(0)} + \frac{a}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^2}{5r^2}.Y^{(2)} + \&c.)$$
$$+ \alpha r^2.(Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \&c.) = \text{const.};$$

ce sera l'équation de la surface du sphéroïde, en y substituant au lieu de r, sa valeur à la surface $a.(1 + \alpha y)$, ou

$$a + \alpha a.(Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.)$$

On aura ainſi, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\text{conſt.} = \tfrac{4}{3}\pi . a^2 + \frac{8\alpha\pi . a^2}{3} . [Y^{(0)} - \tfrac{1}{5}.Y^{(2)} - \tfrac{2}{7}.Y^{(3)} - \tfrac{3}{9}.Y^{(4)} - \&c.]$$
$$+ \alpha a^2 . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + a.Z^{(3)} + a^2.Z^{(4)} + \&c.].$$

On peut ſuppoſer a tel que $\frac{4}{3}\pi . a^2 = \text{conſt.}$, & comme les fonctions $Y^{(i)}$ & $Z^{(i)}$ ſont ſemblables, c'eſt-à-dire, aſſujetties à la même équation aux différences partielles; leur comparaiſon dans l'équation précédente, donnera généralement, i étant plus grand que l'unité,

$$Y^{(i)} = \frac{3}{8\pi} . \frac{2i+1}{i-1} . a^{i-2} . Z^{(i)},$$

équation que l'on peut mettre ſous cette forme

$$Y^{(i)} = \frac{3}{4\pi} a^{i-2} . Z^{(i)} + \frac{9}{8a\pi} . \int r^{i-2} . \partial r . Z^{(i)},$$

l'intégrale étant priſe depuis $r = 0$, juſqu'à $r = a$.

On aura de plus $Y^{(0)} = -\frac{3}{8\pi} . Z^{(0)}$. De-là, il eſt facile de conclure que le rayon $a.(1 + \alpha y)$ du ſphéroïde, ſera donné par l'équation ſuivante

$$a.(1+\alpha y) = \left\{ \begin{array}{l} a - \frac{3\alpha a}{8\pi} . Z^{(0)} + \alpha a . Y^{(1)} \\ + \frac{3\alpha a}{4\pi} . [Z^{(2)} + a.Z^{(3)} + a^2 Z^{(4)} + \&c.] \\ + \frac{9\alpha}{8\pi} . \int \partial r [Z^{(2)} + r Z^{(3)} + r^2 Z^{(4)} + \&c.] \end{array} \right\}; \quad (13)$$

Cette équation peut être miſe ſous une forme finie, en obſervant que, par l'*article précédent*, on a

$$\alpha . [Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \&c.]$$
$$= -\tfrac{g}{2}.(\mu^2 - \tfrac{1}{3})$$
$$- \frac{S}{s.r^2} - \frac{S.\delta}{s^2.r} + \frac{S}{r^2.\sqrt{(s^2 - 2sr.\delta + r^2)}}$$
$$- \frac{S'}{s'.r^2} - \&c.$$
$$- \&c.$$

en ſorte que l'intégrale $\int \partial r . [Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + \&c.]$, eſt facile à déterminer par les méthodes connues.

L'équation précédente du ſphéroïde homogène en équilibre, renferme l'indéterminée a, & la fonction $Y^{(1)}$ qui devant ſatisfaire à l'équation aux différences partielles

$$o = \left\{ \frac{\partial (1-\mu\mu) \cdot \left[\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(1)}}{\partial \varpi^2} \right]}{1-\mu\mu} + 2 Y^{(1)},$$

eſt de cette forme

$$H.\mu + H^{\text{I}}.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi + H^{\text{II}}.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi;$$

H, H^{I}, H^{II}, étant des coéfficiens indéterminés. On déterminera ces conſtantes, par la condition que l'origine des coordonnées, d'où nous ſuppoſons partir les rayons du ſphéroïde, eſt à ſon centre de gravité; & par la maſſe M du ſphéroïde, que nous ſuppoſons connue. Ces données fourniſſent les quatre équations ſuivantes

$$o = \int y\mu.\partial\mu.\partial\varpi; \quad o = \int y.\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi;$$
$$o = \int y\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi; \tfrac{4}{3}\pi.a^3 - \alpha a^3.\int y\partial\mu\partial\varpi = M;$$

l'intégrale relative à μ, étant priſe depuis $\mu = 1$ juſqu'à $\mu = -1$, & l'intégrale relative à ϖ, étant priſe depuis $\varpi = 0$ juſqu'à $\varpi = 360^{d}$.

Pour exécuter ces intégrations, nous allons démontrer un théorème très-général, ſur les fonctions de la nature de $Y^{(i)}$.

« Si $Y^{(i)}$ & $U^{(i^{\text{I}})}$, ſont des fonctions rationnelles & entières de μ, $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{coſ.}\,\varpi$, & $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{ſin.}\,\varpi$, qui « ſatisfont aux deux équations ſuivantes, »

$$« o = \left\{ \frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2} \right]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).Y^{(i)};$$

$$« o = \left\{ \frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial U^{(i^{\text{I}})}}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial U^{(i^{\text{I}})}}{\partial \varpi^2} \right]}{1-\mu\mu} + i^{\text{I}}.(i^{\text{I}}+1).U^{(i^{\text{I}})};$$

» on aura généralement $\int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi = 0$; lorsque i » & i' seront des nombres entiers, positifs & différens entre » eux; les intégrales étant prises depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360^d$. »

Pour démontrer ce théorème, nous observerons qu'en vertu de la première des deux équations précédentes, on a

$$\int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi = -\frac{1}{i.(i+1)}.\int U^{(i')}.\left[\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}\right].\partial\mu.\partial\varpi$$
$$-\frac{1}{i.(i+1)}.\int U^{(i')}.\frac{\left(\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu}.\partial\mu.\partial\varpi;$$

or, on a en intégrant par parties, relativement à μ,

$$\int U^{(i')}.\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\}.\partial\mu = \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right].(1-\mu\mu).U^{(i')}$$
$$-Y^{(i)}.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial U^{(i')}}{\partial\mu}\right]$$
$$+\int Y^{(i)}.\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial U^{(i')}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\}.\partial\mu;$$

& il est clair que si l'on prend l'intégrale depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, le second membre de cette équation se réduit à son dernier terme. On a pareillement, en intégrant par parties, relativement à ϖ,

$$\int U^{(i')}.\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right].\partial\varpi = \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi}\right].U^{(i')}$$
$$-Y^{(i)}.\left[\frac{\partial U^{(i')}}{\partial\varpi}\right] + \int Y^{(i)}.\left[\frac{\partial\partial U^{(i')}}{\partial\varpi^2}\right].\partial\varpi,$$

& ce second membre se réduit encore à son dernier terme, lorsque l'intégrale est prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360^d$;

on aura donc ainsi

$$\int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi = -\frac{1}{i.(i+1)}\int Y^{(i)}.\partial\mu.\partial\varpi\times$$

$$.\left\{\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).[\frac{\partial U^{(i')}}{\partial\mu}]}{\partial\mu}\right\}+\frac{[\frac{\partial\partial U^{(i')}}{\partial\varpi^2}]}{1-\mu\mu}\right\}$$

d'où l'on tire, en vertu de la seconde des deux équations précédentes aux différences partielles,

$$\int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi = \frac{i'.(i'+1)}{i.(i+1)}.\int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi;$$

on aura donc, $0 = \int Y^{(i)}.U^{(i')}.\partial\mu.\partial\varpi$, lorsque i est différent de i'.

Les quantités μ, $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cos}.\varpi$, $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{sin}.\varpi$, étant comprises dans la forme $U^{(1)}$; si l'on substitue dans les trois équations

$$0 = \int y\mu.\partial\mu.\partial\varpi;$$
$$0 = \int y.\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cos}.\varpi;$$
$$0 = \int y.\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{sin}.\varpi;$$

au lieu de y, sa valeur $Y^{(0)}+Y^{(1)}+Y^{(2)}+$ &c, elles se réduisent par le théorème précédent, aux trois suivantes,

$$0 = \int Y^{(1)}.\mu.\partial\mu.\partial\varpi;$$
$$0 = \int Y^{(1)}.\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{cos}.\varpi;$$
$$0 = \int Y^{(1)}.\partial\mu.\partial\varpi.\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{sin}.\varpi;$$

d'où il est aisé de conclure $Y^{(1)} = 0$.

L'equation $\frac{4}{3}\pi.a - \alpha a^3.\int y\partial\mu\,\partial\varpi = M$, se réduit à celle-ci,

$$\frac{4}{3}\pi.a^3 - \alpha a^3.\int Y^{(0)}\partial\mu\,\partial\varpi = M;$$

en substituant donc au lieu de $Y^{(0)}$, sa valeur $-\frac{3}{8\pi}.Z^{(0)}$,

on aura

$$a = (1 + \frac{3\alpha Z^{(0)}}{8\pi}).\sqrt[3]{(\frac{3M}{4\pi})}.$$

XIX.

L'ÉQUATION (12) de l'*article précédent*, a non-seulement l'avantage de faire connoître la figure du ſphéroïde, mais encore celui de donner par ſa différenciation, la loi de la peſanteur à ſa ſurface; car il eſt viſible que le premier membre de cette équation, étant l'intégrale de la ſomme de toutes les forces dont chaque molécule eſt animée à la ſurface, multipliées par les élémens de leurs directions reſpectives; on aura la partie de la réſultante qui agit ſuivant le rayon r, en différenciant ce premier membre par rapport à r; ainſi en nommant p, la force dont une molécule de la ſurface eſt ſollicitée vers le centre du ſphéroïde, on aura

$$p = -(\frac{\partial V}{\partial r}) - \frac{\alpha}{\partial r}.\partial.(r^2 Z^{(0)} + r^2 Z^{(2)} + r^3.Z^{(3)} + \&c).$$

Si l'on ſubſtitue dans cette équation, au lieu de $-(\frac{\partial V}{\partial r})$, ſa valeur à la ſurface, $\frac{2}{3}\pi a + \frac{V}{2a}$, donnée par l'équation (6) de l'*article XIII;* & au lieu de V, ſa valeur donnée par l'équation (12); ſi l'on obſerve enſuite que nous avons ſuppoſé a, tel que la conſtante de cette dernière équation eſt égale à $\frac{4}{3}\pi.a^2$; on aura

$$\left.\begin{aligned} p = \tfrac{4}{3}\pi a - \tfrac{1}{2}\alpha a.\{Z^{(0)} + Z^{(2)} + a.Z^{(3)} + a^2.Z^{(4)} + \&c.\} \\ - \frac{\alpha}{\partial r}.\partial.\{r^2 Z^{(0)} + r^2.Z^{(2)} + r^3.Z^{(3)} + \&c.\} \end{aligned}\right\};(14)$$

r devant être changé en a, après les différenciations, dans ce ſecond membre qui par l'*article précédent*, peut toujours ſe réduire à une fonction finie.

p ne repréſente pas exactement la peſanteur, mais ſeulement la partie de cette force dirigée vers le centre du

ſphéroïde, en la ſuppoſant décompoſée en deux dont l'une ſoit perpendiculaire au rayon r, & dont l'autre p, ſoit dirigée ſuivant ce rayon. Le ſphéroïde différant très-peu de la ſphère, la première force ſera très-petite de l'ordre α; en la déſignant donc par $\alpha.\gamma$, la peſanteur ſera égale à $\sqrt{(p^2 + \alpha^2.\gamma^2)}$, quantité qui en négligeant les termes de l'ordre α^2, ſe réduit à p. Nous pouvons ainſi conſidérer p, comme exprimant la peſanteur à la ſurface du ſphéroïde, en ſorte que les équations (13) & (14) déterminant & la figure des ſphéroïdes homogènes, & la loi de la peſanteur à leur ſurface; elles renferment une théorie complète de ces ſphéroïdes, dans la ſuppoſition où ils diffèrent très-peu d'une ſphère.

Si les corps étrangers S, S', S'', &c. ſont nuls, & que le ſphéroïde ne ſoit par conſéquent ſollicité que par l'attraction de ſes molécules, & par la force centrifuge de ſon mouvement de rotation, ce qui eſt le cas de la Terre & de toutes les Planètes premières, à l'exception de Saturne; on trouvera en déſignant par φ, le rapport de la force centrifuge à la peſanteur à l'équateur, rapport qui eſt à très-peu-près égal à $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi}$,

$$a.(1 + \alpha y) = a.\{1 + \tfrac{1}{4}.\varphi - \tfrac{5}{4}.\varphi\mu^2\}$$

$$p = \tfrac{4}{3}\pi.a.\{1 - \tfrac{5}{4}.\varphi + \tfrac{5}{4}.\varphi.\mu^2\}$$

$$a = (1 + \tfrac{1}{6}.\varphi).\sqrt[3]{\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi}\right)};$$

le ſphéroïde eſt donc alors un ellipſoïde de révolution, ſur lequel les accroiſſemens de la peſanteur & les diminutions des rayons, en allant de l'équateur aux pôles, ſont proportionnels au carré du ſinus de la latitude, μ étant à très-peu-près égal à ce ſinus.

X X.

Les déterminations précédentes ſont données directement par l'analyſe, & indépendamment de toute hypothèſe;

l'équation (14) a de plus l'avantage d'être indépendante des séries, puisque nous en avons éliminé V & $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$, au moyen des équations (6) & (12) des *articles XIII* & *XVIII*; il n'en est pas ainsi de l'équation (13), & cela peut faire craindre qu'elle ne renferme pas toutes les figures d'équilibre dont le sphéroïde est susceptible : nous allons ainsi déterminer ces figures, directement & indépendamment des suites.

Supposons d'abord que le sphéroïde soit de révolution, & que son rayon soit $a.(1 + \alpha y)$, y étant une fonction de cos. θ ou de μ, & θ étant l'angle que forme ce rayon avec l'axe de révolution. Si l'on nomme f, une droite quelconque menée de l'extrêmité de ce rayon dans l'intérieur du sphéroïde ; p, le complément de l'angle que forme cette droite, avec le plan qui passe par le rayon $a.(1 + \alpha y)$ & par l'axe de révolution ; q, l'angle formé par la projection de f sur ce plan, & par le rayon ; enfin si l'on nomme V la somme de toutes les molécules du sphéroïde, divisées par leurs distances à la molécule placée à l'extrêmité du rayon $a.(1 + \alpha y)$; chaque molécule étant égale à $f^2 \partial f . \partial p . \partial q . \text{sin.}\, p$, on aura, comme dans l'*article II*, $V = \frac{1}{2} \int\int f^{\text{I}\,2}\, \partial p . \partial q . \text{sin.}\, p$;

f^{I} étant ce que devient f à la sortie du sphéroïde. Il faut maintenant déterminer f^{I} en fonction de p & de q.

Pour cela, nous observerons que si l'on nomme θ^{I} la valeur de θ, relative à ce point de sortie, & $a.(1 + \alpha y^{\text{I}})$, le rayon correspondant du sphéroïde, y^{I} étant une pareille fonction de cos. θ^{I} ou de μ^{I}, que y l'est de μ; il est facile de s'assurer par la trigonométrie, que le cosinus de l'angle formé par les deux droites f^{I}, & $a.(1 + \alpha y)$ est égal à sin. p . cos. q, & qu'ainsi dans le triangle rectiligne formé par les trois droites f^{I}, $a.(1 + \alpha y)$ & $a.(1 + \alpha y^{\text{I}})$, on a

$$a^2.(1 + \alpha y^{\text{I}})^2 = f^{\text{I}\,2} - 2 a f^{\text{I}}.(1 + \alpha y) . \text{sin.}\, p . \text{cof.}\, q + a^2.(1 + \alpha y)^2.$$

Cette

Cette équation donne pour f'^2 deux valeurs ; mais l'une d'elles étant de l'ordre α^2, elle est nulle lorsqu'on néglige les quantités de cet ordre, & l'autre devient

$$f'^2 = 4a^2 . \text{sin.} p^2 . \text{cos.} q^2 . (1 + 2\alpha y) + 4\alpha . a^2 . (y' - y),$$

ce qui donne

$$V = 2a^2 \int\int \partial p . \partial q . \text{sin.} p . [(1 + 2\alpha y) . \text{sin.} p^2 . \text{cos.} q^2 + \alpha(y' - y)].$$

Il est visible que les intégrales doivent être prises depuis p & q, égaux à zéro jusqu'à p & q, égaux à 180 degrés; on aura ainsi

$$V = \tfrac{4}{3}\pi . a^2 - \tfrac{4}{3}\alpha\pi . a^2 y + 2\alpha a^2 . \int\int \partial p . \partial q . y' . \text{sin.} p.$$

y' étant une fonction de cos. θ', il faut déterminer ce cosinus en fonction de p & de q; on pourra dans cette détermination, négliger les quantités de l'ordre α, puisque y' est déja multiplié par α; cela posé, on trouvera facilement

$$a . \text{cos.} \theta' = (a - f' . \text{sin.} p . \text{cos.} q) . \text{cos.} \theta + f' . \text{sin.} p . \text{sin.} q . \text{sin.} \theta;$$

d'où l'on tire en substituant pour f', sa valeur $2a . \text{sin.} p . \text{cos.} q$,

$$\mu' = \mu . \text{cos.} p^2 - \text{sin.} p^2 . \text{cos.} (2q + \theta).$$

On doit observer ici relativement à l'intégrale $\int\int y' . \partial p . \partial q . \text{sin.} p$ prise par rapport à q, depuis $2q = 0$ jusqu'à $2q = 360^d$, que le résultat seroit le même, si l'on prenoit cette intégrale depuis $2q = -\theta$ jusqu'à $2q = 360^d - \theta$; parce que les valeurs de μ', & par conséquent celles de y', sont les mêmes depuis $2q = -\theta$ jusqu'à $2q = 0$, que depuis $2q = 360^d - \theta$ jusqu'à $2q = 360^d$; en supposant donc $2q + \theta = q'$, ce qui donne

$$\mu' = \mu . \text{cos.} p^2 - \text{sin.} p^2 . \text{cos.} q',$$

on aura

$$V = \tfrac{4}{3}\pi . a^2 - \tfrac{4}{3}\alpha\pi . a^2 . y + \alpha a^2 . \int\int y' . \partial p . \partial q' . \text{sin.} p,$$

les intégrales étant prises depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^d$, & depuis $q^1 = 0$ jusqu'à $q^1 = 360^d$.

Maintenant, si l'on désigne par $a^2 . N$, l'intégrale de toutes les forces étrangères à l'attraction du sphéroïde, & multipliées par les élémens de leurs directions ; on aura par l'*article XVII* dans le cas de l'équilibre,

$$\text{const.} = V + a^2 . N;$$

& en substituant au lieu de V, sa valeur, on aura

$$\text{const.} = \frac{4}{3} \alpha \pi . y - \alpha \int\int y^1 \partial p . \partial q^1 . \text{sin.}\, p - N,$$

équation qui n'est visiblement que l'équation (12) de l'*article XVIII*, présentée sous une autre forme. Cette équation étant linéaire, il en résulte que si un nombre quelconque de rayons $a.(1 + \alpha y)$, $a.(1 + \alpha v)$, &c. y satisfont, le rayon $a.(1 + \alpha y + \alpha v +$ &c.$)$, y satisfera pareillement.

Supposons que les forces étrangères se réduisent à la force centrifuge dûe au mouvement de rotation du sphéroïde, & nommons g, cette force à la distance 1 de l'axe de rotation; nous aurons par l'*article XVII*, $N = \frac{g}{2} . (1 - \mu^2)$; l'équation de l'équilibre sera par conséquent

$$\text{const.} = \frac{4}{3} . \alpha \pi . y - \alpha . \int\int y^1 \partial p . \partial q^1 . \text{sin.}\, p - \frac{1}{2} g . (1 - \mu^2).$$

En la différenciant trois fois de suite relativement à μ, & en observant que $\left(\frac{\partial \mu^1}{\partial \mu}\right) = \text{cos.}\, p^2$, on aura

$$0 = \tfrac{4}{3} \pi . \left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mu^3}\right) - \int\int \partial p . \partial q^1 . \text{sin.}\, p . \text{cos.}\, p^6 . \left(\frac{\partial^3 y^1}{\partial \mu^{1\,3}}\right);$$

or, on a $\int\int \partial p . \partial q^1 . \text{sin.}\, p . \text{cos.}\, p^6 = \frac{4\pi}{7}$; on pourra donc mettre l'équation précédente sous cette forme

$$0 = \int\int \partial p . \partial q^1 . \text{sin.}\, p . \text{cos.}\, p^6 . \left[\tfrac{7}{3} . \left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mu^3}\right) - \left(\frac{\partial^3 y^1}{\partial \mu^{1\,3}}\right)\right].$$

Cette équation doit avoir lieu quel que ſoit μ, en ſorte que μ doit diſparoître après les intégrations; or, il eſt clair que parmi toutes les valeurs de μ compriſes depuis $\mu = 1$ juſqu'à $\mu = -1$, il en exiſte une que nous déſignerons par h, & qui eſt telle qu'abſtraction faite du ſigne, aucune des valeurs de $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mu^3}\right)$ ne ſurpaſſera pas celle qui eſt relative à h; en déſignant donc par H, cette dernière valeur, on aura encore

$$o = \int\int \partial p . \partial q' . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p^6 . \left[\tfrac{7}{3} H - \left(\frac{\partial^3 y'}{\partial \mu'^3}\right)\right].$$

La quantité $\frac{7}{3} H - \left(\frac{\partial^3 y'}{\partial \mu'^3}\right)$, eſt évidemment du même ſigne que H, & le facteur ſin. p . coſ. p^6 eſt conſtamment poſitif dans toute l'étendue de l'intégrale; les élémens de cette intégrale ſont donc tous du même ſigne que H; d'où il ſuit que l'intégrale entière ne peut être nulle, à moins que H ne le ſoit lui-même, ce qui exige que l'on ait généralement, $o = \left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mu'^3}\right)$; d'où l'on tire en intégrant,

$$y = l + m . \mu + n \mu^2;$$

l, m, n, étant des conſtantes arbitraires.

Si l'on fixe l'origine des rayons au milieu de l'axe de révolution, & que l'on prenne pour a, la moitié de cet axe; y ſera nul, lorſque $\mu = 1$, & lorſque $\mu = -1$, ce qui donne $m = o$ & $n = - l$; y devient ainſi, $l . (1 - \mu^2)$. En ſubſtituant cette valeur dans l'équation de l'équilibre

$$\text{conſt.} = \tfrac{4}{3} \alpha \pi . y - \alpha \int\int y' \partial p . \partial q' . \text{ſin.} p - \tfrac{1}{2} g . (1 - \mu^2);$$

on trouvera, $\alpha l = \frac{15 . g}{16 \pi} = \frac{5}{4} . \varphi$, φ étant le rapport de la force centrifuge à la peſanteur à l'équateur, rapport qui eſt à très-peu-près égal à $\frac{3g}{4\pi}$; le rayon du ſphéroïde ſera

donc $a \, . \, [1 + \frac{5\varphi}{4} \, . \, (1 - \mu^2)]$; d'où il ſuit que ce ſphéroïde eſt un ellipſoïde de révolution, ce qui eſt conforme à ce qui précède.

Nous voilà ainſi parvenus à déterminer directement & indépendamment des ſuites, la figure d'un ſphéroïde homogène de révolution qui tourne ſur ſon axe, & à faire voir qu'elle ne peut être que celle d'un ellipſoïde qui ſe réduit à une ſphère lorſque $\varphi = 0$; en ſorte que la ſphère eſt la ſeule figure de révolution qui ſatisfaſſe à l'équilibre d'une maſſe fluide homogène immobile.

De-là on peut généralement conclure que ſi la maſſe fluide eſt ſollicitée par des forces quelconques très-petites, il n'y a qu'une ſeule figure poſſible d'équilibre, ou, ce qui revient au même, il n'y a qu'un ſeul rayon $a \, . \, (1 + \alpha y)$ qui puiſſe ſatisfaire à l'équation de l'équilibre,

$$\text{conſt.} = \tfrac{4}{3} \alpha \pi \, . \, y - \alpha \int\int y^{\text{I}} \partial p \, . \, \partial q^{\text{I}} \, . \, \text{ſin.} \, p - N,$$

y étant fonction de θ & de la longitude ϖ, & y^{I} étant ce que devient y, lorſqu'on y change θ & ϖ en θ^{I} & ϖ^{I}.

Suppoſons, en effet, qu'il y ait deux rayons différens $a \, . \, (1 + \alpha y)$, & $a \, . \, (1 + \alpha y + \alpha v)$, qui ſatisfaſſent à cette équation ; on aura,

$$\text{conſt.} = \tfrac{4}{3} \, . \, \alpha \pi \, . \, (y + v) - \alpha . \int\int . (y^{\text{I}} + v^{\text{I}}) \, . \, \partial p \, . \, \partial q^{\text{I}} \, . \, \text{ſin.} \, p - N.$$

En retranchant l'équation précédente de celle-ci, on aura,

$$\text{conſt.} = \tfrac{4}{3} \pi \, . \, v - \int\int v^{\text{I}} \, . \, \partial p \, . \, \partial q^{\text{I}} \, . \, \text{ſin.} \, p.$$

Cette équation eſt viſiblement celle d'un ſphéroïde homogène en équilibre, dont le rayon eſt $a \, . \, (1 + \alpha v)$, & qui n'eſt ſollicité par aucune force étrangère à l'attraction de ſes molécules. L'angle ϖ diſparoiſſant de lui-même, dans cette équation ; le rayon $a \, . \, (1 + \alpha v)$ y ſatisferoit encore en y changeant ϖ ſucceſſivement dans $\varpi + \partial \varpi, \varpi + 2 \partial \varpi$, &c. d'où il ſuit que ſi l'on nomme v_1, v_2, &c. ce que devient v,

en vertu de ces changemens, le rayon

$$a.(1 + \alpha v.\partial\varpi + \alpha v_1.\partial\varpi + \alpha v_2.\partial\varpi + \&c.)$$

ou $a.(1 + \alpha\int v\partial\varpi)$ satisfera à l'équation précédente. Si l'on prend l'intégrale $\int v\,\partial\,\varpi$, depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360^d$, le rayon $a.(1 + \alpha.\int v\,\partial\,\varpi)$ devient celui d'un sphéroïde de révolution qui, par ce qui précède, ne peut être qu'une sphère ; voyons la condition qui en résulte pour v.

Supposons que a soit la plus courte distance du centre de gravité du sphéroïde dont le rayon est $a.(1 + \alpha v)$, à la surface, & que le pôle où l'origine de l'angle θ soit à l'extrémité de a; v sera nul au pôle, & positif par-tout ailleurs; il en sera de même de l'intégrale $\int v\partial\varpi$. Maintenant, puisque le centre de gravité du sphéroïde dont le rayon est $a.(1 + \alpha v)$, est au centre de la sphère dont le rayon est a, ce point sera pareillement le centre de gravité du sphéroïde dont le rayon est $a.(1 + \alpha\int v\,\partial\,\varpi)$; les différens rayons menés de ce centre à la surface de ce dernier sphéroïde, sont donc inégaux entr'eux, si v n'est pas nul ; il ne peut donc être une sphère que dans le cas où $v = 0$; ainsi, nous sommes assurés qu'un sphéroïde homogène, sollicité par des forces quelconques très-petites, ne peut être en équilibre que d'une seule manière, & que, par conséquent, l'équation (13) de l'*article XVIII* épuise toutes les figures possibles d'équilibre.

XXI.

L'ANALYSE précédente suppose que N est indépendant de la figure du sphéroïde ; c'est ce qui a lieu lorsque les forces étrangères à l'action des molécules fluides, sont dûes à la force centrifuge de son mouvement de rotation & à l'attraction des corps extérieurs au sphéroïde ; mais si l'on conçoit au centre du sphéroïde, une force finie proportionnelle à une fonction de la distance, son action sur les molécules placées à la surface du fluide, dépendra de la

nature de cette ſurface, & par conſéquent, N dépendra de y. Ce cas eſt celui d'une maſſe fluide homogène, qui recouvre une ſphère d'une denſité différente de celle du fluide; car on peut conſidérer cette ſphère comme étant de même denſité que le fluide, & placer à ſon centre une force réciproque au carré des diſtances, de manière que ſi l'on nomme c le rayon de la ſphère, & ρ ſa denſité, celle du fluide étant priſe pour unité; cette force à la diſtance r ſoit égale à $\frac{4}{3}\pi . \frac{c^3.(\rho-1)}{r^2}$. En la multipliant par l'élément $-\partial r$ de ſa direction, l'intégrale du produit ſera $\frac{4}{3}\pi . \frac{c^3.(\rho-1)}{r}$, quantité qu'il faut ajouter à $a^2 . N$; & comme à la ſurface on a $r = a.(1 + \alpha y)$, il faudra dans l'équation de l'équilibre de l'*article précédent*, ajouter à N, $\frac{4}{3}\pi . \frac{(\rho-1).c^3}{a^3} . (1 - \alpha y)$. Cette équation deviendra

$$\text{conſt.} = \frac{4\alpha}{3}\pi . \left[1 + (\rho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right] . y - \alpha . \int\!\!\int y' \partial p . \partial q' . \text{ſin.} p - N.$$

Si l'on déſigne par $a.(1 + \alpha y + \alpha v)$, le rayon d'un ſecond ſphéroïde en équilibre; on aura pour déterminer v, l'équation

$$\text{conſt.} = \frac{4}{3}\pi . \left[1 + (\rho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right] . v - \int\!\!\int v' . \partial p . \partial q' . \text{ſin.} p,$$

équation qui eſt celle de l'équilibre du ſphéroïde, en le ſuppoſant immobile, & en faiſant abſtraction de toute force extérieure.

Si le ſphéroïde eſt de révolution, v ſera uniquement fonction de coſ. θ ou de μ; or, on peut dans ce cas, le déterminer par l'analyſe de l'*article précédent;* car ſi l'on différencie cette équation, $i + 1$ fois de ſuite, relativement à μ, on aura

$$0 = \frac{4}{3}\pi . \left[1 + (\rho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right] . \left(\frac{\partial^{i+1} . v}{\partial \mu^{i+1}}\right)$$

$$- \int\!\!\int \left(\frac{\partial^{i+2} . v'}{\partial \mu'^{i+1}}\right) . \partial p . \partial q' . \text{ſin.} p . \text{coſ.} p^{2i+2}.$$

Mais on a $\int\int \partial p . \partial q' . \sin. p . \cos. p^{2i+2} = \frac{4\pi}{2i+3}$; l'équation précédente peut donc être mise sous cette forme,

$$0 = \int\int \partial p . \partial q' . \sin. p . \cos. p^{2i+2} \times$$

$$\left\{ \frac{2i+3}{3} . \left[1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3} \right] . \left(\frac{\partial^{i+1} . v}{\partial \mu^{i+1}} \right) - \left(\frac{\partial^{i+1} . v'}{\partial \mu'^{i+1}} \right) \right\}.$$

On peut toujours prendre i, tel qu'abstraction faite du signe, on ait $\frac{2i+3}{3} . \left[1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3} \right] > 1$; en supposant donc que i soit le plus petit nombre qui rende cette quantité plus grande que l'unité, on s'assurera comme dans l'*article précédent*, que cette équation ne peut être satisfaite, à moins qu'on ne suppose $\left(\frac{\partial^{i+1} . v}{\partial \mu^{i+1}} \right) = 0$, ce qui donne

$$v = \mu^i + A . \mu^{i-1} + B . \mu^{i+2} + \&c.$$

En substituant dans l'équation précédente de l'équilibre, au lieu de v, cette valeur, & au lieu de v',

$$\mu'^i + A . \mu'^{i-1} + B . \mu'^{i-2} + \&c.$$

μ' étant, par l'*article précédent*, égal à $\mu . \cos. p^2 - \sin. p^2 . \cos. q'$; on trouvera d'abord $1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3} = \frac{3}{2i+1}$, où $i = \frac{2a^3 + (1-\rho) . c^3}{2a^3 - 2 . (1-\rho) . c^3}$, ce qui suppose ϱ égal ou moindre que l'unité: ainsi, toutes les fois que a, c & ϱ ne seront pas tels que le second membre de cette équation soit un nombre entier positif, le fluide ne pourra être en équilibre que d'une seule manière. On aura ensuite $A = 0$, $B = - \frac{i . (i-1)}{2 . (2i-1)}$, &c. en sorte que

$$v = \mu^i - \frac{i . (i-1)}{2 . (i-1)} . \mu^{i-2} + \frac{i . (i-1) . (i-2) . (i-3)}{2 . 4 . (2i-1) . (2i-3)} . \mu^{i-4} - \&c.$$

Il y a donc généralement deux figures d'équilibre, puiſque αv eſt ſuſceptible de deux valeurs, dont l'une eſt donnée par la ſuppoſition de $\alpha = 0$, & dont l'autre eſt donnée par la ſuppoſition de v, égal à la fonction précédente de μ.

Si le ſphéroïde eſt immobile, & n'eſt ſollicité par aucune force étrangère à l'action de ſes molécules, la première de ces deux figures eſt une ſphère, & la ſeconde a pour méridien une courbe de l'ordre i. On doit cependant obſerver que ces deux figures coïncident lorſque $i = 1$, parce que le rayon $a.(1 + \alpha\mu)$ eſt celui d'une ſphère dans laquelle l'origine des rayons eſt à la diſtance α de ſon centre; mais alors il eſt aiſé de voir que $\varrho = 1$, c'eſt-à-dire que le ſphéroïde eſt homogène, ce qui eſt conforme au réſultat de l'*article précédent*.

Lorſqu'on a les figures de révolution qui ſatisfont à l'équilibre, il eſt facile d'en conclure celles qui ne ſont pas de révolution, par la méthode ſuivante.

Au lieu de fixer l'origine de l'angle θ à l'extrémité de l'axe de révolution, ſuppoſons qu'elle ſoit à une diſtance γ de cette extrémité, & nommons θ^{I} la diſtance à cette même extrémité, d'un point de la ſurface dont θ eſt la diſtance à la nouvelle origine de l'angle θ; nommons de plus $\varpi + 6$, l'angle compris entre les deux arcs θ & γ; nous aurons par la trigonométrie ſphérique,

$$\text{coſ.}\ \theta^{\text{I}} = \text{coſ.}\ \gamma.\text{coſ.}\ \theta + \text{ſin.}\ \gamma.\text{ſin.}\ \theta.\text{coſ.}\ (\varpi + 6);$$

en déſignant donc par ψ (coſ. θ^{I}) la fonction

$$\text{coſ.}\ \theta^{\text{I}i} - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)}.\text{coſ.}\ \theta^{\text{I}\,i-2} + \text{\&c.}$$

le rayon du ſphéroïde immobile en équilibre, que nous venons de voir être égal à $a + \alpha a.\psi\,(\text{coſ.}\ \theta^{\text{I}})$, ſera $a + \alpha a.\psi\,\{\text{coſ.}\ \gamma.\text{coſ.}\ \theta + \text{ſin.}\ \gamma.\text{ſin.}\ \theta.\text{coſ.}\ (\varpi + 6)\}$; & quoiqu'il ſoit fonction de l'angle ϖ, il appartient à un ſolide de révolution, mais dans lequel l'origine de l'angle θ n'eſt point à l'extrémité de l'axe de révolution.

Puiſque

Puisque ce rayon satisfait à l'équation de l'équilibre, quels que soient α, β & γ; il y satisfera encore en changeant ces quantités en α^{I}, β^{I}, γ^{I}; α^{II}, β^{II}, γ^{II}, &c. d'où il suit que cette équation étant linéaire, le rayon

$$\left. \begin{array}{l} a + \alpha a . \psi [\cos. \gamma . \cos. \theta + \sin. \gamma . \sin. \theta . \cos. (\varpi + \beta)] \\ + \alpha^{\text{I}} a . \psi [\cos. \gamma^{\text{I}} . \cos. \theta + \sin. \gamma^{\text{I}} . \sin. \theta . \cos. (\varpi + \beta^{\text{I}})] \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

y satisfera pareillement. Le sphéroïde auquel ce rayon appartient, n'est plus de révolution; il est formé d'une sphère du rayon a, & d'un nombre quelconque de couches semblables à l'excès du sphéroïde de révolution dont le rayon est $a + \alpha a . \psi (\mu)$, sur la sphère dont le rayon est a; ces couches étant posées arbitrairement les unes au-dessus des autres.

Si l'on compare l'expression de $\psi (\mu)$ avec celle de $Q^{(i)}$ de l'*article X*, on verra que ces deux fonctions ne diffèrent que par un facteur indépendant de μ; d'où il suit que l'on a

$$0 = \left\{ \frac{\partial (1 - \mu\mu) . \left[\frac{\partial \psi (\mu)}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} \right\} + i . (i + 1) . \psi . (\mu).$$

Il est facile d'en conclure que si l'on représente par $\alpha Y^{(i)}$, la fonction

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \psi . [\cos. \gamma . \cos. \theta + \sin. \gamma . \sin. \theta . \cos. (\varpi + \beta)] \\ + \alpha^{\text{I}} . \psi [\cos. \gamma^{\text{I}} . \cos. \theta + \sin. \gamma^{\text{I}} . \sin. \theta . \cos. (\varpi + \beta^{\text{I}})] \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

$Y^{(i)}$ sera une fonction rationnelle & entière de

$$\mu, \sqrt{(1 - \mu^2)} . \cos. \varpi, \sqrt{(1 - \mu^2)} . \sin. \varpi,$$

qui satisfera à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{ \frac{\partial . (1 - \mu\mu) . \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right]}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial \partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2} \right]}{1 - \mu\mu} + i . (i + 1) . Y^{(i)};$$

en choiſiſſant donc pour $Y^{(i)}$, la fonction la plus générale de cette nature, la fonction $a.(1 + \alpha Y^{(i)})$ ſera l'expreſſion la plus générale du rayon du ſphéroïde immobile en équilibre.

On peut parvenir au même réſultat au moyen de l'expreſſion de V en ſéries, de l'*article XIII*; car l'équation de l'équilibre étant, par l'*article précédent*,

$$\text{conſt.} = V + a^2.N;$$

ſi l'on ſuppoſe que toutes les forces étrangères à l'action des molécules fluides, ſe réduiſent à une ſeule force attractive égale à $\frac{4}{3}\pi.\frac{(\rho - 1).c^3}{r^2}$, placée au centre du ſphéroïde; en multipliant cette force par l'élément $-\partial r$ de ſa direction, & en l'intégrant enſuite, on aura

$$\tfrac{4}{3}\pi.\frac{(\rho - 1).c^3}{r} = a^2.N;$$

comme à la ſurface, $r = a.(1 + \alpha y)$, l'équation précédente de l'équilibre deviendra

$$\text{conſt.} = V + \tfrac{4}{3}\alpha\pi.\frac{c^3}{a}.(1 - \rho).y.$$

En ſubſtituant dans cette équation, au lieu de V, ſa valeur donnée par la formule (7) de l'*article XIII*, dans laquelle on mettra pour r, ſa valeur à la ſurface, $a(1 + \alpha y)$; & en ſubſtituant pour y, ſa valeur

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c;$$

on aura

$$0 = \left[(1 - \rho).\frac{c^3}{a^3} + 2\right].Y^{(0)} + (1 - \rho).\frac{c^3}{a^3}.Y^{(1)}$$
$$+ \left[(1 - \rho).\frac{c^3}{a^3} - \tfrac{2}{5}\right].Y^{(2)} \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \left[(1 - \rho).\frac{c^3}{a^3} - \left(\frac{2i - 2}{2i + 1}\right)\right].Y^{(i)} + \&c.$$

la conſtante a étant ſuppoſée telle que $\text{conſt.} = \frac{4}{3}\pi.a^2$. Cette équation donne $Y^{(0)} = 0$, $Y^{(1)} = 0$, $Y^{(2)} = 0$,

&c. à moins que le coéfficient de l'une de ces quantités, de $Y^{(i)}$ par exemple, ne soit nul : ce qui donne

$$(1 - \rho) \cdot \frac{c^3}{a^3} = \frac{2i - 2}{2i + 1},$$

i étant un nombre entier positif; & dans ce cas, toutes ces quantités sont nulles, excepté $Y^{(i)}$; on aura donc alors $y = Y^{(i)}$, ce qui est conforme à ce que nous venons de trouver.

On voit ainsi que les résultats obtenus par la réduction de V en série, ont toute la généralité possible, & qu'il n'est point à craindre qu'aucune figure d'équilibre échappe à l'analyse fondée sur cette réduction.

XXII.

Examinons maintenant le cas où le sphéroïde est hétérogène, & pour cela reprenons l'équation (11) de l'*article XVII.*

$$\int \frac{\partial \Pi}{\rho} = V + \alpha r^2 . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + r . Z^{(3)} + \&c.];$$

si l'on y substitue pour V, sa valeur donnée par la formule (10) de l'*article XVI*, on aura

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\partial \Pi}{\rho} = 2\pi . \int \rho \partial . a^2 + 4\alpha\pi . \times \\ \int \rho . \partial \left[a^2 . Y^{(0)} + \frac{ar}{3} . Y^{(1)} + \frac{r^2}{5} . Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a} . Y^{(3)} + \&c.\right] \\ + \frac{4\pi}{3r} \int \rho \partial . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r} . \times \\ \int \rho . \partial \left[a^3 . Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2} . Y^{(2)} + \&c.\right] \\ + \alpha r^2 . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + r Z^{(3)} + \&c.] \end{aligned}\right\} ; (15)$$

les deux premières intégrales du second membre de cette équation, étant prises depuis $a = a$ jusqu'à $a =$ a, & les deux dernières étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à

$a = a$; r devant être changé en $a(1 + \alpha y)$ après toutes les différenciations & les intégrations. On aura ainſi à la ſurface extérieure

$$\left.\begin{array}{l} \int \frac{\partial \Pi}{\rho} = \frac{4\pi}{3r} \cdot \int \rho \partial . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r} \times \\ \int \rho \partial . \left[a^3 Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2} Y^{(2)} + \frac{a^6}{7r^3} . Y^{(3)} + \&c.\right] \\ + \alpha r^2 . \left[Z^{(0)} + Z^{(2)} + r . Z^{(3)} + \&c.\right] \end{array}\right\} ; (16)$$

les intégrales étant priſes depuis $a = 0$ juſqu'à $a = a$. Cette équation a l'avantage de donner par la différenciation de ſon ſecond membre, la peſanteur à la ſurface du ſphéroïde; car en nommant p, cette force, on aura p égal à la différentielle de ce ſecond membre, priſe par rapport à r, & diviſée par $- \partial r$.

Si le ſphéroïde eſt entièrement fluide, ou formé d'un noyau ſolide recouvert d'un fluide; l'équation (15) donnera les valeurs de $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, &c. relatives à chacune des couches de niveau du fluide; & ſi le fluide eſt homogène, il ſuffira de ſatisfaire à l'équation (16).

Il eſt aiſé de voir par la nature de ces équations qui ſont linéaires, que ſi l'on y a ſatisfait d'une manière quelconque; on aura leur ſolution complète, en ajoutant aux valeurs particulières de $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, &c. que l'on ſuppoſe connues, celles qui ont lieu dans le cas où $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, &c. ſont nuls; en ſorte que la recherche de la figure d'équilibre des couches du fluide, ſe réduit 1.° à déterminer une figure particulière d'équilibre, lorſque le fluide eſt ſollicité par les forces étrangères qui l'animent; 2.° à déterminer toutes les figures d'équilibre qui ont lieu lorſque ces forces ſont nulles; car il eſt clair que la ſomme des valeurs de y, relatives à ces deux cas, ſera la valeur complète de y.

La figure du ſphéroïde donnée par l'équation (16), dépend de la figure & de la denſité de ſes couches intérieures, & ſi

l'on compare les termes ſemblables, en faiſant pour plus de ſimplicité, a = 1, on aura à la ſurface extérieure

$$\int \frac{\partial \Pi}{\rho} = \frac{4\pi}{3} . \int \rho \partial . a^3$$

& quel que ſoit i,

$$o = \frac{4\pi}{3} . Y^{(i)} . \int \rho \partial . a^3 - \frac{4\pi}{2i+1} . \int \rho . \partial [a^{i+3} . Y^{(i)}] - Z^{(i)},$$

pourvu que l'on ſuppoſe $Z^{(1)} = o$, parce que cette fonction manque dans l'équation (16). Les intégrales doivent être priſes depuis $a = o$ juſqu'à $a = 1$.

La peſanteur p ſera donnée par cette formule

$$p = \tfrac{4}{3}\pi . \int \rho \partial . a^3 - \frac{8\alpha\pi}{3} . [Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.] . \int \rho \partial . a^3$$
$$+ 4\alpha\pi \int \rho . \partial [a^3 . Y^{(0)} + \frac{2a^4}{3} . Y^{(1)} + \frac{3a^5}{5} . Y^{(2)} + \&c.]$$
$$- \alpha . [2 . Z^{(0)} + 2 . Z^{(2)} + 3 . Z^{(3)} + 4 . Z^{(4)} + \&c.]$$

Si l'on élimine les termes

$$\int \rho . \partial (a^3 . Y^{(0)}), \int \rho . \partial . (a^4 Y^{(1)}), \&c.$$

au moyen de l'équation précédente en $Y^{(i)}$, & que pour abréger l'on ſuppoſe

$$P = \frac{4\pi}{3} . (1 - \alpha Y^{(0)}) . \int \rho \partial . a^3 - 3\alpha . Z^{(0)},$$

on aura

$$\left. \begin{aligned} p = P + \alpha P . [Y^{(2)} + 2 . Y^{(3)} + 3 . Y^{(4)} \ldots + (i-1) . Y^{(i)} + \&c.] \\ - \alpha [5 . Z^{(2)} + 7 . Z^{(3)} + 9 . Z^{(4)} \ldots + (2i+1) . Z^{(i)} + \&c.] \end{aligned} \right\} ; (17)$$

Cette expreſſion eſt remarquable, en ce qu'elle donne la loi de la peſanteur à la ſurface du ſphéroïde, indépendamment de la figure & de la denſité de ſes couches intérieures; en ſorte que ſi par les meſures des Degrés des méridiens & des parallèles, on a le rayon $1 + \alpha . [Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.]$

du ſphéroïde ; & ſi de plus on connoît les quantités $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, &c. relatives à la force centrifuge du mouvement de rotation & aux attractions étrangères ; on aura la variation $p - P$ de la peſanteur à la ſurface du ſphéroïde ; & réciproquement, ſi cette variation eſt donnée par les expériences ſur la longueur du pendule, on aura le rayon $1 + \alpha y$ du ſphéroïde ; car quoique la valeur de p ne donne point $Y^{(0)}$ & $Y^{(1)}$; cependant comme $Y^{(0)}$ eſt conſtant, on peut le ſuppoſer compris dans la valeur de a, que nous avons priſe pour l'unité ; & il eſt toujours poſſible, en plaçant convenablement l'origine des rayons, de faire diſparoître $Y^{(1)}$, & de réduire ainſi l'expreſſion du rayon du ſphéroïde à cette forme

$$1 + \alpha . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.]$$

Cette correſpondance entre la variation de la peſanteur & celle des rayons, n'étant aſſujettie à aucune hypothèſe ſur la figure & ſur la denſité des couches du ſphéroïde, elle offre un moyen très-ſimple de vérifier ſi la loi de la gravitation univerſelle qui s'accorde ſi bien avec les mouvemens des corps céleſtes, s'accorde pareillement avec leurs figures.

XXIII.

Le rayon oſculateur du méridien d'un ſphéroïde qui a pour rayon $1 + \alpha y$, eſt

$$1 + \alpha . \left(\frac{\partial . \mu y}{\partial \mu}\right) + \alpha . \left[\frac{-\partial . (1 - \mu\mu) . \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu}\right];$$

en déſignant donc par c, la grandeur du Degré d'un cercle dont le rayon eſt ce que nous avons pris pour l'unité, l'expreſſion du Degré du méridien du ſphéroïde ſera

$$c . \left\{1 + \alpha . \left(\frac{\partial . \mu y}{\partial \mu}\right) + \alpha . \left[\frac{\partial . (1 - \mu\mu) . \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu}\right]\right\}.$$

Si l'on ſubſtitue au lieu du rayon $1 + \alpha y$, ſa valeur $1 + \alpha . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} \ldots + Y^{(i)} + \&c.]$

& au lieu de $\left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\}$, sa valeur

$-i.(i+1).Y^{(i)} - \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu}$; l'expression précédente du Degré du méridien deviendra

$$c - 6.\alpha c.Y^{(2)} - 12.\alpha c.Y^{(3)} \ldots - i.(i+1).\alpha c.Y^{(i)} - \&c.$$
$$+ \alpha c.\frac{\partial.[\mu.(Y^{(2)} + Y^{(3)} \ldots\ldots + Y^{(i)} + \&c.)]}{\partial\mu}$$
$$- \frac{\alpha c.\left\{\frac{\partial\partial.[Y^{(2)} + Y^{(3)} \ldots\ldots + Y^{(i)} + \&c.]}{\partial\varpi^2}\right\}}{1-\mu\mu}.$$

Relativement à la Terre, $\alpha Z^{(2)}$ se réduit à $-\frac{g}{2}.(\mu^2 - \frac{1}{3})$ ou ce qui revient au même, à $-\frac{\varphi}{2}.P.(\mu^2 - \frac{1}{3})$, φ étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur; de plus $Z^{(3)}$, $Z^{(4)}$, &c. sont nuls : en nommant donc l & L les longueurs du Pendule à secondes, correspondantes à p & P; l'expression précédente de la pesanteur donnera relativement à la Terre,

$$l = L + \alpha L.[Y^{(2)} + 2.Y^{(3)} + 3.Y^{(4)} \ldots + (i-1).Y^{(i)} + \&c.]$$
$$+ \tfrac{5}{2}.L\varphi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Si l'on compare ces trois expressions du rayon terrestre, de la longueur du Pendule à secondes, & du Degré du méridien; on voit que le terme $\alpha.Y^{(i)}$ de l'expression du rayon, est multipliée par $i-1$, dans l'expression de la longueur du Pendule, & par $i.(i+1)$ dans celle du Degré du méridien; d'où il suit que pour peu que i soit considérable, ce terme sera plus sensible dans les observations de la longueur du Pendule que dans celles de la parallaxe, & plus sensible encore dans les mesures des Degrés, que dans celles des longueurs du Pendule.

Ainſi en ſuppoſant le rayon de la Terre égal à

$$1 + \alpha Y^{(2)} + \alpha . Y^{(i)} + \alpha . Y^{(i+1)} + \&c.$$

i étant un nombre conſidérable & les coéfficiens de $Y^{(i)}$; $Y^{(i+1)}$ étant aſſez petits pour que ces fonctions & leurs produits par $i, i + 1$, &c. ſoient inſenſibles relativement à $Y^{(2)}$, mais tels cependant que les produits de ces mêmes fonctions par $i.(i + 1), (i + 1).(i + 2)$, &c. ſoient comparables à $6\, Y^{(2)}$; la variation de la longueur du Pendule ne dépendra ſenſiblement que de $Y^{(2)}$, & ſera à très-peu-près proportionnelle au carré du ſinus de la latitude, ſi $Y^{(2)}$ ne renferme point la longitude ϖ; tandis que la variation des degrés s'écartera de cette loi, d'une manière ſenſible. Ce réſultat eſt parfaitement conforme à ce que l'on obſerve ſur la Terre; les longueurs du Pendule à ſecondes, en allant des pôles vers l'équateur, diminuent à très-peu-près, comme le carré du ſinus de la latitude; mais la diminution des Degrés du méridien, paroît ſuivre une loi différente.

Cette remarque donne l'expreſſion du rayon terreſtre dont on doit faire uſage dans le calcul des parallaxes de la Lune; car, puiſque les variations de la longueur du Pendule à ſecondes s'éloignent très-peu de la loi du carré du ſinus de la latitude; il faut que dans l'expreſſion de l, la quantité

$$\alpha L.[2\, Y^{(3)} + 3\, Y^{(4)} .... + (i - 1).Y^{(i)} + \&c.]$$

ſoit fort petite, relativement à $\alpha L.Y^{(2)} + \frac{5}{2} L.\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3})$; d'où il ſuit qu'à plus forte raiſon, dans l'expreſſion du rayon terreſtre, la quantité $\alpha\, (Y^{(3)} + Y^{(4)} .... + Y^{(i)} + \&c.)$ doit être négligée vis-à-vis de $\alpha . Y^{(2)}$; partant ſi l'on pouvoit par les obſervations de la parallaxe de la Lune, déterminer avec préciſion, la variation des rayons terreſtres; on la trouveroit encore plus approchante que celle des longueurs du Pendule, de la loi du carré du ſinus de la latitude.

Si

Si l'on désigne par $L.[1 + h.(\mu^2 - \frac{1}{3})]$, la longueur observée du Pendule à secondes ; on aura

$$\alpha.Y^{(2)} + \frac{5}{2}.\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3}) = h.(\mu^2 - \frac{1}{3});$$

d'où l'on tire

$$\alpha Y^{(2)} = (h - \frac{5\varphi}{2}).(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Les observations donnent à très-peu-près

$$h = 0{,}0055334;$$

en sorte que l'on peut représenter dans cette hypothèse, à un dixième de ligne près tout au plus, les observations faites avec soin sur la longueur du Pendule ; d'ailleurs φ étant égal à $\frac{1}{289}$, on a $\frac{5}{2}.\varphi = 0{,}0086505$; le rayon $1 + \alpha Y^{(2)}$ du sphéroïde terrestre, sera donc

$$1 + \alpha.Y^{(2)} = 1 - 0{,}0031171.(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Ainsi l'on peut dans le calcul des parallaxes & de la pesanteur, supposer que la Terre est un ellipsoïde de révolution dont l'ellipticité est $\frac{1}{321}$; mais cette supposition employée dans le calcul de la variation des Degrés du méridien, écarteroit sensiblement de la vérité.

Dans la théorie de la précession des équinoxes & de la nutation de l'axe de la Terre, non-seulement l'influence des termes $\alpha Y^{(3)}$, $\alpha Y^{(4)}$, &c. de l'expression du rayon d'une couche quelconque du sphéroïde terrestre, est insensible, mais elle est nulle ; ainsi l'on doit calculer ces phénomènes, dans l'hypothèse précédente d'un ellipsoïde de révolution. J'ai fait voir dans nos Mémoires pour l'année 1776, *page 257*, que pour satisfaire à ces phénomènes, l'ellipticité de la Terre doit être comprise entre les limites 0,001730, & 0,005135;

& comme l'ellipticité 0,0031171, donnée par les obſervations de la longueur du pendule, eſt entre ces limites ; on voit que la loi de la peſanteur univerſelle ſatisfait auſſi-bien qu'on peut le deſirer dans l'état actuel de nos connoiſſances, aux divers phénomènes qui dépendent de la figure de la Terre.

CINQUIÈME SECTION.

Des Oſcillations d'un Fluide homogène de peu de profondeur, qui recouvre une ſphère.

XXIV.

Après avoir donné une théorie générale de la figure des Planètes, il nous reſte à déterminer les conditions qui rendent cette figure ſtable. Pour cela, nous allons conſidérer les oſcillations d'un fluide très-peu profond qui recouvre une ſphère, en le ſuppoſant dérangé d'une manière quelconque de ſon état d'équilibre, & ſoumis à l'action d'un nombre quelconque de forces étrangères ; & nous chercherons dans les conditions qui rendent ces oſcillations périodiques, les conditions relatives à la denſité & à l'ébranlement primitif du fluide, qui donnent un équilibre ferme.

Soit l, la profondeur du fluide dans l'état d'équilibre ; 1, le rayon du ſphéroïde, & par conſéquent $1 - l$ celui du noyau ſphérique que le fluide recouvre, l étant ſuppoſé très-petit : nommons enſuite ρ la denſité de ce noyau, celle du fluide étant priſe pour unité ; ſoit de plus θ, l'angle que forme un rayon quelconque du ſphéroïde, avec un rayon fixe que nous prendrons pour ſon demi-axe ; & ϖ, l'angle formé par le plan qui paſſe par ces deux rayons, avec un méridien fixe ; l'origine des rayons étant ſuppoſée au centre du noyau ſphérique. Suppoſons que le rayon du ſphéroïde, qui dans l'état de l'équilibre étoit égal à l'unité, ſoit $1 + \alpha y$ dans l'état de mouvement, & après un temps quelconque t, α étant un coéfficient très-petit ; que l'angle θ devienne $\theta + \alpha u$,

& que l'angle ϖ devienne $\varpi + \alpha v$; y, u, & v étant des fonctions de θ, ϖ & t, qu'il s'agit de déterminer. Cela posé.

Si l'on conçoit dans l'état d'équilibre, un parallélipipède rectangle fluide, dont les dimensions soient l, $\partial\theta$, & $\partial\varpi.\text{sin.}\,\theta$; & dont par conséquent la masse soit $l.\partial\theta.\partial\varpi.\text{sin.}\,\theta$; il est visible que dans l'état de mouvement, ce parallélipipède changera de figure; mais les molécules voisines ayant des mouvemens très-peu différens, il est facile de s'assurer que si l'on calcule la solidité de cette nouvelle figure, comme étant celle d'un parallélipipède rectangle dont les dimensions seroient

$$l + \alpha y;\ \partial\theta.\left[1 + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right];\ \partial\varpi.\left[1 + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right)\right].\text{sin.}(\theta + \alpha u);$$

on ne se trompera que de quantités de l'ordre α^2. On aura ainsi pour sa masse,

$$(l + \alpha y).\partial\theta.\left[1 + \alpha.\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right].\partial\varpi.\left[1 + \alpha.\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right)\right].\text{sin.}(\theta + \alpha u);$$

en l'égalant à la précédente $l\,\partial\theta.\partial\varpi.\text{sin.}\,\theta$; & en faisant $\text{cos.}\,\theta = \mu$, on aura

$$y = l.\left[\frac{\partial.u\sqrt{(1-\mu^2)}}{\partial\mu}\right] - l.\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right).$$

Cette équation est relative à la continuité du fluide, & il en résulte que u & v sont très-grands relativement à y, dans la raison de 1 à l; en sorte que nous pourrons négliger y, par rapport à ces quantités.

Pour avoir les équations relatives au mouvement du fluide, nous reprendrons l'équation

$$\text{const.} = \int(F\,\partial f + F'\,\partial f' + \&c.)$$

qui, par l'*article XVII*, détermine les conditions de l'équilibre d'une masse fluide, à sa surface extérieure; & nous observerons que si l'on nomme x', y', z', les trois coordonnées rectangles d'une molécule de cette surface, les trois vîtesses

partielles de cette molécule, seront

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right),$$

ou

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial x'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\partial x'}{\partial t}\right);$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial y'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\partial y'}{\partial t}\right),$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial t}\right).$$

Dans l'instant suivant, ∂t étant supposé constant, les vîtesses de la molécule seront

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial x'}{\partial t}\right),$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial y'}{\partial t}\right),$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial t}\right);$$

il faut donc ajouter aux forces qui animent la molécule, & en vertu desquelles elle seroit en équilibre; les forces nécessaires pour produire les incrémens de vîtesse

$$-\left(\frac{\partial\partial x'}{\partial t}\right), -\left(\frac{\partial\partial y'}{\partial t}\right), -\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial t}\right),$$

forces que l'on obtient, comme l'on sait, en divisant ces incrémens de vîtesse, par l'élément du temps.

Il résulte de l'*article XVII*, que l'intégrale $\int (F\,\partial f + F'\partial f' + \&c.)$ relative aux forces dont une molécule fluide est sollicitée à la surface, est égale à

$$V + \alpha.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + Z^{(3)} + \&c.]$$

V étant la somme de toutes les parties du sphéroïde, divisées par leurs distances à la molécule fluide; ainsi pour avoir la valeur entière de l'intégrale $\int (F.\partial f + F'.\partial f' + \&c.)$, il faut ajouter à la quantité précédente, l'intégrale du produit

des forces $-(\frac{\partial\partial x^{\prime}}{\partial t^2})$, $-(\frac{\partial\partial y^{\prime}}{\partial t^2})$, $-(\frac{\partial\partial z^{\prime}}{\partial t^2})$, par les élémens de leurs directions, c'est-à-dire, l'intégrale

$$-\int[\partial x^{\prime}.(\frac{\partial\partial x^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial y^{\prime}.(\frac{\partial\partial y^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial z^{\prime}.(\frac{\partial\partial z^{\prime}}{\partial t^2})];$$

les différentielles $\partial x^{\prime}$, $\partial y^{\prime}$, $\partial z^{\prime}$, étant relatives aux variables θ & ϖ. On aura donc pour l'équation générale du mouvement du fluide,

$$\text{const.} = V + \alpha.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + Z^{(3)} + Z^{(4)} + \&c.]$$
$$-\int.[\partial x^{\prime}.(\frac{\partial\partial x^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial y^{\prime}.(\frac{\partial\partial y^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial z^{\prime}.(\frac{\partial\partial z^{\prime}}{\partial t^2})];$$

équation dans laquelle on doit obſerver que le ſphéroïde étant ſuppoſé ſans mouvement de rotation, il faut faire $g = 0$, dans les valeurs de $Z^{(0)}$ & de $Z^{(2)}$.

Maintenant, on a

$$x^{\prime} = (1 + \alpha y).\text{cof.}(\theta + \alpha u);$$
$$y^{\prime} = (1 + \alpha y).\text{fin.}(\theta + \alpha u).\text{cof.}(\varpi + \alpha v);$$
$$z^{\prime} = (1 + \alpha y).\text{fin.}(\theta + \alpha u).\text{fin.}(\varpi + \alpha v);$$

d'où il eſt aiſé de conclure, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & celles de l'ordre y relativement à u & à v,

$$-\int[\partial x^{\prime}.(\frac{\partial\partial x^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial y^{\prime}.(\frac{\partial\partial y^{\prime}}{\partial t^2}) + \partial z^{\prime}.(\frac{\partial\partial z^{\prime}}{\partial t^2})]$$
$$= \alpha.\frac{\partial^2}{\partial t^2}.\int[\frac{u.\partial\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)}} - (1-\mu^2).v.\partial\varpi];$$

l'équation précédente du mouvement du fluide deviendra ainſi

$$\text{const.} = V + \alpha.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + Z^{(3)} + \&c.]$$
$$+ \alpha.\frac{\partial^2}{\partial t^2}.\int[\frac{u.\partial\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)}} - (1-\mu^2).v.\partial\varpi],$$

& il eſt clair que la quantité ſous le ſigne $\int$ doit être une différence exacte.

Cette équation paroît ſuppoſer que le centre du noyau ſphérique, où nous fixons l'origine des coordonnées, eſt le

centre même de gravité du ſphéroïde ; puiſque c'eſt relativement à ce centre, que nous avons déterminé dans l'*article XVII*, les forces qui ſollicitent les molécules fluides : or l'état du fluide peut être tel que ces deux centres ne coïncident point, & alors il faut ajouter aux mouvemens précédens de la molécule fluide relativement au noyau ſuppoſé immobile, le mouvement du centre même de ce noyau ; mais ſi l'on conſidère que ce centre ne peut faire autour du centre de gravité de la maſſe entière, que des oſcillations de l'ordre $\alpha\, y$, on verra facilement que les forces qui en réſultent dans la molécule fluide, ſont de l'ordre $\alpha\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right)$, & qu'ainſi nous pouvons les négliger vis-à-vis de $\left(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\right)$; d'où il ſuit que l'équation précédente eſt vraie, quel que ſoit l'ébranlement du fluide.

Maintenant, ſi l'on différencie convenablement cette équation, & ſi l'on obſerve que l'on a

$$o = \left[\frac{\partial(1-\mu\mu).\left(\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}\right] + \frac{\left(\frac{\partial\partial Z^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu} + i.(i+1).Z^{(i)}$$

&

$$\frac{y}{l} = \left[\frac{\partial.u\sqrt{(1-\mu^2)}}{\partial\mu}\right] - \left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right),$$

on aura

$$o = l.\left[\frac{\partial(1-\mu\mu)\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}\right] + \frac{l.\left(\frac{\partial\partial V}{\partial\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu}$$

$$-\alpha\, l.[6.Z^{(2)} + 12.Z^{(3)} \ldots + i.(i+1).Z^{(i)} + \&c.] + \alpha.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right);$$

c'eſt l'équation d'après laquelle il faut déterminer y.

XXV.

L'ÉQUATION précédente aux différences partielles eſt d'un genre particulier, en ce que la variable principale y eſt

enveloppée d'une manière déterminée sous le signe intégral, dans la fonction V; en sorte que pour avoir V en y, θ, ϖ & t, & pour ramener ainsi l'équation précédente, aux différences partielles ordinaires, il faudroit supposer y déjà connu. Cette équation paroît donc échapper à l'analyse, & présenter des difficultés presque insurmontables. Cependant si l'on observe que la valeur de V s'y présente sous une forme de différences partielles dont nous avons souvent fait usage; on trouvera que cette considération jointe aux recherches précédentes sur le développement de V en série, donne un moyen fort simple d'avoir y aussi complètement qu'il est possible.

Pour cela, nous remarquerons que V étant composé de deux parties dont l'une est relative au noyau sphérique, & dont l'autre est relative au fluide qui le recouvre; on peut considérer cette fonction comme formée de deux autres parties dont la première est relative à un sphéroïde fluide du rayon $1 + \alpha y$, & dont la seconde est relative à une sphère du rayon $1 - l$ & de la densité $\rho - 1$. Cette dernière partie est, par ce qui précède, égale à $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{(\rho - 1).(1 - l)^3}{1 + \alpha y}$, ou à $\frac{4}{3}\pi.(\rho - 1).(1 - l)^3.(1 - \alpha y)$. Pour avoir la première, il faut supposer dans la formule (7) de l'*article XIII*, $a = 1$ & $r = 1 + \alpha y$, ce qui donne pour cette partie de V,

$$\frac{4}{3}\pi.(1 - \alpha y) + 4\alpha\pi.[Y^{(0)} + \tfrac{1}{3}.Y^{(1)} + \tfrac{1}{5}.Y^{(2)} + \&c.];$$

en réunissant donc ces deux parties, & en faisant pour abréger

$$p = \tfrac{4}{3}\pi.(\delta - 1).(1 - l)^3 + \tfrac{4}{3}\pi;$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre αl, $4\alpha\pi = \frac{3\alpha p}{\rho}$; on aura

$$V = p - \alpha p.y + \frac{3\alpha p}{\rho}.[Y^{(0)} + \tfrac{1}{3}.Y^{(1)} + \tfrac{1}{5}.Y^{(2)} + \&c.]$$

où l'on doit observer que p est la pesanteur à la surface du sphéroïde en équilibre.

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente aux différences partielles, en observant que

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.$$

& que l'on a

$$o = \left[\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right] + \frac{\left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).Y^{(i)};$$

on trouvera généralement, en comparant les fonctions semblables $Y^{(i)}$ & $Z^{(i)}$,

$$o = \frac{i.(i+1).(2i+1-\frac{3}{\rho})}{2i+1}.lp.Y^{(i)} - i.(i+1).l.Z^{(i)} + \left[\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial t^2}\right],$$

& cette équation aura lieu, quel que soit i, pourvu que l'on suppose $Z^{(1)} = o$, parce que cette fonction manque dans l'équation différentielle.

Pour intégrer cette équation, soit

$$\frac{i.(i+1).(2i+1-\frac{3}{\rho})}{2i+1}.lp = \lambda^2_i;$$

on aura

$$Y^{(i)} = l.M^{(i)}.\text{fin.}\ \lambda_i t + l.N^{(i)}.\text{cof.}\ \lambda_i t$$
$$+ \frac{i.(i+1)}{\lambda_i}.l.\text{fin.}\ \lambda_i t.\int Z^{(i)}.\partial t.\text{cof.}\ \lambda_i t$$
$$- \frac{i.(i+1)}{\lambda_i}.l.\text{cof.}\ \lambda_i t.\int Z^{(i)}.\partial t.\text{fin.}\ \lambda_i t.$$

$M^{(i)}$ & $N^{(i)}$ étant des fonctions rationnelles & entières de μ, $(\sqrt{1-\mu^2}).\text{cof.}\ \varpi$, $\sqrt{(1-\mu^2)}.\text{fin.}\ \varpi$, qui satisfont aux équations à différences partielles,

$$o = \left\{\frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial M^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}\right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial M^{(i)}}{\partial\varpi^2}\right]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).M^{(i)};$$

$$o = \left\{ \frac{\partial.(1-\mu\mu).\left[\frac{\partial N^{(i)}}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial\partial N^{(i)}}{\partial \varpi^2}\right]}{1-\mu\mu} + i.(i+1).N^{(i)};$$

L'équation différentielle en $Y^{(i)}$, donne en ſuppoſant $i = o$, $\left(\frac{\partial\partial Y^{(o)}}{\partial t^2}\right) = o$, & par conſéquent

$$Y^{(o)} = l\,M^{(o)}.t + l\,N^{(o)};$$

on aura donc à cauſe de $y = Y^{(o)} + Y^{(1)} + \&c.$

$$\begin{aligned} y = l M^{(o)}.t + l N^{(o)} & + l M^{(1)}.\text{ſin.}\,\lambda_1 t + l N^{(1)}.\text{coſ.}\,\lambda_1 t \\ & + l M^{(2)}.\text{ſin.}\,\lambda_2 t + l N^{(2)}.\text{coſ.}\,\lambda_2 t \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + l M^{(i)}.\text{ſin.}\,\lambda_i t + l N^{(i)}.\text{coſ.}\,\lambda_i t \\ & + \&c. \\ & + \frac{6l}{\lambda_2}.\text{ſin.}\,\lambda_2 t.\int Z^{(2)}.\partial t.\text{coſ.}\,\lambda_2 t \\ & - \frac{6l}{\lambda_2}.\text{coſ.}\,\lambda_2 t.\int Z^{(2)}.\partial t.\text{ſin.}\,\lambda_2 t \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{i.(i+1).l}{\lambda_i}.\text{ſin.}\,\lambda_i t.\int Z^{(i)}.\partial t.\text{coſ.}\,\lambda_i t \\ & - \frac{i.(i+1).l}{\lambda_i}.\text{coſ.}\,\lambda_i t.\int Z^{(i)}.\partial t.\text{ſin.}\,\lambda_i t \\ & + \&c. \end{aligned}$$

On déterminera les fonctions $N^{(o)}$, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, &c. au moyen de la figure initiale du fluide, & les fonctions $M^{(o)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, au moyen de ſa vîteſſe initiale; ainſi l'expreſſion précédente de y, embraſſant toutes les figures & toutes les vîteſſes primitives dont le fluide eſt ſuſceptible, elle a toute la généralité que l'on peut deſirer.

XXVI.

Si la quantité $M^{(o)}$ n'étoit pas nulle, la valeur de y iroit en croiſſant ſans ceſſe, & l'équilibre ne ſeroit pas ferme, quel que fût d'ailleurs le rapport de la denſité du fluide à celle

de la ſphère qu'il recouvre ; mais il eſt facile de s'aſſurer que les deux quantités $M^{(0)}$ & $N^{(0)}$ ſont nulles, par cela ſeul que la maſſe fluide eſt conſtante ; car cette condition donne $\int y\,\partial\mu\,\partial\varpi = 0$, l'intégrale étant priſe depuis $\mu = 1$ juſqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ juſqu'à $\varpi = 360^d$; or, on a par l'*article XVIII*,

$\int y\,\partial\mu\,\partial\varpi = 4\pi . Y^{(0)} = 4\pi . [M^{(0)} . t + N^{(0)}]$;

en égalant donc cette quantité à zéro, on aura $M^{(0)} = 0$, $N^{(0)} = 0$.

Il ſuit de-là que la ſtabilité de l'équilibre dépend du ſigne des quantités λ^2_1, λ^2_2, &c. car il eſt viſible que ſi l'une de ces quantités telle que λ^2_i, eſt négative, le ſinus & le coſinus de l'angle $\lambda_i\,t$ ſe changent en exponentielles, & ils ſe changent en arcs de cercle ſi $\lambda^2_i = 0$; ils ceſſent par conſéquent dans ces deux cas, d'être périodiques ; condition néceſſaire pour la ſtabilité de l'équilibre. λ^2_i étant égal à $\frac{i.(i+1).(2i+1-\frac{3}{\rho})}{2i+1}.lp$, cette quantité ne peut être poſitive, à moins que l'on n'ait $\rho > \frac{3}{2i+1}$; il faut donc pour la ſtabilité de l'équilibre, que l'on ait généralement $\rho > \frac{3}{2i+1}$, i étant un nombre entier poſitif, égal ou plus grand que l'unité : or, cette condition ne peut être remplie pour toutes les valeurs de i, qu'autant que l'on a $\rho > 1$, c'eſt-à-dire, que la denſité du noyau ſphérique ſurpaſſe celle du fluide. Voilà donc la condition générale de la ſtabilité de l'équilibre, condition qui, ſi elle eſt remplie, rend l'équilibre ferme, quel que ſoit l'ébranlement primitif; mais qui, ſi elle ne l'eſt pas, fait dépendre la ſtabilité de l'équilibre, de la nature de cet ébranlement.

Si, par exemple, l'ébranlement primitif eſt tel que le centre de gravité du ſphéroïde coïncide avec celui du noyau ſphérique, & n'ait aucun mouvement autour de lui dans le premier inſtant ; il eſt aiſé de voir que cet coïncidence

ſubſiſtera toujours; d'où il ſuit par l'*article XVIII*, que $Y^{(1)} = 0$, ce qui donne $M^{(1)} = 0$, $N^{(1)} = 0$. Dans ce cas, la ſtabilité de l'équilibre dépend du ſigne de λ^2_2. Pour que cette quantité ſoit poſitive, il faut que l'on ait $\rho > \frac{3}{5}$; c'eſt la condition que les Géomètres ont exigée pour la ſtabilité de l'équilibre. J'ai déjà remarqué dans nos Mémoires pour l'année 1776, *pages 227 & 228*, qu'elle eſt inſuffiſante; mais je n'ai pu m'aſſurer alors, que la condition de $\rho > 1$ étant ſatisfaite, l'équilibre eſt néceſſairement ſtable.

XXVII.

La valeur de y donne immédiatement celles de u & de v; en effet ſi dans l'équation

$$\text{conſt.} = V + \alpha . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + Z^{(3)} + \&c.] + \alpha . \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \int . \left[\frac{u . \partial \mu}{\sqrt{(1 - \mu\mu)}} - (1 - \mu^2) v . \partial \varpi \right],$$

on ſubſtitue au lieu de V ſa valeur, & que l'on obſerve que l'on a par l'*article XXV*,

$$Z^{(i)} + \frac{\left(\frac{3}{\rho} - 2i - 1\right)}{2i + 1} . p . Y^{(i)} = \frac{\left(\frac{\partial\partial Y^{(i)}}{\partial t^2}\right)}{i . (i + 1) . l},$$

on aura

$$\text{conſt.} = p + \frac{\alpha}{2l} . \left(\frac{\partial^2 . Y^{(1)}}{\partial t^2}\right) + \frac{\alpha}{6l} . \left(\frac{\partial^2 . Y^{(2)}}{\partial t^2}\right) \ldots \ldots + \frac{\alpha}{i . (i + 1) . l} . \left(\frac{\partial^2 . Y^{(i)}}{\partial t^2}\right) + \&c. + \alpha . \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \int . \left[\frac{u . \partial \mu}{\sqrt{(1 - \mu\mu)}} - (1 - \mu\mu) . v . \partial \varpi \right];$$

d'où l'on tire,

$$u = G + H . t - \frac{\sqrt{(1 - \mu^2)}}{l} . \left\{ \frac{1}{2} . \left(\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{6} . \left(\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \mu}\right) \ldots \ldots + \frac{1}{i . (i + 1)} . \left(\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu}\right) + \&c. \right\}$$

$$v = K + L.t + \frac{1}{l.(1-\mu^2)}.\{\tfrac{1}{2}.(\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \varpi}) + \tfrac{1}{6}.(\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \varpi}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{i.(i+1)}.(\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi}) + \&c.\}$$

Si l'on ſubſtitue les valeurs de y, u & v dans l'équation

$$y = l.[\frac{\partial.u\sqrt{(1-\mu^2)}}{\partial\mu}] - l\,(\frac{\partial v}{\partial\varpi});$$

on aura, en comparant ſéparément les termes multipliés par t,

$$o = [\frac{\partial.H\sqrt{(1-\mu^2)}}{\partial\mu}] - (\frac{\partial L}{\partial\varpi});$$

en ſorte qu'en vertu des vîteſſes H & L, la ſurface du fluide reſteroit toujours ſphérique. Pour concevoir les mouvemens du fluide dans cette hypothèſe, imaginons qu'il ait un très-petit mouvement de rotation autour de l'axe du ſphéroïde; la figure ſphérique du fluide n'en ſera altérée que d'une quantité du ſecond ordre, puiſque la force centrifuge ne ſera que de cet ordre: dans ce cas, on aura $u = o$ & $v = k\,t.\sqrt{(1-\mu^2)}$, k étant un coëfficient indépendant de μ & de ϖ. Mais nous ſommes libres de faire tourner le fluide autour de tout autre axe; & de plus ces mouvemens étant ſuppoſés fort petits, le fluide mû en vertu de la réſultante d'un nombre quelconque de mouvemens ſemblables, conſervera toujours, aux quantités près du ſecond ordre, ſa figure ſphérique. Tous ces mouvemens ſont compris dans les formules

$$(\frac{\partial u}{\partial t}) = H; (\frac{\partial v}{\partial t}) = L;$$

H & L étant des fonctions de μ & de ϖ, qui ont entr'elles la relation donnée par l'équation précédente: ils ne nuiſent point à la ſtabilité de l'équilibre, & d'ailleurs ils doivent être bientôt anéantis par les frottemens & par les réſiſtances en tout genre, que le fluide éprouve.

FIN.

RECHERCHES

SUR LES

RÉFRACTIONS EXTRAORDINAIRES

QUI ONT LIEU PRÈS DE L'HORIZON.

RECHERCHES

SUR LES

RÉFRACTIONS EXTRAORDINAIRES

QUI ONT LIEU PRÈS DE L'HORIZON,

PAR M. BIOT,

Membre de l'Institut et adjoint du Bureau des longitudes de France.



PARIS.

GARNERY, Libraire, rue de Seine, n° 6.

BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT DE FRANCE.

M. DCCC. X. [1810]

MÉMOIRES
DE LA CLASSE
DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

RECHERCHES

Sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon,

Par M. Biot.

Lu le 8 août 1808.

Les physiciens et les astronomes ont depuis long-temps remarqué que les objets qui sont vus très-près de l'horizon envoient quelquefois à l'observateur deux images, l'une directe, l'autre renversée. Personne n'est plus à portée que les marins d'observer ce phénomène; aussi est-il bien connu d'eux, et ils le désignent par un nom très-expressif, en l'appellant le *mirage*, parce qu'en effet il semble alors que les objets se réfléchissent comme sur un miroir. Picard décrit quelques apparences de ce genre dans

son voyage à Uranibourg. On en trouve aussi quelques-unes dans les mémoires des premiers Cassinis, mais il ne paroît pas qu'on en ait fait un objet spécial de recherches avant un mémoire de M. Huddart, inséré dans les *Transactions philosophiques de* 1797. M. Huddart rapporte qu'il a observé dans certaines circonstances que des vaisseaux à la voile présentoient, outre leur image directe, une image renversée. Il a vu aussi des sommets de collines qui paroissoient détachés de leur base, et suspendus dans l'air. Il attribue ce phénomène à l'évaporation qui, rendant les couches inférieures de l'air plus humides et par conséquent moins denses que les couches supérieures, doit, selon lui, faire prendre aux rayons lumineux une courbure convexe vers la terre et par conséquent produire une seconde image de l'objet. Mais M. Huddart ne faisoit pas attention que la différence des densités ne suffit pas pour déterminer cette courbure. La condition réellement nécessaire est la différence des pouvoirs réfringens. Or, le pouvoir réfringent des gaz ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi de leur nature et de leur composition chimique. D'après les expériences que l'on a faites sur la réfraction de l'eau, soit à l'état liquide, soit à l'état de vapeur, soit enfin à l'état de décomposition en la réduisant à ses gaz constituans, on doit conclure que le pouvoir réfringent de la vapeur aqueuse est, à force élastique égale, très-peu différent de celui de l'air; même s'il falloit assigner le sens de la différence, il seroit assez probable qu'il le surpasse d'une petite quantité. L'introduction de la vapeur aqueuse

dans l'air atmosphérique paroîtroit donc propre à augmenter le pouvoir réfringent plutôt qu'à le diminuer; par conséquent ce n'est pas à cette cause que l'on doit attribuer les phénomènes du mirage, et les images renversées des objets.

Il existe aussi dans les Transactions philosophiques pour 1789, un mémoire de M. Vince, où l'on trouve décrits un grand nombre de phénomènes de ce genre, des plus singuliers que l'on ait jamais vus. Le jour où l'auteur les aperçut avoit été très-chaud; le soir le temps fut très-lourd; le ciel étoit clair avec quelques nuages. En regardant des vaisseaux à la voile à diverses distances, M. Vince s'aperçut que quelques-uns d'entre eux présentoient des images renversées. Il les observa avec un télescope, et reconnut bientôt qu'en raison de leur éloignement et du côté de la mer où ils se trouvoient, ils présentoient des apparences très-diverses et très-variables d'un instant à un autre. Il vit parfois trois images, une renversée et deux droites, quelquefois deux seulement, et l'image renversée au-dessous de l'autre ou au-dessus. Toutes ces apparences changeoient à mesure que les vaisseaux s'approchoient ou s'éloignoient des limites de l'horizon. M. Vince cherche à expliquer ces phénomènes par des variations multipliées de densité dans les différentes couches d'air; et, en effet, s'il ne s'agissoit que d'expliquer la possibilité de la formation des images, on trouveroit une infinité de lois qui rempliroient cette condition. Mais cela ne suffit pas pour faire connoître la véritable cause du phénomène; car on peut mener de l'objet à

l'observateur, une infinité de trajectoires, qui toutes lui amèneront les rayons sous l'inclinaison où ils arrivent, et dont aucune ne sera la trajectoire véritable. Le caractère d'une véritable théorie doit être d'expliquer les rapports de position de ces diverses images, et les mouvemens simultanés qu'on y remarque lorsque l'objet s'avance ou s'éloigne. C'est à quoi j'espère être parvenu. M. Vince se représente toutes les trajectoires comme concaves vers la surface de la mer, et en cela analogues à la réfraction ordinaire. Il est au contraire extrêmement probable que leur courbure n'étoit pas dirigée du même côté dans toute l'étendue de leur cours; car, dans les phénomènes de ce genre, il arrive que le rayon lumineux suit une courbe sinueuse et serpentante, comme on le verra par plusieurs expériences que je rapporterai dans la suite de ce mémoire.

Il est fâcheux que M. Vince se soit contenté d'observer ces curieux phénomènes avec le télescope sans les mesurer, sans prendre, avec des instrumens, la dépression des images et celles de l'horizon de la mer.

Le phénomène du mirage le plus apparent, le mieux constaté, et qui a le plus attiré l'attention générale, est celui que M. Monge a décrit et expliqué dans les mémoires de l'Institut du Caire. Lorsque les soldats Français entrèrent dans le désert de l'Egypte, toute l'armée fut témoin d'un effet d'optique aussi nouveau que remarquable. Le pays qui forme une vaste plaine horizontale, parut tout couvert d'eau. Les villages bâtis sur de petits tertres paroissoient au-dessus de cette inondation, et

présentoient de loin, outre leur image directe, une image renversée. Les soldats séduits par l'illusion, couroient vainement vers cette eau imaginaire pour étancher la soif qui les dévoroit. Le rivage fuyoit devant eux; et l'image de l'eau reculant sans cesse, leur laissoit voir à sa place un sol aride et desséché.

M. Monge attribue ce phénomène à l'excessive chaleur du sol qui, dilatant les couches inférieures de l'air contiguës à sa surface, fait que la densité de l'air va en croissant de bas en haut jusqu'à une certaine hauteur au lieu d'aller en diminuant suivant la loi ordinaire de superposition des couches, et comme il conviendroit pour l'équilibre dans une température uniforme. On ne peut nier en effet que ce ne soit la véritable cause du phénomène. Les rayons lumineux infléchis dans ces couches inférieures de densités variables y donnent des trajectoires convexes vers la surface du sol, et produisent des images renversées. M. Monge compare cette inversion à celle que produit la réflexion intérieure dans les milieux transparens homogènes. En effet, cette comparaison rend la chose sensible, et elle seroit tout-à-fait exacte si les couches de densité variable n'avoient qu'une épaisseur infiniment petite. Quant à l'apparence d'une surface d'eau, M. Monge l'explique très-bien par la réflexion du ciel ou, pour parler exactement, de toutes les particules de l'atmosphère, qui se trouvant très-près de l'horizon, envoient aussi à l'observateur leurs images renversées comme feroient des objets terrestres, et en se réfléchissant autour de ces objets comme si c'étoit sur une eau

tranquille, concourent à compléter l'illusion. Nous verrons bientôt que le calcul confirme cette explication en y faisant quelques modifications très-légères; mais surtout il ne sauroit lui enlever une de ses particularités les plus remarquables qui est d'avoir été trouvée à la vue même du phénomène, au milieu d'un camp, parmi les hasards de la guerre et d'une vie pleine de dangers.

Dans le même temps que M. Monge expliquoit le mirage en Egypte, M. Wollaston en Angleterre publioit un très-beau travail sur le même sujet. Cet excellent physicien attribue aussi les doubles images à une densité de l'air croissante de bas en haut par l'effet de la chaleur du sol, et il prouve par des expériences thermométriques très-bien faites, que dans les circonstances où l'on observe de doubles images, cet état de l'air a toujours lieu. Il imite ces phénomènes et les agrandit en les observant sur des corps échauffés, à travers des liquides de densité inégale, et même sur la surface d'un fer rouge. Et non-seulement il décrit leurs apparences, leurs variétés, mais il les mesure avec des instrumens, et donne dans plusieurs cas les réfractions que les rayons éprouvent. Ces résultats sont très-précieux pour vérifier la théorie mathématique du phénomène, et l'on verra bientôt que j'en ai fait usage. Quant à cette théorie, M. Wollaston ne l'a point donnée. A la vérité, il prouve bien que les trajectoires décrites par les rayons lumineux doivent être convexes vers la surface du corps échauffé, mais comme il n'avoit point l'équation de ces trajectoires, il n'a pas discuté la manière dont elles se coupent, et la nature des caustiques

qui peuvent résulter de leurs intersections; or, c'est de là que dépend la multiplicité des images, leur situation et les rapports de ce phénomène avec la position de l'objet. Mais sous le rapport de la physique, son travail ne laisse rien à desirer, il est rempli d'expériences imaginées avec toute la sagacité, et exécutées avec toute l'adresse, qui distinguent cet habile physicien. Enfin, il a parfaitement atteint le but de l'auteur, qui étoit surtout de prouver que ce phénomène des doubles images dans l'air atmosphérique est dû à une variation de densité contraire à celle qui existe ordinairement.

Trois ans après, en 1803, M. Wollaston publia encore un autre mémoire sur le même objet. Ici il avoit surtout en vue de donner aux marins des procédés pour éviter l'influence des réfractions extraordinaires lorsqu'ils prennent hauteur; à cette occasion il rapporte un assez grand nombre d'observations faites par lui-même sur la Tamise, relativement à l'inversion des objets. Ceux qu'il a le plus ordinairement observés étoient les rames inclinées de quelques barques que le hasard amenoit sur la Tamise, et qui en effet étoient favorables pour l'observation à cause de leur obliquité. La méthode de M. Wollaston consistoit à mesurer l'angle entre le point où l'image renversée paroissoit plongée dans l'eau, et le point de l'image directe qui se trouvoit dans la même verticale. Malheureusement on voit par la théorie que cet angle est variable avec la distance de l'objet et la hauteur de l'œil, deux élémens que M. Wollaston n'a point observés, ou du moins dont il n'a pas donné les valeurs. Aussi les changemens acciden-

tels qui ont dû nécessairement y survenir, jettent-ils dans les observations de si grandes irrégularités que l'auteur en a été extrêmement surpris, sans savoir à quoi les attribuer. Mais un fait important qui est commun à toutes ces observations, c'est que toutes les fois que M. Wollaston a ainsi observé le mirage, la température de l'eau étoit plus chaude que celle de l'air : ce dont il a eu soin de s'assurer par des observations thermométriques qui sont consignées dans son mémoire.

Il arrive aussi quelquefois que des objets éloignés paroissent simplement suspendus en l'air; leur image est droite et n'est pas accompagnée, du moins en apparence, d'une seconde image renversée. On a donné à ce phénomène le nom de *suspension*, pour le distinguer du mirage. M. Monge l'attribue encore à la réflexion du ciel; mais il n'a pas dit pourquoi, dans ce cas, on n'aperçoit pas de seconde image, et je ne sache pas que personne ait donné l'explication de ce phénomène. Le fait est que la seconde image existe même dans ce cas, mais elle est extrêmement applatie et réduite à une dimension infiniment petite, ce qui empêche de l'apercevoir. C'est ce que je prouverai par la théorie et par l'expérience dans le cours de ce mémoire, en montrant par le calcul et par l'observation directe, comment se fait le passage du mirage à la suspension.

On trouve sur ces phénomènes un mémoire intéressant de M. Woltman dans les Annales de Gilbert. Il renferme un grand nombre d'observations que l'auteur a faites à Cuxhaven. L'objet observé étoit une maison située à une

grande distance. Le rayon visuel rasoit la surface de l'Elbe dans toute l'étendue de son cours. Malheureusement M. Woltmann n'avoit pas à sa disposition d'instrument divisé, et il a suppléé par un appareil plus propre à indiquer les variations de la réfraction qu'à en donner la mesure bien précise. Mais ce qui rend ce travail précieux, c'est que l'auteur ayant suivi ces phénomènes pendant plus d'une année, en a bien constaté les résultats généraux, et même plusieurs particularités intéressantes. Ainsi, il a constamment observé que lorsqu'il y avoit deux images distinctes ou même simple suspension, la température de l'eau étoit au moins de deux degrés de Farenheit plus haute que celle de l'air; et qu'au contraire il n'y avoit jamais ni suspension ni double image lorsque la température de l'eau étoit au-dessous de celle de l'air seulement de deux degrés de Farenheit. Quand la différence des températures étoit moindre que cette limite, le phénomène n'étoit pas constant. Quelquefois il avoit lieu, d'autres fois il ne se produisoit pas; et cela se conçoit très-bien, puisqu'une si foible différence peut n'être pas générale, et que la plus petite cause accidentelle, le moindre mouvement de l'air ou de l'eau peut la détruire et la faire passer en sens contraire. M. Woltmann a aussi observé la suspension et le mirage sur la neige, et même sur la glace, lorsque la température de ces corps s'est trouvée plus haute que celle de l'air, ce qui arrive souvent en hiver; et l'on voit encore par là qu'il ne faut pas chercher à ces phénomènes d'autres causes que l'inégalité des températures.

M. de Humboldt, à qui aucun genre de recherches n'échappe parmi celles qui sont utiles aux sciences, a fait aussi des observations de suspension et de mirage pendant son voyage aux Tropiques; mais habitué à connoître le prix des données exactes, il ne s'est pas contenté d'une simple description. Il a mesuré les dépressions des objets et celles de l'horizon de la mer avec un quart de cercle de Bird bien rectifié. Il a noté soigneusement la température et toutes les circonstances météorologiques; enfin, ce qui est le talent d'un bon observateur, quoiqu'il ne connût pas la théorie mathématique de ces faits, il n'a rien omis de ce qui pouvoit servir à l'établir ou à la vérifier. Aussi ces observations qu'il a bien voulu me communiquer m'ont-elles été fort utiles.

On doit encore ranger dans la même classe de phénomènes les apparences très-singulières que Legentil a observées à l'instant du lever du soleil pendant son séjour dans l'Inde, et qu'il a revues ensuite au coucher de cet astre sur les côtes de Normandie. Il les a consignées avec beaucoup de détail dans les mémoires de l'Académie des Sciences pour les années 1774 et 1789. Ces phénomènes qui n'avoient pas encore été expliqués, se déduisent très-simplement de la théorie; et en comparant les particularités qu'elle indique avec celles que Legentil a observées, on les trouvera d'accord en tout point.

Ce sont là les seules données que j'aie pu tirer des recherches des physiciens. On trouve encore dans les Annales de chimie et dans celles de Gilbert, quelques autres observations des mêmes phénomènes; mais comme

elles sont faites sans instrumens, ou par des procédés très-inexacts, ou enfin sans aucune mesure précise, elles ne peuvent servir qu'à constater le fait en lui-même, sans offrir les moyens de le calculer.

Au reste, depuis la première lecture de mon mémoire j'ai été assez heureux pour faire moi-même sur ce sujet, toutes les observations que j'ai pu désirer. L'occasion s'en est présentée, pendant le séjour que j'ai fait à Dunkerque dans l'hiver de 1808, avec M. Mathieu, pour la vérification de la latitude à l'extrémité boréale de la méridienne. Nous avions entrepris, M. Mathieu et moi, de profiter du voisinage de la mer, pour observer fréquemment avec un cercle répétiteur la dépression de l'horizon, en nous plaçant successivement à diverses hauteurs connues, ce qui devoit nous déterminer la forme de la trajectoire décrite par les rayons lumineux, suivant les diverses modifications de température que l'air et la mer éprouvent. Dans le cours de ces expériences, que nous rapporterons à la suite de ce mémoire, et qui contribueront peut-être à jeter quelque jour sur les variétés et les bizarreries des réfractions terrestres, nous découvrîmes sur la laisse de basse mer, un lieu où la suspension et le mirage étoient sensibles tous les jours. Le rayon visuel, après avoir rasé pendant long-temps cette surface sablonneuse et prolongée se terminoit à une foule d'objets, tels que des clochers, des maisons, des collines, des arbres, etc. qui paroissant suspendus en l'air et sans base, présentoient au-dessous d'eux leurs images renversées. Ces images situées aussi en l'air et au-dessus de l'horizon apparent, ressembloient parfaitement aux images réfléchies par l'eau; et l'illusion étoit

si forte que nous-mêmes ne pouvions nous en défendre, quoiqu'il nous fût bien facile de nous convaincre de notre erreur, puisque le bord de cette eau apparente n'étoit pas quelquefois à 200 mètres de nous. Nous avons souvent pris plaisir à y envoyer des hommes munis de perches qui nous servoient de signaux. A mesure qu'ils s'éloignoient de nous, on les voyoit s'enfoncer successivement dans cette mer apparente, et enfin s'y plonger entièrement, ainsi que leur image réfléchie. Rien n'égale, en apparence, les variétés et les bizarreries de ces phénomènes. Ils changent selon la hauteur des objets, selon leur distance, selon la nature du sol qui vous en sépare, surtout selon sa forme et selon la hauteur de l'observateur; de sorte que vous ne pouvez faire le moindre mouvement sans modifier toutes les apparences que vous observiez. Bien plus, la moindre variation de température les altère, et il suffit d'un simple rayon de soleil pour faire naître ou disparoître le prestige.

Mais toutes ces bizarreries même n'ont été pour nous qu'un aiguillon de plus. Nous les avons suivies avec plus de soin, d'opiniâtreté et de constance à mesure qu'elles sembloient se multiplier davantage. Guidés par la théorie, nous marchions toujours avec certitude, et chaque apparence nouvelle avoit pour nous un nouvel intérêt. Pour profiter complétement d'une occasion aussi favorable, nous avons eu soin de prendre des mesures exactes de tous les phénomènes avec le cercle répétiteur. Nous avons noté soigneusement les températures à diverses hauteurs au-dessus du sol, les dépressions de l'horizon apparent et celles des objets, leur distance, leur

configuration et les rapports de leur forme réelle avec celle des images réfléchies. Nous avons déterminé la forme des trajectoires et celle des caustiques qui les limitent, au moyen d'expériences directes, et pour ainsi dire, par des sondes faites dans la mer apparente, produite par la réflexion du ciel. Enfin nous avons étudié par des nivellemens exacts, la forme du terrain rasé par le rayon visuel, forme qui est ici d'une extrême importance, puisqu'elle détermine la direction des couches d'égales densités. Il nous a été facile de voir que la fréquence et l'intensité du phénomène dans le lieu où nous l'avons observé, étoit due à une configuration particulière de la surface sablonneuse, résultat que la théorie nous avoit fait prévoir d'après les seules apparences observées avant que nous l'eussions vérifié par les nivellemens; de sorte qu'en réunissant toutes les occasions que nous avons eues alors d'examiner en détail les variétés de ces phenomènes, telles que nous les rapporterons dans ce mémoire, nous croyons qu'on ne les a jamais observés si complétement, même en Egypte.

Je ferai mention ici d'un autre phénomène que nous avons observé, Arago et moi, en Espagne, et qui, au premier coup d'œil, paroîtra peut-être bien éloigné des précédens, quoiqu'il s'explique très-facilement par la même théorie. Il ne s'agit plus seulement ici de deux images, comme dans le mirage, ou de trois, comme dans les phénomènes observés par M. Vince, mais d'une multitude qui apparoissent les unes au-dessus des autres en nombre indéfini. Lorsque nous observâmes ce curieux phénomène, nous étions stationnés sur la montagne de

Desierto de las Palmas, élevée de 727 mètres sur le bord de la mer, dans le royaume de Valence. Nous observions de nuit, au cercle répétiteur, les réverbères allumés dans l'île d'Yviza, sur la montagne de Campvey, élevée de 420^{m} et distante de 161008^{m} (41 $\frac{1}{3}$ lieues). C'étoit là un des côtés de notre grand triangle. Nous vîmes d'abord la lumière de Campvey simple, et semblable à une très-petite étoile, comme elle paroissoit ordinairement, et nous fîmes ainsi trois couples d'observations. Mais au quatrième couple, nous commençâmes à voir à Campvey deux lumières exactement dans la même verticale, et distantes d'une quantité que, sur le fil, nous estimâmes au moins de trois minutes. La vraie lumière, du moins celle que nous jugeâmes telle, étoit à sa place ordinaire. L'autre, que nous crûmes être la lumière factice, étoit plus élevée dans le ciel en réalité; ce qui la mettoit plus bas dans nos lunettes qui renversent. Elle étoit aussi plus grosse que l'autre, plus dilatée et un peu irisée. Nous la prîmes d'abord pour une étoile, bien étonnés d'en rencontrer une précisément dans le vertical des réverbères de Campvey. Mais enfin cette prétendue étoile ne changeant point de place, il fallut bien y reconnoître une image extraordinaire. Bientôt nous ne vîmes pas seulement deux lumières, mais trois, quatre ou davantage. Elles se formoient et disparoissoient ensuite sans que le nombre de celles qui paroissoient ensemble eût rien de déterminé. Cependant on remarquoit que les plus basses, les plus voisines de ce que nous croyons être l'image ordinaire, paroissoient plus tôt que les autres et plus facilement; mais nous remarquâmes que les plus

hautes en réalités, paroissoient toujours les plus larges et les plus brillantes (1). Cette formation successive a beaucoup d'analogie avec un autre phénomène que nous avons observé plusieurs fois dans d'autres stations. On voyoit le point lumineux s'allonger comme une petite colonne de feu sous le fil vertical de la lunette, et s'étendre ainsi jusqu'à une certaine longueur, après quoi la colonne se rompoit tout à coup et formoit deux images dont la plus basse étoit sensiblement rouge, et la supérieure sensiblement verte; ou bien elle se concentroit de nouveau sur elle-même; et redevenoit un point lumineux unique, de dimension insensible, comme auparavant. L'allongement de la lumière équivaut à une multitude infinie d'images contiguës, au lieu que dans l'observation du Désierto, la lumière de Campvey avoit toutes ses images séparées et distinctes.

Le lendemain de cette observation, à la pointe du jour, la mer parut au loin couverte de masses de brouillard, noires, arrondies, moutonnées et agglomérées, de manière à représenter parfaitement des montagnes. En dirigeant les lunettes sur Yviza, on ne voyoit point cette île ni ses montagnes, mais seulement des masses de brouillard qui en imitoient la forme, et qui auroient pu nous tromper, si nous avions été moins habitués à reconnoître Yviza et surtout Campvey. Ces brouillards n'existoient

(1) Depuis cette époque, Arago se trouvant seul à la station de Cullera, dans le royaume de Valence, a revu ce même phénomène des images multiples, en observant les réverbères du Desierto de las Palmas, éloigné de 103800 mètres ($23\frac{1}{3}$ lieues), et il l'a consigné dans nos registres d'observation.

point sur la surface de la mer à la chute du jour, ils s'y étoient précipités pendant la nuit. Nous avons depuis constamment observé cette circonstance toutes les fois que nous avons vu des phénomènes de réfraction extraordinaire. Ces masses de brouillard ainsi affaissées, étoient pour nous l'indice le plus certain d'un temps parfaitement calme. Au Desierto de las Palmas nous les avons revues ainsi pendant plus de quinze jours consécutifs, couvrant la surface de la mer à la pointe du jour, s'élevant et se dissipant par l'effet de la chaleur du soleil, puis retombant de nouveau pendant la nuit. Ce jeu alternatif continuoit jusqu'à ce qu'un vent du nord vînt les chasser. Je ne crois pas cependant que ce phénomène contribue à produire les réfractions extraordinaires; mais comme il indique le calme parfait de l'atmosphère, il doit en accompagner fréquemment l'apparition. On a comparé le phénomène des doubles images à celui de la réflexion intérieure dans une glace. Le phénomène des images multiplié en nombre indéfini, peut se comparer de même à celui des réflexions intérieures qui se font successivement sur les deux faces opposées d'une glace, lorsqu'on regarde un point lumineux à travers elle, dans le sens de son tranchant; mais cette manière d'expliquer le phénomène, ne doit être considérée que comme approchée. La réflexion des trajectoires ne peut pas se faire dans l'air atmosphérique, comme dans les milieux de densité uniforme, où les trajectoires n'ont qu'une portion curviligne infiniment petite, près de la surface de ces milieux; et quoique l'on puisse donner une idée de quelques phénomènes du

mirage, en les rapportant à cette limite, il est vrai de dire aussi qu'un grand nombre, et surtout ceux qui présentent des images multiples, ne peuvent nullement se représenter ainsi, parce qu'ils dépendent de la multiplicité des branches de la caustique sur laquelle se fait la réflexion, caustique qui dans le cas des milieux de densité constante, n'a qu'une seule branche concave vers leur surface, et infiniment applatie.

Pour avoir la véritable théorie de ces phénomènes, il faut considérer le mouvement de la lumière dans les milieux, dont le pouvoir réfringent est variable selon les différentes couches. C'est ce que j'ai tâché de faire; et comme le problème pris dans toute cette généralité est insoluble dans l'état actuel de l'analyse, j'ai cherché à distinguer, autant qu'il m'a été possible, les résultats généraux qui conviennent à toutes les lois de réfraction de ceux qui dépendent nécessairement de la loi particulière suivant laquelle on fait varier les pouvoirs réfringens; et les résultats qui sont dans ce dernier cas étant très-multipliés, j'ai choisi pour exemples quelques-unes des lois de réfraction les plus simples, les plus approchées de la nature, et j'en ai développé les conséquences; c'est ainsi que l'on apprend à discuter les équations de toutes les courbes, en en discutant quelques-unes, quoique leurs propriétés particulières soient variées à l'infini.

Examen des trajectoires décrites par les molécules lumineuses, dans un milieu diaphane composé de couches planes et parallèles, dont la densité et la nature chimique sont supposées variables.

Supposons que les couches dans lesquelles le pouvoir réfringent est constant soient horizontales ; ce seroient les couches d'égale densité, si le milieu étoit homogène. Plaçons l'origine des coordonnées au point où se trouve l'observateur ; prenons l'axe des x horizontal, l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut.

Soit n la vitesse de la lumière dans le vide ; nommons K la force réfringente d'une couche quelconque, ρ sa densité. Les molécules lumineuses en pénétrant dans cette couche, n'ayant traversé que des faces planes, auront la même vitesse que si elles y avoient pénétré directement. On aura donc dans toute l'étendue du milieu

$$\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = n^2 + 4\,K.\,\rho$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut maintenant éliminer dt : or cela est très-facile, car les couches étant planes et parallèles, leurs actions attractives dans le sens de leur longueur se contrebalancent mutuellement, et par conséquent la vitesse dans cette direction est constante, et la même que dans la couche supérieure. Or, en nommant I l'inclinaison à l'horizon de la tangente extrême de la trajectoire, ou l'angle TOX, *fig.* 1, on a dans la couche supérieure

$$\frac{dx}{dt} = n.\ cos.\ I. \sqrt{1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)}$$

Cette valeur est donc la même pour toutes les couches; ainsi en l'employant pour éliminer dt on trouve

$$n^2.\ cos^2.\ I. \left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right]$$

$$+ n^2.\ cos^2.\ I. \left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right] \frac{dz^2}{dx^2} = n^2 + 4\,K.\,\varrho$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{sin^2.\ I. \left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right] - 4.\left[\frac{(K)}{n^2}.\,(\varrho) - \frac{K}{n^2}\,\varrho\right]}{cos^2.\ I. \left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right]}$$

Le pouvoir réfringent $\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)$ de la couche supérieure où l'observateur se trouve, est supposé donné par l'observation immédiate. Le pouvoir réfringent $\frac{4\,K}{n^2}.\ \varrho$, variable dans les différentes couches, est une fonction de z dépendante de la loi suivant laquelle varie la densité des couches et leur composition chimique. Si cette loi est connue et donnée, l'équation différentielle précédente ne dépend plus que des quadratures, et son intégrale donnera en quantités finies l'équation du rayon lumineux.

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho) = (P);\quad m = \frac{\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)}{1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)} = \frac{(P)}{1 + (P)}$$

(P) est le pouvoir réfringent de la couche où se trouve l'observateur; P est celui d'une couche quelconque. Et prenons la valeur de $\frac{dz}{dx}$, nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\sin^2. I - m. \left[\frac{(P) - P}{(P)}\right]}}{\cos. I}$$

Les deux signes du radical se rapportent aux deux branches symétriques de la trajectoire. Nous considérerons d'abord la première branche, et par conséquent nous prendrons le signe supérieur du radical, puisque x croît en même temps que z; nous aurons ainsi

$$dx = \frac{\cos. I. dz}{\sqrt{\sin^2. I - m. \left[\frac{(P) - P}{(P)}\right]}}$$

La différence $\frac{(P) - P}{(P)}$ est une fonction de z qui est nulle au niveau de l'observateur, et qui devient égale à l'unité dans le vide. Soit donc

$$\frac{(P) - P}{(P)} = \varphi. (z)$$

La fonction φ variera entre 0 et $+1$, et sa forme dépendra de la loi suivant laquelle le pouvoir réfringent varie dans les différentes couches. On aura ainsi:

$$dx = \frac{\cos. I. dz}{\sqrt{\sin^2. I - m\varphi}}$$

et en représentant par Z_z l'intégrale du second membre,

la valeur de x aura cette forme $x = Z_z - Z_0$, Z_0 représentant la valeur de cette intégrale quand z est nul.

Le nombre et la position des images visibles dépend des intersections des différentes trajectoires parties du même point. Nous allons donc discuter la forme de ces trajectoires.

Discussion de la première branche des trajectoires, et de la position de leurs minima *sous diverses inclinaisons.*

Examinons d'abord dans quel sens elles tournent leur convexité. Pour cela élevons la valeur de $\frac{dz}{dx}$ au carré, nous aurons :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = tang^2.\ I - \frac{m\varphi}{\cos^2.\ I}$$

différenciant, il vient

$$2.\ \frac{dz}{dx}.\ \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{m\varphi'}{\cos^2.\ I}.\ \frac{dz}{dx}$$

φ' est le coefficient différentiel de la fonction φ. Supprimant le facteur $\frac{dz}{dx}$ qui est inutile dans cette circonstance, puisqu'il ne convient qu'à une trajectoire horizontale, l'autre facteur donne

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{m\varphi'}{2.\ \cos^2.\ I}$$

ou, en mettant pour φ_1 sa valeur qui est $-\frac{1}{(P)}.\ \frac{dP}{dz}$,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{m}{2\ (P).\ \cos^2.\ I}.\ \frac{dP}{dz}$$

Si le pouvoir réfringent P décroît à mesure que l'on s'enfonce dans le fluide, dP sera le signe contraire à dz, et alors la courbe sera concave vers l'axe des x, c'est-à-dire vers la couche dans laquelle se trouve l'observateur. Si, au contraire, P va croissant en même temps que z, $\frac{dP}{dz}$ sera positif, et la courbe sera convexe vers cette couche. Partout elle suivra les inflexions du pouvoir réfringent, en tournant sa concavité du côté où il est moindre.

La tangente des trajectoires devient horizontale lorsque $\frac{dz}{dx}$ est nul; ce qui donne

$$sin^2. I = m\varphi \quad \text{ou} \quad sin. I = \pm \sqrt{m. \frac{(P) - P}{(P)}}$$

Les deux valeurs de $sin. I$ répondent aux deux inclinaisons égales et opposées des deux branches de chaque trajectoire, lesquelles sont symétriques autour de leur *minimum*.

Quand (P) sera donné ainsi que I, cette équation déterminera le pouvoir réfringent P de la couche fluide dans laquelle la tangente de la trajectoire est horizontale.

Si le pouvoir réfringent va décroissant à mesure que l'on s'enfonce dans le fluide, P y sera toujours moindre que (P) : ainsi les valeurs de $sin. I$ seront réelles. Les minima des trajectoires seront donc situés dans ces couches. Dans ce cas les plus grandes valeurs de $sin. I$ répondent aux plus petites valeurs de P, c'est-à-dire que les rayons lumineux qui en partant de l'observateur fe-

ront les plus grands angles avec l'horizon, pénètreront le plus avant dans le fluide et auront le minima de leurs trajectoires aux points les plus bas.

Si au contraire P va croissant dans les couches inférieures, la valeur de *sin.* I sera imaginaire dans ces couches, et par conséquent les minima des trajectoires n'y seront pas situés, mais ils se trouveront dans les couches supérieures. Généralement ce cas rentre dans l'autre en changeant z en $-z$. C'est pourquoi le premier sera le seul que nous considérerons.

Pour avoir la loi suivant laquelle la hauteur des minima varie, il faut différencier par rapport à I et z l'équation

$$sin^2. \, I = m\varphi$$

et en désignant par δ ce genre de différentielles, on aura

$$\delta z = \frac{2. \frac{\varphi}{\varphi'}}{tang. \, I} \, \delta I$$

ou, en exprimant δI en secondes,

$$\delta z = \frac{2. \frac{\varphi}{\varphi'}. \, sin. \, 1''}{tang. \, I}. \, \delta I$$

et comme $\frac{\varphi}{\varphi'} = -\frac{[(P) - P]}{\frac{dP}{dz}}$, on voit que δz est de signe contraire à δI, c'est-à-dire que le *minimum* s'abaisse dans le fluide quand l'inclinaison de la trajectoire augmente; résultat conforme à ce que l'on a vu plus haut.

Pour interpréter complètement cette expression, construisons la courbe qui représente la suite des pouvoirs réfringens à diverses profondeurs. Soit NX, *fig.* 1, cette courbe, dont les valeurs de z comptées sur l'axe AZ seront les abscisses, et dont les valeurs de P seront les ordonnées. Si par le point X où cette courbe coupe l'axe des x, on mène la verticale XZ', la courbe NX rapportée à cet axe représentera la suite des valeurs de $(P) - P$, et sa soutangente représentera $\frac{\varphi}{\varphi'}$. Or, plus la densité variera rapidement, plus la courbe NX sera applatie vers l'axe AX, et par conséquent plus sa soutangente sera petite. D'où l'on voit que, à incidence égale, la valeur de δz est d'autant moindre que le pouvoir réfringent varie avec plus de rapidité.

Si cette variation étoit infiniment rapide, la courbe NX deviendroit une ligne droite perpendiculaire à l'axe AZ; la soutangente $\frac{\varphi}{\varphi'}$ seroit constamment nulle, et l'on auroit alors

$$\delta z = 0$$

Tous les *minima* des trajectoires se trouveroient donc sur une même ligne horizontale, quelque fût l'inclinaison I. Ce cas est celui de la réflexion au contact de deux milieux homogènes, de densités ou de nature diverses, qui se touchent par une face plane.

Mais toutes les inclinaisons ne sont pas propres à donner des trajectoires qui aient leur minimum dans le fluide, car la plus petite valeur que P puisse avoir, c'est d'être égal à zéro; ainsi la plus grande valeur de *sin.* I est

$sin.\ I = \sqrt{m}$; d'où l'on tire $tang.\ I = \sqrt{(P)}$

Les valeurs de I qui excéderoient cette limite exigeroient que le pouvoir réfringent P pût diminuer jusqu'à devenir négatif, c'est-à-dire que le milieu fluide repoussât la lumière au lieu de l'attirer, ce qui ne sauroit avoir lieu dans les cas que nous considérons.

Cette valeur de $sin.\ I$ donne

$$cos.\ I = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4.\ (K)}{n^2}.\ (\varrho)}}$$

Sous cette forme on reconnoît que I est l'angle sous lequel un rayon lumineux cesse de se réfléchir dans un milieu diaphane dont le pouvoir réfringent est $\frac{4\ (K)}{n^2}.\ (\varrho)$. Les rayons menés sous une inclinaison plus grande donneroient encore des trajectoires curvilignes; mais ces trajectoires sortiroient du fluide avant d'avoir atteint leur *minimum*.

Dans l'air atmosphérique, si l'on suppose que (ϱ) soit la densité à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^{m}76$, j'ai trouvé par des expériences directes qui sont rapportées dans les *Mémoires de l'Institut* pour 1807,

$$\frac{4.\ (K)}{n^2}.\ (\varrho) = 0.0005883641$$

ce qui donne

$$m = 0.0005880200$$

et l'on trouve par l'équation précédente

$$I = 1^{\circ}\ 23'\ 22''$$

Telle est la limite de la réflexion intérieure dans l'air atmosphérique, et il s'ensuit qu'à travers des couches d'air planes et parallèles, la vision par des secondes branches de trajectoires ne peut jamais avoir lieu que sous des inclinaisons moindres que la précédente.

Les inclinaisons possibles dans chaque cas seront même fort au dessous de cette limite ; car, en supposant P nul, on suppose qu'il y a le vide dans la couche inférieure, et c'est ce qui n'a jamais lieu dans les observations. La densité de la couche inférieure, loin d'être nulle, est au contraire le plus souvent peu différente de (ϱ), surtout dans les phénomènes produits par la seule chaleur naturelle du soleil, comme sont ceux qui s'observent à la mer ou dans les plaines sablonneuses. Alors, en nommant ϱ_1, la densité de l'air à la surface du sol, la limite de I pour la réflexion sera donnée par la formule

$$sin.\ I = \sqrt{m.\ \frac{(\varrho) - \varrho_1}{(\varrho)}}$$

car des trajectoires menées sous des inclinaisons plus grandes entreroient nécessairement dans le sol avant d'avoir atteint leur minimum. Si l'on représente par (p) et (t) la pression et la température dans la couche supérieure où l'observateur se trouve, et par p' et t' les quantités analogues dans la couche qui repose sur le sol, la for-

mule précédente donnera d'une manière très-approchée

$$sin^2. I = (m). \left[\frac{(p)}{0.76. [1 + (t) 0.00375]} - \frac{p'}{0.76. [1 + t' 0.00375]} \right]$$

(m) étant la valeur de m donnée ci-dessus pour la température de la glace fondante et la pression de 0^m76, si l'observateur est assez peu élevé au-dessus du sol pour que la variation du baromètre dans cet intervalle soit insensible, on aura $(p) = p'$, et la valeur précédente deviendra

$$sin^2. I = \frac{(m). (p)}{0.76}. \frac{[t' - (t)]. 0.00375}{[1 + (t). 0.00375]. [1 + t'. 0.00375]}$$

Supposons, par exemple, que la température à la surface du sol soit de 55° du thermomètre centésimal, et qu'elle soit de 25 dans la couche supérieure où l'observateur se trouve, et prenons le baromètre à 0.76 dans les deux couches; ces différences sont bien les plus grandes que la chaleur du soleil puisse produire même sous les tropiques. Dans ce cas on trouve

$$I = 24' \; 20''$$

Si, pour prendre un autre extrême, on suppose que la température de l'air dans la couche supérieure soit — 10° et qu'elle soit + 10° dans la couche inférieure, ce qui peut arriver, quoique bien rarement, dans nos climats lorsqu'on observe sur la surface de la mer en hiver, on aura

$$I = 22' \; 51''$$

Telles sont donc les limites extrêmes de la réflexion dans

l'air atmosphérique lorsque les différences de température seront le résultat d'un état naturel de l'atmosphère.

Il seroit bien intéressant de comparer la valeur de *sin. I* à des expériences exactes faites sur des plaques métalliques parfaitement planes, et chauffées à des degrés déterminés. Ce seroit un moyen de savoir si le coefficient de la dilatation de l'air 0,00375 donné par Gay-Lussac, est encore exact à de hautes températures, en supposant toutefois que la force réfringente de l'air, à ces températures, restât encore proportionnelle à sa densité; ce qui est extrêmement probable d'après les expériences que nous avons faites, Arago et moi, sur l'air raréfié. Mais, à défaut d'expériences de ce genre, nous nous contenterons d'appliquer la formule à quelques autres cas, qui pourront servir à en montrer l'usage.

Je choisirai d'abord une observation faite par M. Wollaston, sur un grand chemin sablonneux.

Le thermomètre plongé dans le sable marquoit .	38°3 Divis. centésim.
A quatre pouces anglais au-dessus du sol, ou environ 1 décimètre	27°8
A un pied anglais ou à trois décimètres au-dessus du sol	24°5

Nous supposerons qu'à cette dernière hauteur l'influence du sol étoit déjà insensible, ensorte qu'au-dessus de cette couche, le rayon poursuivoit sa route en ligne droite jusqu'à l'observateur, que je suppose aussi au-dessus de cette limite. Dans ces circonstances, la réfraction observée par M. Wollaston étoit d'environ 9'; mais comme la surface du sol n'est jamais parfaitement plane,

on n'a pas ici l'avantage de savoir si la trajectoire observée est la trajectoire limite qui est tangente à la surface du sol. On doit même remarquer à ce sujet que les plus petites inégalités du sol ont une influence très-sensible sur le phénomène, en interceptant les trajectoires les plus basses, avant ou après leur *minimum*, et ne laissant passer que celles dont le *minimum* surpasse ces inégalités. Alors, soit que vous observiez la réflexion du ciel ou l'image renversée d'un objet, vous ne pouvez l'apercevoir que dégagée de ces ondulations, et les trajectoires plus basses ne font que continuer l'image du sol plus loin qu'elle ne devroit l'être si sa surface étoit parfaitement plane. Or ces variations de hauteur, quoique fort petites, en introduisent de très-grandes dans la température des couches où se fait le *minimum*. Enfin il est très-probable que le thermomètre placé sur la surface d'un sol échauffé ou très-près de cette surface, indique toujours une température plus haute que celle de l'air qui repose sur le sol, à cause de la rayonnance qui agit sur la boule du thermomètre, tandis qu'elle n'affecte point l'air d'une manière sensible; et aussi parce que l'air échauffé, s'échappant par l'excès de sa légèreté spécifique, se refuse ainsi à prendre toute la chaleur que le sol pourroit lui communiquer. Par ces raisons il sera plus sûr de parler de ne point faire de supposition relativement à la hauteur de la trajectoire que M. Wollaston a observée, et de partir au contraire de cette réfraction comme d'une donnée pour calculer les différences de température entre la couche supérieure et celles

du minimum de la trajectoire. Regardons donc I et (t) comme données, et cherchons la différence $t' - (t)$ des températures extrêmes, nous trouverons ainsi

$$t' - (t) = \frac{\sin^2 . I . [1 + (t) . 0.00375]^2}{0.00375 . \left[\frac{(m).(p)}{0.76} - \sin^2 . I . [1 + (t) . 0.00375]\right]}$$

En substituant dans cette formule les nombres donnés par M. Wollaston, c'est-à-dire supposant $I = 9'$, et prenant $(t) = 24.5$ pour la température dans la couche où se trouvoit l'observateur, nous aurons

$$t' - (t) = 3.8$$

et comme on a $(t) = 24.5$, il en résulte

$$t' = 28.3$$

Telle étoit donc la température de l'air au point le plus bas de la trajectoire. Elle est fort au-dessous de celle qu'indiquoit le thermomètre plongé dans le sable, et nous avions prévu cet effet. Si l'on devoit l'attribuer tout entier aux inégalités du terrain, on voit, d'après la progression des températures observées, que la trajectoire passoit à moins de 1 décimètre du sol, distance que l'on peut en effet regarder comme la moindre possible parmi toutes celles qui sortent des inégalités inévitables d'un grand chemin. Si le *minimum* eût été placé à la surface même du sol, la réfraction eût été de $17'$; mais le moindre obstacle, la plus petite pierre placée sur le sol auroit suffi pour l'intercepter, et on n'auroit pu l'apercevoir que sur un corps uni comme un miroir, ou sur la surface des eaux.

Nous avons fait, M. Mathieu et moi, des observations de ce genre à Dunkerque sur la laisse de basse mer, et, pour plus d'exactitude, nous avons nivelé soigneusement le terrain, afin d'en connoître les ondulations; car ces ondulations déterminant la direction des couches, leur communiquent leur propre inclinaison qu'il faut aussi ajouter ou ôter aux dépressions apparentes conclues des distances au zénith. Voici, d'après nos expériences, la série des températures à diverses hauteurs, observée le 8 mars 1809.

Le thermomètre, placé sur le sable et au soleil, marquoit .	13°5
Sur le sable et à l'ombre	11.0
A 3 centimètres et à l'ombre	9.5
A 15 centimètres	7.0
A 65 centimètres	6.3
A 93 centimètres	6.1

Au-dessus de cette limite la température devenoit sensiblement constante; le centre du cercle étoit placé un peu au-dessus, à $1^{m}17$. La dépression de l'horizon apparent sur le sable, par six observations au cercle répétiteur, fut trouvée de $8'\ 15''46$; l'inclinaison propre du terrain la diminuoit de $1'\ 18''$: donc on l'a augmentée. Avec ces valeurs on trouve

$$t' - (t) = 2.76 \quad \text{et par suite} \quad t' = 8.86$$

Le *minimum* de la trajectoire qui paroissoit être la trajectoire limite, passoit donc à très-peu près à 3 centimètres du sol, si toutefois l'infériorité de la température calculée doit être attribuée entièrement à cette cause; et l'on voit que cette hauteur étoit à peine suffisante pour

dégager la trajectoire des petites ondulations, et, si je puis le dire, des petites rides imprimées sur la surface du sable par le mouvement alternatif des vagues au moment du reflux. Or telle étoit la disposition du terrain que, malgré cette foible différence des températures extrêmes, le phénomène des doubles images et celui du renversement étoient extrêmement sensibles.

Nous avons réuni dans le tableau suivant les résultats des observations du même genre faites à différens jours.

Dépressions de l'horizon apparent, observées à Dunkerque sur la laisse de basse mer, à l'ouest et au pied du Risban.

Jours des observations.	Baromètre.	Dépression apparente, corrigée de l'inclinaison du terrain.	Thermomètre de l'air au niveau de l'objectif de la lunette.	Thermomètre sur le sable et au soleil.	Température au *minimum* de la trajectoire calculée.	Différence des températures extrêmes, calculée.	État de l'atmosphère.
	M.		D.	D.	D.	D.	
7 mars .	0.7744	8′ 0″7	+ 6.3	+ 11.5	8.90	2.60	Beau ciel; vent N. foible.
8......	0.7693	8 15.5	6.1	13.5	8.86	2.76	Beau ciel; v. N. N. E. foible.
10	0.7699	5 14.2	5.5	7.5	6.57	1.07	Point de soleil; temps couvert et froid.
11.......	0.7700	6 57.9	6.1	10.3	8.00	1.90	Ciel nuageux; v. N. E. foible.
19.......	0.7647	5 45.2	11.3	13.4	12.62	1.32	Ciel couvert; soleil par intervalles; vent E. fort.
23.......	0.7625	4 26.0	13.3	14.3	14.13	0.83	Ciel vaporeux; vent S. S. E.

Dans toutes ces observations, la température de l'air, calculée pour le *minimum* de la trajectoire, est toujours moindre que la température indiquée par le thermo-

mètre appliqué sur la surface du sol. Cela peut, comme nous l'avons dit, résulter des petites inégalités du terrain; mais une autre cause qui y contribue aussi très-probablement, c'est que l'air inférieur s'échappant dès qu'il s'échauffe, en vertu de sa légèreté spécifique, ne peut pas acquérir toute la température du sol, à moins qu'il ne soit retenu par quelque obstacle. D'après cette considération on voit que la température de l'air dans la couche inférieure, doit participer de celle des couches supérieures qui, descendant vers le sol, viennent sans cesse la renouveller. Ainsi lorsqu'une barre métallique a une de ses extrémités plongée dans la glace et l'autre dans l'eau bouillante, les températures réelles de ces extrémités ne sont ni celle de l'eau bouillante ni celle de la glace; mais elles participent de l'une et de l'autre, suivant des lois que le calcul et l'expérience s'accordent également à déterminer. La preuve que les inégalités du sol ne produisent pas seules ce phénomène, c'est que nous le concluons également d'un grand nombre d'observations que nous avons faites de la dépression de l'horizon sur la surface de la mer à laquelle on ne sauroit attribuer de semblables inégalités. Dans les expériences faites sur le sable, on peut remarquer que la différence réelle des températures est justement la moitié de celle que les thermomètres indiquent. Les observations que nous avons faites sur la surface de la mer ne s'écartent pas beaucoup de cette loi. Seroit-ce une propriété générale qui tînt à la manière dont l'air s'échauffe? Nous l'ignorons; cependant cela paroît peu

probable : il semble plutôt que l'étendue de cette différence doit varier selon les rapports de température de l'air extérieur et du corps échauffé, selon la forme de ce corps, et surtout selon la facilité plus ou moins grande que sa position donne à l'air échauffé pour s'échapper de sa surface. Quoi qu'il en soit, ces résultats montrent que dans les observations barométriques, où l'on a besoin de connoître la température propre de l'air ambiant, il ne faut point placer le thermomètre très-près de terre, mais l'élever à la plus grande hauteur où on puisse le lire, afin de le dégager de l'action rayonnante du sol et le mettre au-dessus des variations rapides que la chaleur communiquée immédiatement par le contact, introduit dans la température des couches inférieures. C'est ce que M. Ramond a toujours pratiqué.

Parmi les expériences de M. Wollaston sur la même matière, on en trouve une qui est surtout faite dans des circonstances très-favorables. M. Wollaston observa le renversement des images sur une barre de bois exposée au soleil. Le décroissement des températures étoit très-rapide; car, en les mesurant avec un très-petit thermomètre, on avoit

Sur la surface de la barre, le thermomètre en contact avec elle . . . . 35.6 centigrade.

A la distance de $\frac{1}{4}$ de pouce anglais, ou environ 6 millimètres 22,8

La réfraction observée surpassoit 20'.

Ici nous ne connoissons point la température de l'air ambiant, il est seulement probable qu'elle étoit plus

basse que celle qui avoit lieu à $\frac{1}{4}$ de pouce de la barre. Prenons donc pour donnée la température t' à la surface même de la barre, et cherchons la valeur de (t); nous aurons d'abord

$$t' - (t) = \frac{\sin^2 . I . (1 + t' \, 0.00375)^2}{0.00375 . \left[\frac{(m).(p)}{0.76} + \sin^2 . I . (1 + t' . 0.00375) \right]}$$

et en y mettant les nombres donnés par Wollaston, on trouvera

$$t - (t) = 18.5$$

on a d'ailleurs

$$t' = 35.6 \quad \text{Donc} \quad (t) = 17.1.$$

Telle devoit donc être alors la température de l'air ambiant selon notre théorie, et cette valeur est très-vraisemblable; car, la véritable valeur étoit nécessairement moindre que 22.8 qui avoit lieu à $\frac{1}{4}$ de pouce de la barre, et cependant elle devoit différer peu de cette quantité, à peu près comme le thermomètre à l'ombre diffère du thermomètre au soleil.

Enfin, dans la dernière observation de M. Wollaston que nous allons calculer, les rayons visuels passoient sous la surface d'une plaque de fer rouge, et très-près de cette surface, de sorte que dans ce cas la légèreté spécifique de l'air échauffé s'opposoit à sa dissipation. La plus grande réfraction a été, selon cet habile physicien, jusqu'à $1^\circ \, 15'$. Il ne nous a point donné les températures extrêmes ni la hauteur du baromètre relative à cette observation; mais cette dernière ayant peu d'in-

fluence peut être encore supposée sans erreur sensible égale à $0^{m}76$; et quant aux températures, comme à des degrés de chaleur si élevés la réflexion approche du *maximum* qu'elle peut atteindre dans l'air, une petite erreur dans les degrés est beaucoup moins sensible que dans les expériences précédentes. Nous pouvons donc supposer que la température de la plaque de fer est celle qu'ont assignée DeLuc et Watt pour la chaleur du fer rouge, c'est-à-dire de 1277 degrés de Fareinhet, ou 692 du thermomètre centésimal ; de plus, nous prendrons la température de l'air égale à 12°, ce qui est à peu-près sa valeur moyenne à Paris et à Londres. En calculant avec ces données la valeur de *sin. I* d'après la formule, on trouve

$$I = 1^{\circ}\, 9'\, 7''$$

Cette valeur s'écarte peu de la limite extrême 1° 15′ fixée par Wollaston ; et l'on peut bien pardonner cette différence quand on songe à l'incertitude qui reste encore dans les données dont nous avons fait usage, et à celle de l'observation même dans laquelle Wollaston n'a probablement pas cherché à mettre toute l'exactitude qu'exige une expérience calculée. On l'élèveroit à 1° 11′ en supposant que l'observation a été faite à la température de 0, et l'on satisferoit facilement à l'observation, si elle étoit parfaitement sûre en modifiant la valeur adoptée pour la température de la plaque rouge, valeur qui au reste étoit probablement plus forte que nous ne l'avons supposé, puisque Saussure et Watt ont dû l'indiquer dans son *minimum*.

Il existe encore des expériences de ce genre faites en Allemagne par M. Gruber de Berlin ; mais la plaque de fer échauffée sur laquelle ce physicien observoit n'étoit pas parfaitement plane, ainsi qu'il en fait lui-même la remarque : elle étoit concave vers le rayon lumineux, ce qui empêchoit les trajectoires de toucher la surface du fer ; et de là il résulte que toutes les réfractions observées par M. Gruber sont plus petites que la plus grande qui auroit pu avoir lieu, d'après la différence des températures extrêmes, ce dont je me suis assuré par le calcul.

Nous venons de déterminer la limite de la réflexion intérieure dans des milieux quelconques. Lorsque l'inclinaison des trajectoires excédera ces limites, la trajectoire sortira du milieu avant d'avoir atteint son *minimum*; de là, en entrant dans le vide, elle poursuivra son cours en ligne droite suivant la direction de sa dernière tangente, de sorte que, si l'on veut seulement considérer sa marche dans le milieu réfringent où elle est courbe, il faudra la terminer brusquement.

Cependant, pour examiner complétement les propriétés géométriques des trajectoires, et suivre avec facilité la marche de leurs intersections successives, il seroit utile d'éviter cette interruption brusque de leur marche qui jette une discontinuité inévitable dans les considérations. A la vérité, on y parviendroit en continuant, par le calcul, le cours des trajectoires au-delà de ces limites, ce qui exigeroit que l'on employât dans le calcul analytique des valeurs négatives du pouvoir réfringent ; mais cette supposition qui suffit au calcul, ne

présente aucune idée physique satisfaisante. Voici un moyen très-simple d'y suppléer.

L'équation générale des trajectoires est

$$cos.\ I.\ \frac{dz}{dx} = \sqrt{sin^2.\ I - m\varphi}$$

dans laquelle on a

$$m\varphi = \frac{4.\ \frac{(K)}{n^2}.\ (\varrho) - 4.\ \frac{K}{n^2}.\ \varrho}{1 + 4.\ \frac{(K)}{n^2}.\ (\varrho)}$$

Dans un autre milieu diaphane dont l'action sur la lumière seroit représentée par K' et la densité par ϱ', on auroit de même

$$cos.\ I.\ \frac{dz}{dx} = \sqrt{sin^2.\ I - m'\varphi'}$$

$$m'\varphi' = \frac{4.\ \frac{(K)'}{n^2}.\ (\varrho)' - 4.\ \frac{K'}{n^2}.\ \varrho'}{1 + 4.\ \frac{(K)'}{n^2}.\ (\varrho)'}$$

Je suppose maintenant que la nature de ce second milieu et la densité de ses couches soit telle que l'on ait en général

$$K' = \frac{K}{1 - \frac{4a}{n^2}};\quad \varrho' = \varrho + \frac{a}{K}.$$

a étant une quantité constante et positive, ce qui donnera dans la couche supérieure

$$(K)' = \frac{(K)}{1 - \frac{4a}{n^2}};\ (\varrho)' = (\varrho) + \frac{a}{(K)}$$

Cette supposition n'entraîne aucune impossibilité physique, elle ne fait qu'augmenter dans un certain rapport, l'action du fluide sur la lumière et la densité. On aura ainsi dans ce nouveau milieu

$$m'\varphi' = \frac{4 \cdot \frac{(K)}{n^2} \cdot \left[(\rho) + \frac{a}{(K)}\right] - \frac{4K}{n^2} \cdot \left(\rho + \frac{a}{K}\right)}{\left(1 - \frac{4a}{n^2}\right) \cdot \left\{1 + \frac{4 \cdot \frac{(K)}{n^2} \cdot \left[(\rho) + \frac{a}{(K)}\right]}{1 - \frac{4a}{n^2}}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{4(K)}{n^2} \cdot (\rho) - \frac{4K}{n^2} \cdot \rho}{1 + \frac{4(K)}{n^2} \cdot (\rho)} = m\varphi$$

La quantité $m'\varphi'$ sera donc égale à la quantité $m\varphi$; ainsi l'équation différentielle des trajections sera la même pour les deux milieux, et par conséquent la forme de ces trajectoires sera aussi la même lorsqu'elles seront menées du même point sous d'égales inclinaisons.

Mais par l'introduction de la constante indéterminée a, il arrive que lorsque les densités et les pouvoirs réfringens deviennent nuls ou négatifs dans le premier milieu, ils ont encore des valeurs positives dans le second, d'où il suit que la limite de la réflexion intérieure y est plus éloignée, et par conséquent des trajectoires qui ne pouvoient pas atteindre leur *minimum* dans l'autre milieu l'atteindront dans celui-ci. En effet, en y supposant ρ' nul, ce qui répond à des valeurs négatives de ρ, la limite de la réflexion intérieure est donnée par la formule

$$\textit{sin.}\ I = \sqrt{m'} \quad \text{ou} \quad \textit{sin.}\ I = \sqrt{\frac{(P)'}{1 + (P)'}}$$

Or, d'après les relations que nous venons d'établir, on a

$$(P)' = \frac{4\,(K)'}{n^2}.\ (\varrho)' = \frac{\frac{4\,(K)}{n}.\left[(\varrho) + \frac{a}{K}\right]}{1 - \frac{4\,a}{n^2}}.$$

Cette valeur de $(P)'$ sera donc toujours plus grande que (P). La différence dépendra de la constante a, et elle sera d'autant plus considérable que l'on donnera à cette constante une valeur plus approchée de $\frac{n^2}{4}$. On pourra donc imaginer ainsi une infinité de milieux où les trajectoires seront absolument les mêmes que dans le milieu proposé, et dans lesquels la limite de la réflexion intérieure sera aussi éloignée que l'on voudra. On pourra même en faisant a très-peu différent de $\frac{n^2}{4}$, amener la valeur de *sin.* I jusqu'à l'unité, ce qui rendra la réflexion possible sous toutes les inclinaisons. Au moyen de ces suppositions, on pourra suivre la marche des trajectoires dans toute l'étendue que leur donnent les formules analytiques, et lorsqu'on voudra ensuite particulariser ces résultats pour un milieu donné, dans lequel la limite de la réflexion intérieure sera connue et déterminée, il suffira d'exclure toutes les parties des trajectoires qui excèdent cette limite en les coupant par une droite horizontale, menée dans la couche où le fluide se terminera, et alors il deviendra facile de voir quelles sont les bran-

ches ou les portions de caustiques que cette suppression fait disparoître.

Ainsi dans l'air atmosphérique même où les réflexions se font toujours sous des inclinaisons très-petites, on décrira toutes les trajectoires dans toute l'étendue de leur cours, et avec la forme qui résulte de la loi que l'on aura choisie pour le décroissement des densités, puis en élevant successivement le sol à diverses hauteurs, on interceptera successivement les trajectoires les plus basses, et l'on verra ainsi disparoître par degrés et s'évanouir avec elles les phénomènes qu'elles produisoient.

Examinons maintenant la manière dont les *minima* des diverses trajectoires se suivent dans le sens horizontal. Le *minimum* de la trajectoire plus basse sera-t-il en avant de l'autre ou en arrière, et en général quel sera le lieu des *minima* des trajectoires consécutives ?

Ces résultats dépendront de la loi que suivront les pouvoirs réfringens du fluide dans les différentes couches, et de la hauteur des trajectoires que l'on considère, car on peut assigner des lois dans lesquelles les *minima* des trajectoires situées à certaines profondeurs se rapprocheront de l'observateur à mesure que l'angle I augmente, tandis que dans d'autres lois elles s'éloigneront de lui ; et souvent même ces deux effets pourront avoir lieu successivement à diverses profondeurs dans le même décroissement.

Pour confirmer ceci par des exemples, nous supposerons d'abord que les pouvoirs réfringens des couches décroissent en progression arithmétique, en sorte qu'on ait

$$K\varrho = (K).\ (\varrho).\ (1 - Az)$$

On aura donc alors

$$\varphi = Az$$

et l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos.\ I.\ dz}{\sqrt{\sin^2.\ I - mAz}}$$

elle a pour intégrale

$$x = -\frac{2.\ \cos.\ I}{mA}.\ \sqrt{\sin^2.\ I - mAz} + const.$$

Nous devons déterminer la constante de manière que l'origine de l'intégrale soit à l'observateur même; ce qui donne

$$const. = \frac{2\ \sin.\ I.\ \cos.\ I}{mA}$$

et par conséquent

$$x = \frac{2\ \cos.\ I}{mA}.\ [\sin.\ I - \sqrt{\sin^2.\ I - mAz}]$$

Le *minimum* des trajectoires a lieu lorsque le radical est nul, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\sin^2.\ I = mAz$$

ce qui donne

$$x = \frac{\sin.\ 2\ I}{mA}$$

Ces deux équations déterminent les coordonnées du *minimum* de chaque trajectoire dont l'inclinaison est I. En éliminant cet angle on a

$$x^2 + 4.\ \left(z - \frac{1}{2\ mA}\right)^2 = \frac{1}{m^2 A^2}$$

C'est le lieu de tous les *minima*, et l'on voit que ce lieu est une ellipse qui a son centre sur l'axe des z au-dessous de l'observateur, à une distance de l'origine égale à $\frac{1}{2\,m\,A}$, distance qui est aussi son demi petit axe; l'autre est horizontal et double du précédent. On voit donc que, pour les petites inclinaisons, les *minima* des trajectoires s'éloignent de l'observateur, à mesure que I augmente, qu'ensuite leur marche devient stationnaire lorsque l'angle I est de 45°, et qu'enfin depuis cette valeur jusqu'à 90° ils vont continuellement en se rapprochant de la verticale, par conséquent de l'observateur.

On peut remarquer que le mouvement de la lumière, dans le cas que nous venons d'examiner, est assujéti aux mêmes lois que le mouvement des projectiles dans le vide. Cela tient à ce que l'expression de la force accélératrice est en général

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\,2.\,(K).\,(\varrho).\,\varphi'$$

expression qui, dans le cas de la progression arithmétique, devient constante et égale à $-\,2\,A.\,(K).\,(\varrho)$.

Prenons maintenant pour exemple un décroissement plus rapide, par exemple proportionnel au carré des profondeurs, nous aurons alors :

$$\varphi = A z^2$$

et l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos.\,I.\,dz}{\sqrt{\sin^2.\,I - m A z^2}}$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{mA}} \text{ arc. sin. } \frac{z\sqrt{mA}}{\sin. I}$$

Je n'ajoute point de constante, afin que l'intégrale commence à l'observateur. Au *minimum* on a

$$\sin^2. I = mAz^2; \quad x = \frac{q. \cos. I}{\sqrt{mA}}$$

q étant le quart de la circonférence ou un quadrans.

Le lieu des *minima* sera donc

$$mAx^2 + mAq^2z^2 = q^2$$

équation d'une ellipse qui a son centre à l'observateur même, et son petit axe vertical, l'autre horizontal. Le premier a pour valeur $\frac{2}{\sqrt{mA}}$ le second $\frac{2q}{\sqrt{mA}}$. Dans cette loi les *minima* des trajectoires se rapprochent constamment de l'observateur, à mesure que l'angle I augmente, du moins en ne considérant que les trajectoires situées du côté des z positifs, c'est-à-dire au-dessous de l'observateur. Les trajectoires menées du côté des z négatifs présenteroient des résultats analogues, et la trajectoire, menée sous l'inclinaison $I = 0$, se confondroit avec l'axe des x. Tout cela tient à ce que, d'après la forme actuelle de la fonction φ, le pouvoir réfringent est le plus grand possible sur cet axe, et va ensuite en décroissant au dessus comme au dessous. Ces résultats sont fort différens de ceux que la progression arithmétique nous a présentés.

Je considèrerai encore un cas qui a l'avantage de se rencontrer fréquemment dans la nature, surtout quand la variation du pouvoir réfringent est très-rapide; c'est celui où l'on a

$$\varphi = \Psi - A$$

A étant une constante et Ψ une quantité telle qu'elle soit égale à A quand z est nulle, et de plus qu'en nommant Ψ' son coefficient différentiel relatif à z, la fonction $\frac{\Psi}{\Psi'}$ soit exactement ou à très-peu près constante. En effet, d'après cette valeur, l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos. I.\, dz}{\sqrt{\sin^2. I + mA - m\Psi}}$$

Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\frac{\sin^2. I}{\sin^2. I + mA} = \alpha^2$$

cette équation deviendra

$$dx.\ \mathrm{tang.}\ I = \frac{\alpha.\, dz}{\sqrt{1 - \frac{m\alpha^2 \Psi}{\sin^2. I}}}$$

et elle peut se mettre sous la forme

$$dx.\ \mathrm{tang.} I = \alpha.\, dz + \alpha.\frac{\Psi}{\Psi'}.\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\alpha^2.\Psi}{\sin^2. I}}} - 1\right\}.\frac{d\Psi}{\Psi}$$

La partie de cette équation qui n'est point multipliée par $\frac{\Psi}{\Psi'}$ est intégrable et donne

$$x.\ \mathrm{tang.}\ I = \alpha.\, z$$

C'est l'équation d'une ligne droite qui seroit la tangente initiale de la courbe en faisant Ψ égal à zéro. L'autre terme n'est pas intégrable en général, mais il le devient quand $\frac{\Psi}{\Psi'}$ est une quantité constante ou dont les variations sont assez petites pour que leur influence sur la valeur de ce terme puisse être négligée. Alors l'intégrale ne dépend plus que des quadratures, et l'on a

$$x.\,tang.\,I = \alpha.\,z - \alpha.\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,\Psi}{sin^2.\,I}}\right)^2}{\frac{m\alpha^2}{sin^2.\,I}} + const.$$

On détermina la constante par la condition que x, z et φ soient nuls en même-temps, ce qui donne $\Psi = A$, et par suite

$$0 = -\alpha.\,\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\,\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,A}{sin^2.\,I}}\right)^2}{\frac{m\alpha^2}{sin^2.\,I}} + const.$$

car, par notre précédente supposition $\frac{\Psi}{\Psi'}$ doit être traitée comme constante. D'après cela on a

$$x.\,tang.\,I = \alpha.\,z. - 2\,\alpha\,\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\,\frac{1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,\Psi}{sin^2.\,I}}}{1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,A}{sin^2.\,I}}}.$$

Examinons maintenant les circonstances dans lesquelles cette intégrale peut être appliquée.

Son cas rigoureux seroit celui où les pouvoirs réfrin-

gens des couches décroîtroient suivant une exponentielle, ce qui donneroit pour φ une expression de la forme

$$\varphi = A e^{az} - A$$

car on auroit alors

$$\Psi = A e^{az} \,; \quad \frac{\Psi}{\Psi'} = \frac{1}{a}$$

En plaçant un thermomètre à diverses distances d'un plan échauffé plongé dans l'air atmosphérique, on trouve que les densités des couches sont très-bien représentées par cette loi, elle doit donc se retrouver fréquemment dans les phénomènes de mirage produit par la raréfaction de l'air à la surface de la terre ou de la mer. Dans ces phénomènes il arrive communément que la densité de l'air croît jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle elle devient sensiblement constante, ce qui est analogue avec la loi que nous examinons; car même dans les couches supérieures où z est négatif, et P plus grand que (P), la plus grande valeur de $-\varphi$ ou de $\frac{P-(P)}{(P)}$ est d'être égale à A, et cette valeur, qui répond à $z = -\infty$, n'arrive que par degrés insensibles.

Dans cette loi le *minimum* de chaque trajectoire est donné par la combinaison des deux équations

$$\sin^2. I = m\alpha^2.\Psi$$

$$x.\,tang.\,I = \alpha.z + \frac{2}{a}.\alpha.\,log.\left(1 + \sqrt{1 - \frac{m\alpha^2.A}{\sin^2. I}}\right)$$

dans lesquelles on a

$$\alpha^2 = \frac{\sin^2. I}{\sin^2. I + mA}$$

En mettant pour α^2 sa valeur, ces équations donnent

$$\sin^2. I = mA. \left(e^{\alpha z} - 1\right)$$

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{\sin^2. I + mA}} . \left[z + \frac{2}{\alpha} . \log. \left(1 + \frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I + mA}} \right) \right]$$

On voit d'abord que $I = 0$ donne $x = 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire que la trajectoire menée sous une inclinaison nulle, a son *minimum* placé à l'origine des coordonnées qui est aussi le lieu de l'observateur. Par conséquent la courbe des *minima* finit par se rapprocher de l'observateur dans les petites inclinaisons, et coincide avec lui quand I est nul.

En faisant $mA = n$, les valeurs précédentes de x et de z peuvent être mises sous la forme

$$z = \frac{2}{\alpha} . \log. \frac{\sin. I}{\alpha \sqrt{n}}$$

$$x. \tang. I = \frac{2}{\alpha} . \alpha . \log. \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} . \frac{\sin. I}{\sqrt{n}} \right)$$

en les regardant comme des fonctions de I. Par la différentiation on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\sin. 2I}{2. \left[(1+n). \alpha. \log. \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} . \frac{\sin. I}{\sqrt{n}} \right) - \cos^2. I \right]}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{a. \sin^2. I. \left\{ (1+n). (\cos^2. I - n). \alpha^3. \log. \left[\frac{(1+\alpha)}{\alpha} . \frac{\sin. I}{\sqrt{n}} \right] - \left[1 + (1+n). \alpha^2 \right]. \cos^2. I \right\}}{2 \alpha^3. \left\{ (1+n). \alpha. \log. \left[\frac{(1+\alpha)}{\alpha} . \frac{\sin. I}{\sqrt{n}} \right] - \cos^2. I \right\}^3}$$

ou, en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{\sin. I}{\sqrt{n}} = \frac{\sin. I}{\sqrt{mA}} = K$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\sin.\ 2\ I}{2\left[\frac{(1+n).\ K}{\sqrt{1+K^2}}.\ \log.\ (K+\sqrt{1+K^2}) - \cos^2\ I\right]}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{an.\left[(1+n).(\cos.2I-n)\frac{K^3}{\sqrt{1+K^2}}.\ \log.(K+\sqrt{1+K^2})-[1+(2+n).K^2].\cos^2.I\right]}{2\left[\frac{(1+n).\ K}{\sqrt{1+K^2}}.\ \log.\ (K+\sqrt{1+K^2}) - \cos^2.\ I\right]}$$

La première fait connoître l'inclinaison de la tangente à chaque point de la courbe des *minima*, la seconde indique la direction de la courbure relativement à l'axe des x.

La valeur de $\frac{dz}{dx}$ devient nulle quand I est égal à zéro ou à 90°, parce que son numérateur devient nul dans ces deux circonstances, son dénominateur ne l'étant point. Il est facile de voir qu'aucun des coefficiens différentiels des ordres supérieurs ne s'évanouit ni ne devient infini par cette supposition. Ainsi la courbe a deux tangentes horizontales correspondantes à ces deux inclinaisons.

Si maintenant nous considérons le dénominateur de $\frac{dz}{dx}$, nous verrons que, des deux termes qui le composent, le premier est nul quand I est nul, et va continuellement en augmentant jusqu'à $I = 90$, en restant toujours positif, tandis qu'au contraire le second terme $-\cos^2.\ I$ va continuellement en diminuant dans le même intervalle en restant toujours négatif, jusqu'à ce qu'il devienne nul quand $I = 90°$. Il y aura donc entre $I = 0 = I$ et 90 une valeur pour laquelle ces deux termes seront égaux, et il n'y en aura qu'une seule. Alors le dénominateur

de $\frac{dz}{dx}$ deviendra nul, et par conséquent $\frac{dz}{dx}$ sera infini.

Supposons n fort petit; la valeur de K, qui satisfait à cette condition, est, en négligeant le carré de n,

$$K = 1.66 - 6.23.\ n$$

et par conséquent la valeur correspondante de $sin.\ I$ est

$$sin.\ I = 1.66.\ \sqrt{mA} - 6.23.\ mA.\ \sqrt{mA}$$

Cette valeur de K rend $\frac{d^2z}{dx^2}$ infinie. Il est d'ailleurs aisé de voir que le dénominateur commun de ces deux expressions, est positif pour des valeurs de $sin.\ I$ plus grandes que la précédente, et négatif pour des valeurs moindres. Ainsi, le sens de la concavité de la courbe change au point où il devient nul. De plus, le signe de l'inclinaison de la tangente change aussi, c'est-à-dire que la courbe après s'être éloignée jusqu'à ce point de l'axe des z s'en rapproche ensuite constamment jusqu'à ce qu'elle vienne se terminer à l'observateur. Le point où le dénominateur devient nul, est donc un point de rebroussement, ou, pour parler plus exactement, c'est une limite de la courbe dans le sens horizontal.

Généralement on voit que $\frac{d^2z}{dx^2}$ est négatif lorsque I approche de 90° : la courbe tourne donc alors sa concavité vers l'axe des x. Au contraire, quand z est nul ou fort petit, $\frac{d^2z}{dx^2}$ est positif, et la courbe tourne sa con-

vexité vers le même axe. Entre ces deux limites elle peut avoir encore plusieurs points d'inflexion, et le sens de la courbure peut varier avec la valeur de n, mais d'après l'expression générale de $\frac{dz}{dx}$ on voit que la direction de la tangente ne change pas, dans les mêmes circonstances; par conséquent le point de rebroussement sera unique, et c'est tout ce qu'il nous importe de savoir, car c'est de là que dépend le nombre et la position des images. Ainsi, en général, la courbe des *minima* aura une forme ovale, rentrante sur elle-même, et analogue en cela à celle que la progression arithmétique nous a présentée.

Les coordonnées du point de rebroussement déduites des équations précédentes sont

$$x = \frac{2 \cos^3. I}{a. (1 + mA). \sin. I}$$

$$z = \frac{2}{a}. \log. \sqrt{1 + \frac{\sin^2. I}{mA}}$$

On a de plus

$$\sin. I = 1.66. \sqrt{mA} - 6.23. mA. \sqrt{mA}$$

D'après ces expressions on voit que mA diminuant, le point de rebroussement s'éloigne de l'observateur dans le sens horizontal, et se rapproche de son niveau. Ainsi la seconde branche comprise entre $I = 0$ et I égal à la valeur précédente, se trouve resserrée entre des limites continuellement moindres. Enfin, si mA devient nul, le point de rebroussement s'éloigne à l'infini, et la seconde branche ne convient plus qu'à une seule trajec-

toire qui est la ligne droite horizontale menée par l'observateur.

Deux circonstances peuvent concourir à diminuer le produit mA. La première est la petitesse du nombre m, c'est-à-dire du pouvoir réfringent du milieu, la seconde est la petitesse de A, c'est-à-dire l'élévation de l'observateur dans les couches supérieures où la force réfringente n'éprouve que de très-petites variations; en effet, dans la loi que nous examinons en nommant P le pouvoir réfringent de la couche dont la hauteur est z, on a

$$\frac{(P) - P}{(P)} = A e^{az} - A$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{(P)} \cdot \frac{dP}{dz} = A a e^{az}$$

Si l'observateur est assez élevé pour que les variations du pouvoir réfringent soient presque nulles dans les couches où il se trouve, alors A devra aussi être presque nul, et quel que soit le pouvoir réfringent du milieu la dernière branche s'évanouira, ou pour parler plus exactement, se confondra avec l'axe des x.

A parler à la rigueur, la valeur de A ne peut devenir ainsi nulle que pour un observateur placé à une hauteur infinie au-dessus des couches où les forces réfringentes varient sensiblement; car ce n'est qu'à une pareille hauteur que la logarithmique qui représente la valeur de φ se confond avec son asymptote verticale. Mais si l'on supposoit une variation de force réfringente infiniment rapide, cette dégénération de la logarithmique en une

ligne droite, auroit déjà lieu à une hauteur finie au-dessus des couches où se font les variations sensibles des pouvoirs réfringens. La valeur de A seroit donc déjà nulle pour un observateur qui seroit placé à cette hauteur, et par conséquent la contraction de la dernière branche sur l'axe des x, et l'éloignement indéfini du point de rebroussement auroient lieu pour lui. C'est le cas de la réflexion intérieure dans les milieux homogènes. L'action d'un pareil milieu sur la lumière est sensiblement constante dans tout son intérieur. Elle ne varie qu'à la sortie de la molécule lumineuse, tout près de la surface du milieu; et ses variations, renfermées dans une étendue presque insensible, ont une extrême rapidité.

Généralement plus la valeur de mA sera petite, plus celle de $\frac{dz}{dx}$ sera petite aussi, et par conséquent plus la courbe des *minima* s'applatira et approchera de se confondre avec une ligne droite horizontale; ce qui arrivera enfin si A est nul, c'est-à-dire si la hauteur de l'observateur au-dessus des couches où la réfraction éprouve des variations sensibles, est infinie par rapport à l'épaisseur des couches dans lesquelles ces variations ont lieu. C'est encore le cas de la réflexion intérieure dans les milieux homogènes, comme on l'a vu précédemment.

Pour considérer séparément la branche supérieure de la courbe, qui a lieu pour les plus petites valeurs de z, il n'y a qu'à considérer $sin^2. I$ comme très-petit par rapport à mA ou à n; alors $\frac{sin^2. I}{mA}$ ou K^2 sera une quantité

fort petite dont nous pourrons négliger les puissances supérieures; et en développant d'après cette supposition les valeurs générales de x et de z qui conviennent au *minimum*, on trouve qu'elles se réduisent aux expressions suivantes :

$$z = \frac{\sin^2. I}{mAa}; \quad x = \frac{2 \sin. 2 I}{mAa}$$

c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes que pour une progression arithmétique dont la raison seroit mAa. Ainsi, dans les inclinaisons extrêmement petites, la branche que nous considérons se confond avec une ellipse dont le centre est au-dessous de l'observateur à une distance $\frac{1}{2\,mAa}$; distance qui est aussi égale au petit axe de cette ellipse, l'autre étant horizontale et double du précédent. De plus, à cause de la petitesse de la quantité mAa, on voit que les dimensions de cette ellipse sont très-considérables, et comme elle a son sommet à l'observateur, on voit que la branche qu'elle représente est très-peu courbe, ce qui devoit être d'après la petitesse des valeurs de $\sin. I$.

Si au contraire on veut considérer la branche inférieure de la courbe des *minima*, il n'y a qu'à regarder $\sin^2. I$ comme une quantité fort grande par rapport à mAa, ce qui pourra s'étendre encore à de très-petits angles si mAa est une fort petite quantité; alors il suffira de faire $a = 1$ dans les expressions générales de x et de z qui conviennent au *maximum*, et elles deviendront

$$z = \frac{2}{a}.\log. \frac{\sin. I}{\sqrt{n}}; \quad x.\tang. I = \frac{2}{a}.\log. \frac{2 \sin. I}{\sqrt{n}}$$

Il est maintenant facile d'éliminer I entre ces deux équations.

Ces mêmes résultats auront lieu encore, sinon d'une manière exacte, au moins d'une manière approchée dans beaucoup d'autres lois; par exemple toutes les fois que la valeur de φ pourra être exprimée par une suite de termes de la forme

$$\varphi = A.(e^{az}-1)+A_1.(e^{a_1z}-1)+A_2.(e^{a_2z}-1)+\text{etc.}$$

$a\ a_1\ a_2$ étant de grands nombres, et $A\ A_1\ A_2$ des constantes arbitraires. En effet on aura alors

$$\frac{\Psi}{\Psi'} = \frac{A + A_1 e^{(a_1-a)z} + A_2 e^{(a_2-a)z}}{aA + a_1 A_1 e^{(a_1-a)z} + a A_2 e^{(a_2-a)z}}$$

Rigoureusement parlant $\frac{\Psi}{\Psi'}$ sera une quantité variable, mais cette variation sera fort petite si les exposans a; a_1; a_2; sont de grands nombres comme nous l'avons supposé, et si l'on a pris pour a le plus grand d'entre eux. L'erreur que l'on commettra sur $\frac{\Psi}{\Psi'}$ perdra encore de son influence, si le pouvoir réfringent du milieu est très-foible, comme cela a lieu pour l'air atmosphérique; car alors, la trajectoire sera très-peu courbe, et nous avons vu que l'erreur de $\frac{\Psi}{\Psi'}$ ne porte que sur la différence des ordonnées de la courbe et de sa tangente extrême, différence qui sera encore très-petite au *minimum* même où elle atteint sa plus grande valeur.

Maintenant quelque soit la nature de la fonction φ qui représente la suite des pouvoirs réfringens des couches, on peut toujours en assigner une de la forme

$$\varphi = A.\,[e^{-a.(Z-z)} - 1] + A_1.\,[e^{-a.(Z_1-z)} - 1] + A_2.\,[e^{-a.(Z_2-z)} - 1] + \text{etc.}$$

qui coincidera avec elle dans tel nombre de points que l'on voudra, et qui en approchera de si près dans toute l'étendue du milieu donné, que la différence de leurs valeurs, dans cet intervalle, sera presque insensible et pourra être négligée. Cette fonction pourra donc être substituée à la fonction φ pour la commodité du calcul sans qu'il en résulte aucune erreur sensible dans les résultats physiques, pourvu que l'on se borne à la partie des deux courbes où l'on a déterminé le rapprochement des deux fonctions. Alors, si cette détermination donne pour l'un des exposans a a_1 a_2 un nombre très-considérable, l'intégrale que nous venons de trouver dans cette hypothèse pourra être employée comme une approximation de l'intégrale rigoureuse. Si plusieurs des exposans a a_1 a_2 étoient de grands nombres, on choisiroit le plus considérable, en ayant aussi égard aux valeurs des quantités A A_1 A_2 : généralement l'approximation sera d'autant plus grande que la variation des pouvoirs réfringens des couches sera plus rapide, et qu'elle donnera pour a a_1 a_2 des exposans plus considérables et plus différens entre eux.

Considérons enfin le cas général dans lequel les pouvoirs réfringens des couches décroissent suivant une loi quelconque. Mais supposons que cette variation n'ait lieu que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle le pouvoir réfringent reste toujours le même, et plaçons l'observateur dans les couches de réfraction constante. Ce cas est ordinairement celui de la nature lorsqu'on observe dans l'air atmosphérique, ou dans des fluides superposés. S'il n'est plus alors possible de déterminer généralement la courbe qui est le lieu des *minima* de toutes les trajectoires, on peut cependant découvrir l'influence que produit sur elle l'élévation de l'observateur, ce qui nous sera par la suite de la plus grande utilité.

Pour représenter d'une manière générale la loi de variation des pouvoirs réfringens dans les couches inférieures, supposons que, pour un observateur placé précisément à la limite où cette variation cesse, le lieu des *minima* fût donné par les équations

$$z = \pi\,(I)\,; \quad x = \Psi\,(z)$$

π et Ψ étant des fonctions quelconques, nous ne considérerons ici que le cas où la force réfringente des couches décroît continuellement à mesure que la profondeur augmente : dans ce cas $\frac{dz}{dI}$ ou π' sera une quantité positive dans toute l'étendue du fluide au-dessous de l'observateur; mais $\frac{dx}{dz}$ ou Ψ' pourra devenir positif ou négatif, nul ou infini, ou même passer succes-

sivement par ces différens états, selon la loi du décroissement.

Maintenant, sans changer l'origine des coordonnées, plaçons l'observateur sur l'axe des z à une hauteur H au-dessus de la ligne où finit la variation des pouvoirs réfringens. Une trajectoire partie de son œil, sous une inclinaison I quelconque, sera rectiligne pendant toute la hauteur H, après quoi elle se courbera en entrant dans les couches de réfraction variable; mais sa première tangente sera la droite elle-même menée de l'observateur avec l'inclinaison I. L'élévation de l'observateur, au-dessus des couches variables, ne fait donc que transporter horizontalement chaque trajectoire d'une quantité égale à $\frac{H}{tang.\, I}$, et par conséquent le lieu de leurs *minima* sera donné par l'élimination de I entre les deux équations

$$z = \pi\,(I); \qquad x = \frac{H}{tang.\, I} + \Psi z$$

En différenciant ces équations, et y faisant varier I, x et z on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\Psi' - \frac{H}{\pi'.\, sin^2.\, I}} \; \ldots\ldots \; (1)$$

Pour un observateur placé sur la limite même de la réfraction constante, H seroit nulle et l'on auroit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\Psi'} \; \ldots\ldots\ldots \; (2)$$

Suivons les modifications produites par l'introduction de la quantité H.

Quelque soit la loi de variation des pouvoirs réfringens, la trajectoire menée sous l'inclinaison de 90 degrés perpendiculairement aux couches, se confond avec l'axe des z; et, en partant de cette valeur, les *minima* des trajectoires commencent par s'éloigner de cet axe; la valeur de Ψ' est donc nécessairement négative pour des valeurs de I peu différentes de 90 degrés; la courbe représentée par l'équation (2) commence donc par s'éloigner de l'axe des z, mais pour des valeurs de dz égales, elle s'en éloigne moins vite que la courbe (1) à cause du terme $-\frac{H}{\pi'.\sin^2.I}$ qui est du même signe que Ψ'.

Si la loi de variation des pouvoirs réfringens est telle que Ψ' soit constamment négatif dans toutes les couches variables, la marche de la courbe (1) se continuera dans ce sens indéfiniment; mais si Ψ' après avoir été nul devenoit positif, c'est-à-dire si la courbe (2) après avoir eu une tangente verticale revenoit sur elle-même en se rapprochant de l'axe des z, la marche de la courbe (1) se rallentiroit pareillement; et si Ψ' venoit à surpasser $\frac{H}{\pi'.\sin^2.I}$ elle se rapprocheroit aussi de l'axe des z; mais cet effet se rallentiroit continuellement à mesure que I deviendroit moindre à cause de l'accroissement continuel du terme négatif $\frac{-H}{\pi'.\sin^2.I}$. On voit même qu'en augmentant suffisamment H, le retour de la courbe (1) sur elle-même n'auroit jamais lieu. Enfin, ce terme devenant infini, quand I est nul, donne à la courbe une

asymptote horizontale qui est l'axe des x lui-même, limite des variations des forces réfringentes.

En résumant ces considérations, on voit qu'en partant de $I = 90°$ la courbe (1) commence par s'éloigner de l'axe des z, qu'ensuite, selon la loi de décroissement des forces réfringentes, elle peut subir des inflexions ou des rebroussemens qui tour à tour l'éloignent ou la rapprochent de cet axe; mais que dans toutes les lois possibles, elle finira toujours par une branche convexe vers la couche de réfraction constante, et qui aura pour asymptote la ligne horizontale par laquelle cette couche est limitée inférieurement. On voit de plus que cette dernière branche, exempte d'inflexions et de rebroussemens, commence sous des inclinaisons d'autant plus grandes que l'observateur est plus élevé au-dessus des couches variables. Ce sera donc elle seule que l'on devra le plus souvent apercevoir dans l'air atmosphérique où les réflexions ne sont possibles que sous de très-petites inclinaisons, surtout lorsque l'observateur sera fort élevé au-dessus de la couche variable, comme cela a souvent lieu dans les observations faites sur la mer où cette couche a presque toujours une épaisseur très-petite.

On peut vérifier ces considérations en les appliquant au cas particulier de la progression arithmétique où les coordonnées du *minimum* sont :

$$sin^2. I = mAz; \quad x = \frac{sin. 2I}{mA}$$

Pour un observateur élevé de la hauteur H au-dessus des couches variables, ce sera

$$\sin^2. I = mAz; \quad x = \frac{H}{\text{tang}. I} + \frac{\sin. 2 I}{mA}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sin. 2 I}{2 \cos. 2 I - \frac{mAH}{\sin^2. I}}$$

Il est facile de voir que la courbe a deux tangentes verticales correspondantes aux deux valeurs de I données par l'équation

$$\sin^2. I = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} - \frac{mAH}{4}}$$

et dont l'une est plus grande, l'autre plus petite que 30 degrés. A chacune de ces valeurs le signe de $\frac{dz}{dx}$ change, et avec lui le sens de la concavité ou de la convexité de la courbe : il en résulte qu'elle a la forme représentée par la *fig.* 2. Si H est nul, une des deux valeurs de I devient nulle ; le point M' se confond avec le point A, et la branche $M'\,H$ s'évanouit : la courbe est alors fermée et forme une ellipse. A mesure que H augmente, les deux points $M M'$ se rapprochent l'un de l'autre, ils coincident lorsqu'on a

$$H = \frac{1}{4.\ mA}$$

Ce qui répond à une inclinaison de 30 degrés. Pour des valeurs de H plus grandes, la courbe revient sur elle-même et s'éloigne continuellement de l'axe des z.

Si l'on nomme e l'épaisseur des couches variables, depuis la surface du sol jusqu'à la hauteur où la réfraction devient constante; et que l'on désigne par I' l'inclinaison de la trajectoire tangente au sol, on aura

$$sin^2.\, I' = mAe$$

Dans l'air atmosphérique la valeur de $sin.I'$ est toujours extrêmement petite. Si l'on veut alors que le point de rebroussement le plus élevé se trouve à la surface du sol même, il faut que I' satisfasse à l'équation

$$2\, sin^2.\, I.\, cos.\, 2\, I - mAH = 0$$

ce qui donne

$$H = 2\, e.\, cos.\, 2\, I'$$

ou pour des valeurs de I fort petites, comme cela a lieu dans l'air atmosphérique,

$$H = 2\, e$$

c'est-à-dire que dans cette loi, lorsque la hauteur de l'observateur au-dessus du sol surpassera trois fois l'épaisseur des couches de densité variable, la partie de la courbe des *minima* qui s'élevera au-dessus du sol, et qui appartiendra à des tangentes visibles, sera toute convexe vers le sol et n'aura plus de point d'inflexion.

Tout ce que nous venons de dire sur la manière dont se termine la courbe des *minima* peut se confirmer encore très-simplement par quelques considérations géométriques. Elles ont ici cet avantage qu'elles permettent

de supposer la variation des densités, non seulement arbitraire, mais entièrement discontinue.

D'abord on peut prouver que quelque soit la loi des densités, pourvu que l'observateur soit placé tant soit peu au-dessus des couches variables, la courbe des *minima* finira toujours dans les petites inclinaisons par s'éloigner continuellement de l'observateur, en se rapprochant de son niveau de manière à avoir une asymptote horizontale, qui sera la ligne par laquelle les couches variables sont terminées. En effet, concevons une trajectoire quelconque menée de l'œil de l'observateur sous une inclinaison arbitraire. Cette trajectoire sera rectiligne jusqu'au moment de son entrée dans les couches variables; alors elle commencera à devenir courbe, et après avoir atteint son *minimum*, elle se réfléchira en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, puis enfin elle sortira des couches variables, sous la même inclinaison qu'elle y est entrée. Par ce point de sortie et par l'œil de l'observateur, menons une nouvelle trajectoire, celle-ci aura par construction son *minimum* plus éloigné de l'observateur que la précédente : elle l'aura aussi plus élevé ou plus rapproché de l'axe des x, puisqu'elle est nécessairement menée sous une plus petite inclinaison. On peut faire le même raisonnement sur la trajectoire suivante et le continuer ainsi indéfiniment à partir d'une inclinaison quelconque ; et comme il n'y a de limite à ce rapprochement que quand la dernière trajectoire devient parallèle aux couches, et entièrement rectiligne, il s'ensuit que dans tous ces ças la courbe des *minima* ne

peut jamais se terminer autrement que par une branche très-applatie qui se rapproche insensiblement de l'axe des x, et finit par se confondre avec cet axe dans les plus petites inclinaisons.

Discussion de la seconde branche des trajectoires; examen de leurs intersections.

Après avoir discuté tout ce qui concerne les premières branches des trajectoires depuis leur origine, qui est l'œil de l'observateur jusqu'à leur *minimum*, il est facile de conclure tout ce qui concerne leurs secondes branches, car les trajectoires étant nécessairement symétriques autour de leur *minimum*, puisque les couches d'égales densités sont planes et horizontales, il s'ensuit que les formes des deux branches sont en tout semblables. Mais de plus, les secondes branches, par la différence de leur position, pourront se couper entre elles et avec les premières, de manière à donner des images multiples, c'est ce qu'il faut examiner.

Pour cela considérons deux trajectoires OM, OM' *fig.* 3, parties du même point O sous les angles I et $I + \Delta I$ ΔI pouvant avoir une valeur finie. D'après ce que nous avons démontré précédemment, le *minimum* M' de la seconde sera placé plus bas que le *maximum* M de la première, mais il pourra se trouver plus rapproché de l'observateur comme dans les *fig.* 3 et 6, ou plus éloigné comme dans la *fig.* 4, ou enfin sur la même verticale comme dans la *fig.* 5, cela dépendra de la loi que suivront les pouvoirs réfringens des couches.

Dans tous ces cas, les premières branches des trajectoires qui se coupent déjà mutuellement au point *O* ne pourront pas s'entrecouper une seconde fois avant d'avoir obtenu leur *minimum*. Pour le faire voir reprenons la valeur générale de $\frac{dz}{dx}$ qui représente l'inclinaison de la tangente; cette valeur étant élevée au carré peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = tang^2. I. (1 - m\varphi) - m\varphi$$

D'après cette expression, lorsque deux trajectoires parties du même point *O* pénètrent dans la même couche, auquel cas $m\varphi$ est le même, l'inclinaison de la tangente est la plus grande pour celle qui a la plus grande valeur de *I*. Mais celle-ci étoit en arrière de l'autre à l'origine, elle se maintiendra donc en arrière jusques dans la couche où la première atteint son *minimum* : alors elle pénétrera plus avant dans le milieu réfrigent, et aura son *minimum* plus bas. Ainsi les deux premières branches qui s'entrecoupoient déjà à l'origine, ne pourront pas se rencontrer une seconde fois.

Mais les deux trajectoires auxquelles ces premières branches appartiennent, auront encore nécessairement un autre point d'intersection, soit entre la première branche de la trajectoire supérieure, et la seconde branche de la trajectoire inférieure comme dans la *fig.* 3, soit entre les deux secondes branches comme dans les *fig.* 4, 5 et 6, et selon que le *minimum* de la trajectoire inférieure précédera ou suivra l'autre dans le sens horizon-

tal, le point d'intersection sera au-dessous de l'observateur comme dans les *fig.* 3 et 6, ou à son niveau comme dans la *fig.* 5, ou enfin au-dessus de lui comme dans la *fig.* 4.

Ces résultats supposent seulement que les pouvoirs réfringens des couches suivent une loi continuellement décroissante au-dessous de l'observateur, et continuellement croissante au-dessus. Alors les secondes branches des courbes sont indéfinies; l'horizontalité des couches les rend nécessairement symétriques autour de l'ordonnée verticale qui passe par leur *minimum*. Leur amplitude OB; OB' est donc double de l'abscisse OP; OP' de ce *minimum;* de là il suit que si ce point se trouve sur la même verticale dans les deux trajectoires comme cela arrive dans la *fig.* 5, les amplitudes des deux courbes seront égales, et par conséquent leurs secondes branches se couperont sur la ligne horizontale qui passe par l'observateur; au contraire, dans la *fig.* 6 l'amplitude OB' de la trajectoire la plus basse est moindre que l'amplitude OB de la trajectoire la plus haute. Il y a donc nécessairement au-dessous de l'observateur un second point d'intersection qui peut être entre les deux secondes branches comme dans la *fig.* 6, ou entre la première branche de la trajectoire la plus haute et la seconde branche de la trajectoire la plus basse comme dans la *fig.* 3. Enfin si l'amplitude OB' est plus grande que OB comme cela arrive dans la *fig.* 4, il n'y aura nécessairement point d'intersection au-dessous de l'observateur, à cause de la symétrie des deux courbes; mais il y en aura au dessus, car si

on les considère toutes deux à partir de l'axe horizontal OX où elles sont éloignées l'une de l'autre dans le sens horizontal de la quantité finie BB', les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{d^2z}{dx^2}$ pour la trajectoire OM' qui est la plus basse, seront plus grandes que pour la trajectoire OM. Par conséquent la première aura sa tangente au point B plus inclinée sur l'axe OX que la seconde, et en outre elle se relevera plus rapidement. Il en sera de même dans toutes les couches au-dessus de la ligne OX; par conséquent les courbes convergeront; l'intervalle horizontal qui les sépare dans chaque couche diminuera continuellement, et comme il est fini et que les courbes sont indéfinies, il s'ensuit qu'elles se rencontreront inévitablement.

Il est encore facile de prouver que le second point d'intersection sera unique. D'abord dans le cas des *fig.* 4, 5, 6 où deux branches de même nom se coupent, nous avons démontré précédemment, d'après l'équation differentielle, qu'elles ne peuvent se couper qu'en un point; car à cause de la symétrie des trajectoires, ce que nous avons dit des premières branches s'applique également aux secondes, et dans le cas de la *fig.* 3 où l'intersection a lieu entre deux branches de nom différent, si la branche MB en se prolongeant pouvoit aller rencontrer la branche $M'B'$, il est évident que dans le point où elle la couperoit, elle auroit sa tangente plus inclinée sur l'axe XO; or, cela est impossible puisque son *minimum* est plus élevé.

Les propriétés précédentes n'ont lieu qu'en supposant

le milieu indéfini et les pouvoirs réfringens continuellement décroissant de haut en bas. Si ces conditions n'étoient pas remplies, et si les pouvoirs réfringens après avoir augmenté jusqu'à une certaine limite, venoient ensuite à diminuer, il en résulteroit dans les trajectoires des inflexions au moyen desquelles les points de rencontre pourroient être plus nombreux. On ne peut pas soumettre ces effets à un calcul général puisque les élémens qui les déterminent sont tout à fait arbitraires, mais en décomposant le fluide en zônes où les valeurs des pouvoirs réfringens soient continuellement croissantes ou décroissantes suivant une même loi, on pourra dans chaque zône suivre la marche des trajectoires par les mêmes principes, et leur appliquer les mêmes raisonnemens.

Examinons maintenant la manière dont se suivent les intersections des différentes trajectoires. Cette recherche est très-intéressante, car c'est de là, comme on le verra tout à l'heure, que dépendent le nombre et la situation des images qui peuvent être reçues par l'observateur. Mais pour ne pas nous perdre dans des généralités inutiles en discutant des résultats qui peuvent être vus de mille manières, et même tout à fait arbitrairement, choisissons un cas particulier, par exemple, celui de la progression arithmétique; et les phénomènes qui se présenteront dans ce cas très-simple, nous serviront de guide dans tous les autres.

Lorsque les pouvoirs réfringens décroissent en progression arithmétique, nous avons vu que l'équation des premières branches des trajections est

$$x = \frac{2\ cos.\ I}{mA}.\ (sin.\ I - \sqrt{sin^2.\ I - mAz})$$

les coordonnées X et Z du *minimum* sont données par les équations

$$X = \frac{2\ cos.\ I.\ sin.\ I}{mA};\quad sin^2.\ I = mAZ$$

Les courbes étant symétriques autour de l'ordonnée verticale qui passe par leur *minimum*, l'équation des secondes branches sera la même que celle des premiers en changeant dans celle-ci l'abscisse x en $2\,X - x$, ce qui donne pour ces secondes branches,

$$x = \frac{2\ cos.\ I}{mA}.\ (sin.\ I + \sqrt{sin^2.\ I - mAz})$$

En faisant évanouir le radical, on aura l'équation suivante qui comprend les deux précédentes,

$$mAx^2 - 2x.\,sin.\,2I + 2.\,(1 + cos.\,2I).\,z = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

On voit que ces trajectoires sont des paraboles dont l'axe est vertical. Cherchons maintenant le lieu de leurs intersections, ou, ce qui revient au même, cherchons la courbe qui les toucheroit toutes. Pour cela, il faut égaler à zéro la différentielle de l'équation précédente par rapport à I seul, et éliminer ensuite I entre les deux équations; la différentiation donne

$$x.\ cos.\ 2\,I + z.\ sin.\ 2\,I = 0$$

la valeur de z en x étant substituée dans l'équation (1), celle-ci devient

$$mAx^2 - 2x.\sin.2I - 2.\frac{x.(1+\cos 2I).\cos.2I}{\sin.2I} = 0$$

Une de ses racines est $x=0$, ce qui rend z nul; mais ces valeurs ne peuvent convenir qu'aux premières branches et non pas aux secondes comme il est facile de le voir d'après leurs équations. Elles signifient que les premières branches ne peuvent se couper ainsi qu'à l'origine des coordonnées, qui en effet est leur point commun de départ. Supprimant ce facteur, l'autre donne

$$x = \frac{2}{mA}.\frac{1}{\tang.I}; \quad z = -\frac{2}{mA}.\left(\frac{1}{2\sin^2.I} - 1\right)$$

d'où l'on tire, en éliminant I,

$$z = \frac{1}{mA} - \frac{mAx^2}{4}$$

L'intégrale particulière cherchée est donc aussi une parabole dont l'axe coincide avec l'axe des z, et dont le sommet est placé sur cet axe au-dessous de l'observateur, à une distance $\frac{1}{mA}$ de l'origine des coordonnées. En sorte qu'il coincide avec le point le plus bas de l'ellipse qui est le lieu de tous les *minima* des trajectoires.

Ces résultats sont tracés dans la *fig.* 7. *O* est l'observateur, l'ellipse *OSZ* est le lieu des *minima*, et la parabole *ZMFT* représente l'intégrale particulière des trajectoires que nous venons de déterminer. Examinons maintenant les conséquences qui résultent de cette disposition.

D'abord on voit que les trajectoires menées sous une

direction presque verticale, ont leurs intersections consécutives très-près de leur *minimum*. Cela devoit être, puisque Z étant un des sommets de l'ellipse, tous ces *minima* sont presque à la même hauteur. Les intersections des autres trajectoires consécutives s'éloignent continuellement du *minimum* à mesure que l'angle I diminue, et leur point de tangence avec la parabole $ZMFT$ s'éloigne aussi et s'élève indéfiniment sur cette courbe. La limite de ces contacts est donnée par la trajectoire OT' qui a son *minimum* au point O, et qui se confond à l'infini avec ZT. Cette trajectoire n'est autre chose que la parabole ZT dont le sommet est transporté de Z en O.

Il suit de là que toutes les trajectoires qui peuvent être menées du point O dans le milieu réfringent, sont entièrement comprises dans l'intérieur de la parabole OZT, par conséquent aucun objet situé hors de cet espace ne pourra être vu de l'observateur. A cause de cette propriété, nous appellerons la courbe ZFT *courbe limite*, ou *caustique*.

Considérons maintenant un objet AB situé dans la partie de l'espace visible qui est comprise entre la trajectoire OT' et la courbe limite OZT. Par son extrémité A on pourra mener deux trajectoires $At'O$ $At''O$ dont les secondes branches toucheront la courbe limite, l'une au-dessus du point A, l'autre au-dessous. Les premières branches de ces deux trajectoires se réuniront au point O où est placé l'observateur, et par conséquent celui-ci recevra deux images du point A. On peut également mener deux trajectoires par l'extrémité supérieure

B de l'objet et deux par chacun de ses points intermédiaires, de sorte que chacun de ces points enverra ainsi à l'observateur deux images ; mais avec cette différence que les trajectoires dont le point de tangence est supérieur à l'objet se couperont au-dessus de lui, et au-delà relativement à l'observateur, tandis que les autres trajectoires qui sont les plus basses, et dont le point de tangence est inférieur à l'objet, se couperont entre l'objet et l'observateur, comme le représente la figure.

L'observateur recevra donc deux images de l'objet, l'une supérieure $A'B'$ qui sera droite, l'autre inférieure $A''B''$ qui sera renversée.

Si la partie inférieure *A* de l'objet étoit placé sur la courbe limite elle-même, par exemple au point *F*, les deux trajectoires AA', AA'' se réduiroient à une seule, et l'intervalle $A'A''$ des deux images deviendroit nul, ensorte qu'elles paroitroient reposer l'une sur l'autre en se touchant par leurs extrémités.

Si l'objet *AB* au lieu d'être situé au-dessous de la trajectoire OT' étoit situé au-dessus entre cette trajectoire et l'axe *OV*, les deux trajectoires supérieures AA', BB', ne pourroient plus aller toucher la courbe limite au-dessus de *A* et de *B* dans la branche *FT*; mais elles seroient remplacées par deux autres trajectoires qui auroient leur *minimum* de l'autre côté de l'axe *OV*, et qui viendroient toucher la courbe limite sur son autre branche $Z\Theta$. Ainsi, dans ce cas, il y auroit encore une image droite $A'B'$ au-dessus d'une image renversée : seulement les trajectoires qui donneroient la première auroient leur *minimum* situé

à gauche de l'axe, et celles qui donneroient la seconde auroient leur *minimum* du côté opposé.

Si dans l'équation des trajectoires on se donne x et y, et que l'on veuille déterminer I, on ne trouve généralement que deux valeurs qui donnent des trajectoires dirigées du même côté de la verticale, par conséquent chaque point situé dans l'espace visible ne peut envoyer à l'observateur que deux images au plus.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le milieu indéfini, et capable de produire la réflexion jusques dans les inclinaisons verticales; mais il n'en est pas ainsi dans la nature. Cette circonstance fera évanouir toutes les secondes branches dont l'inclinaison dépassera les limites de la réflexion intérieure dans le milieu que l'on aura considéré, et avec elles s'évanouiront pareillement les images qu'elles produisoient.

Dans ce cas les phénomènes seront les mêmes que si l'on élevoit dans le milieu à la hauteur du *minimum* de la trajectoire la plus basse que je nommerai la *trajectoire limite*, un plan solide qui absorbât tous les rayons. Par exemple, si ce plan est représenté par hSM', toutes les trajectoires plus inclinées que OS n'auront point de secondes branches; ainsi, les points contenus dans l'espace SKF, qui étoient précédemment visibles de deux manières, ne le seront plus du tout, et ils entreront dans l'espace invisible qui sera alors terminé de S en F par la trajectoire limite SF elle-même; et au-dessus du point F il le sera comme précédemment par la courbe limite FT qui ne change point de nature ni de situation. De plus,

en prolongeant indéfiniment la seconde branche FT'' de la trajectoire limite, on voit que les seuls points contenus dans l'espace $T''FT$ pourront envoyer de doubles images; car ce sont évidemment les seuls dont les deux trajectoires touchent la courbe limite FT au-dessus du point F, et par conséquent ce sont aussi les seuls dont les deux trajectoires aient leur *minimum* au-dessus de celui de la trajectoire limite. Pour tous les autres points situés dans l'espace visible, mais hors de l'espace $T''FT$, la trajectoire inférieure, celle qui donne le renversement, passera au-dessous du point S, et par conséquent disparoîtra.

Cet effet est précisément le même que celui que produit l'interposition du sol lorsqu'on observe dans l'air atmosphérique, ou en général la surface inférieure des vases quand on opère un des fluides limités. Mais ici la limite n'est plus celle de la réflexion intérieure, parce que la densité de la couche qui repose sur le sol ou sur le fond du vase n'est pas nulle, comme nous le supposions tout à l'heure, afin de pousser les considérations à l'extrême. La limite réelle pour chaque cas est donnée par la différence des pouvoirs réfringens du fluide dans les deux couches extrêmes, comme on l'a vu précédemment, et elle est la même que celle de la réflexion intérieure dans un fluide dont le pouvoir réfringent seroit égal à cette différence. En supposant donc, dans la figure, le sol élevé à la hauteur déterminée par cette nouvelle limite, on fera encore disparoître un plus grand nombre de trajectoires, et une nouvelle portion de la courbe limite; ce qui en restera servira comme tout à l'heure pour

séparer les points de l'espace qui seront encore visibles de ceux qui ne le seront plus, et les points qui peuvent encore envoyer deux images de ceux qui n'en peuvent plus envoyer qu'une seule directe.

Quoique tout ce que nous venons de dire convienne particulièrement à la progression arithmétique, cependant des résultats analogues ont lieu dans toutes les autres lois. Il existe toujours en avant de l'observateur, et au-delà de la trajectoire limite, un espace entièrement invisible; mais la caustique qui termine cet espace varie selon la loi de variation des pouvoirs réfringens.

On peut démontrer d'abord que cet espace commencera toujours au point de tangence de la trajectoire limite sur le sol, de sorte que tous les points du sol plus éloignés ne seront pas aperçus de l'observateur. En effet, les trajectoires menées de son œil sous une inclinaison moindre que la trajectoire limite, ayant leur *minimum* plus haut que ces points, ne pourront pas les atteindre, et les trajectoires menées sous une inclinaison plus grande seroient arrêtées et interceptées par le sol, en deçà du point de tangence.

Maintenant, la trajectoire limite menée sous l'inclinaison I, et la trajectoire infiniment voisine menée sous l'angle $I - dI$, se couperont dans leurs secondes branches, et *en général* à une distance finie de leur *minimum*. Il y aura donc toujours une première portion de la caustique, à partir du point de tangence, qui sera formée par la seconde branche de cette trajectoire, et qui remplacera la portion de caustique correspondante aux tra-

jectoires plus basses que l'interposition du sol a interceptées. Ce résultat s'est présenté dans la progression arithmétique, mais il est général et commun à toutes les autres lois : car, pour qu'il cessât d'avoir lieu, il faudroit que deux trajectoires consécutives pussent avoir leur *minimum* à la même hauteur, ce qui est impossible, comme on l'a vu précédemment. Seulement s'il arrivoit que la courbe des *minima* fût extrêmement applatie et partout peu différente de l'horizontale, alors deux trajectoires infiniment voisines se couperoient toujours très-près de leur *minimum*, la caustique formée par leurs intersections successives seroit aussi très-applatie, et n'auroit qu'une branche unique presque horizontale. Cela aura lieu en général lorsque les couches de densité variables n'auront qu'une épaisseur très-petite relativement à la hauteur de l'observateur supposé placé dans une couche de densité constante. Tel est particulièrement le cas de la réflexion intérieure dans les milieux diaphanes homogènes. Mais, en général, la caustique pourra avoir des formes beaucoup plus compliquées, comme nous le verrons par la suite; elle pourra avoir des points de rebroussement qui tour à tour la rapprocheront et l'éloigneront de l'observateur.

Bornons-nous d'abord au cas simple et très-fréquent où elle ne seroit formée que d'une branche unique qui, commençant au point de tangence de la trajectoire limite sur le sol, iroit ensuite en s'élevant et en s'éloignant de l'observateur, cette première branche pouvant d'ailleurs être discontinue, voyez *fig.* 8. Maintenant si l'on sup-

pose qu'un objet mobile, de grandeur déterminée, qu'un homme, par exemple, s'éloigne de l'observateur en marchant sur la surface du sol, on devra observer les phénomènes suivans. Tant que l'objet sera situé entre l'observateur et le point de tangence S de la trajectoire limite, on le verra comme à l'ordinaire, son image sera droite et unique. Arrivé au point S l'objet semblera à l'horizon, et si c'est un homme, il paroîtra marcher dans l'eau. En s'éloignant davantage il paroîtra s'y plonger par sa partie inférieure qui deviendra invisible, mais si la distance SF est sensible, tant qu'il se trouvera entre les points S et F, il n'enverra point d'image renversée, seulement la partie inférieure de son corps paroîtra coupée par l'horizon. Au delà du point F, la partie comprise dans l'espace $T''FT$ paroîtra double, la partie supérieure continuera d'être vue droite et unique comme à l'ordinaire, et la partie inférieure étant de plus en plus invisible, le corps qui d'abord étoit vu tout entier, paroîtra maintenant réduit à son buste. Ces apparences continueront jusqu'à ce que le sommet de la tête atteigne la trajectoire limite, alors l'image renversée de la tête paroîtra à l'horizon; plus tard elle le quittera, et le haut du corps restant seul visible paroîtra avec son image renversée suspendu en l'air jusqu'à ce qu'enfin la partie visible et son image diminuant toujours par l'effet de l'éloignement se réduisent à un point unique qui s'évanouira sur le fond du ciel.

Ces phénomènes qui se déduisent rigoureusement de la théorie ne sont pas une simple spéculation mathéma-

tique. Nous les avons réellement observées M. Mathieu et moi à Dunkerque, et ils sont représentés dans la *fig.* 9, tels que nous les avons vus. L'homme qui nous servoit de signal portoit une grande règle de bois oblique, et le point où la règle paroît brisée, indique la hauteur de la caustique au-dessus du sol pour les divers éloignemens.

Ceci nous a servi pour déterminer exactement les ordonnées de cette caustique pour diverses distances, et celles de la trajectoire limite. L'expérience en est représentée dans la *fig.* 10. Un de nous restant au cercle répétiteur, regardoit avec la lunette une grande règle de bois divisée en centimètres que le second observateur lui présentoit verticalement à des distances connues. Il est clair que le renversement des divisions suffisoit pour faire connoître l'élévation de la caustique, mais comme le point précis de ce renversement étoit difficile à apercevoir à cause des ondulations excessives de l'air, le second observateur tenant un piquet à la main, indiquoit successivement sur la règle un décimètre, ou deux, ou trois ou davantage, et à chaque fois faisant un signal en élevant son autre main au-dessus des couches pour annoncer le changement de hauteur. Si le point marqué sur la règle tomboit au-dessous de la caustique on n'apercevoit pas la pointe du piquet dans la lunette, non plus que la main qui le tenoit. C'est ce que représente la première position de la figure, mais lorsque le piquet arrivoit sur la caustique, les deux images se touchoient par leur pointe, ou si la succession des hauteurs de décimètre en décimètre ne permettoient pas qu'il tombât exactement

sur cette position, on pouvoit estimer aisément d'après la série des apparences, la fraction de décimètre dont il falloit tenir compte. On avoit donc ainsi la hauteur de la caustique d'une manière très-approchée. Or, l'observateur qui faisoit ces signaux sur la règle, ignoroit absolument l'instant où il atteignoit le caustique de l'autre observateur; c'est pourquoi il la dépassoit bientôt par d'autres indications. Dans ce cas, le deux images du piquet se séparoient comme le représente la troisième position de la *fig.* 10, l'image supérieure s'élevant toujours, l'inférieure descendoit jusqu'à atteindre enfin l'horizon apparent. Alors la pointe du piquet tomboit évidemment sur la trajectoire limite, ce qui détermine l'ordonnée de cette trajectoire, ou sa hauteur au-dessus du sol. On doit remarquer que l'image inférieure descendoit par degrés inégaux, et de plus en plus petits à mesure qu'elle approchoit de l'horizon apparent, où ses abaissemens étoient presque insensibles quoique les élévations de l'image supérieure changeassent toujours de la même quantité. Cela prouve que les images renversées des objets devoient être plus courtes que leurs images directes, et d'autant plus que les objets étoient plus élevés au-dessus de la caustique. Nous avons en effet vérifié cette circonstance par des mesures précises, et la simple vue l'indiquoit assez, mais nous y reviendrons, et nous la démontrerons par le calcul plus loin, en traitant des dimensions relatives des images, ce qui nous conduira à expliquer le phénomène de la suspension.

Les procédés que je viens d'exposer nous ont fait con-

noître les ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite pour des distances connues, et pour un état donné du ciel; car on présume aisément que ces ordonnées sont très-variables d'un jour à l'autre. Nous eûmes même le soin de choisir pour les observer, un beau temps et un ciel sans nuages, car la seule apparition ou disparition d'un rayon de soleil, y cause de très-grandes modifications: mais cela ne suffisoit point encore pour construire nos deux courbes, il falloit connoître encore la surface du terrain sur laquelle on devoit les rapporter.

Cette surface n'étoit ni plane ni horizontale, deux circonstances bien singulières puisqu'elle étoit formée par la laisse de basse mer. En partant du point où nous observions, le terrain alloit toujours en s'élevant, d'abord avec assez de rapidité jusqu'à une petite distance, ensuite plus lentement suivant une pente douce qui se prolongeoit jusqu'aux objets dont nous observions les images à l'extrémité de la plaine sablonneuse. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que cette configuration nous fut indiquée par les observations avant que nous l'eussions vérifiée par le nivellement, car j'avoue que de nous-mêmes nous ne l'aurions pas soupçonnée, persuadés que la mer faisoit tous les jours le nivellement de cette surface. Mais le 10 mars, par un temps froid et couvert, le thermomètre centésimal étant à $7^{o},5$ sur le sable, et à $5^{o},6$ dans les couches de densité constantes, nous observâmes la dépression de l'horizon apparent de $3' 56'',52$, le centre du cercle étoit alors à $1^{m},15$ au-dessus du sol. Nous observâmes ensuite ce même horizon en plaçant le cercle sur

le sable même, de manière que son centre étoit élevé de 0,61. Cette hauteur surpassoit encore de beaucoup celle des couches de densité variables qui n'avoient qu'une très-petite épaisseur au-dessus du sol. Dans cette seconde position, l'abaissement de l'horizon ne fut plus que de 30″. Cependant si la surface du terrain eût été plane, les densités extrêmes étant les mêmes, la dépression auroit dû être aussi la même que dans la première position du cercle. La grande différence de ces dépressions indiquoit donc que le terrain étoit inégal, et le sens de cette différence montroit qu'il alloit en s'élevant, d'abord d'une manière plus rapide, ensuite plus lente. Ces conjectures furent pleinement vérifiées, lorsque nous nous transportâmes au même lieu, à la mer descendante, pour examiner comment elle l'abandonnoit. Nous y reconnûmes l'inclinaison que nous avions présumée. D'après cela nous nous décidâmes à niveler exactement le terrain, dans la direction du rayon visuel, ce que nous fîmes avec beaucoup de soin, au moyen du cercle répétiteur transporté successivement à des stations éloignées les unes des autres de 185^{m}. Nous avons ainsi déterminé la coupe représentée dans la figure 11, où l'on a aussi tracé la caustique et la trajectoire limite résultante des mesures prises le 8 mars. Il est nécessaire de dire que l'échelle adoptée pour les abscisses, est 336 fois moindre que celle qui a servi pour les ordonnées. Il eût été impossible d'employer la mêm eéchelle pour les unes et pour les autres, sans étendre démesurément la longueur de la figure, et il en seroit de plus résulté que les ondulations du terrain et la cour-

bure de la caustique et des trajectoires, auroient été à peine sensibles. Voici au reste les mesures exactes de toutes les quantités employées dans cette construction.

Mesures des ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite, le 8 mars 1809.

Numéros des stations.	Abscisses ou distances à l'observateur, en prenant 36 mètres pour unité.	Ordonnées de la caustique en décimètres.	Ordonnées de la trajectoire limite en décimètres.
1	2	En deçà de l'horizon app.	. . . .
2	3.75 = 210 mètres	0	0 Horiz. appar.
3	4.75.	0	0 Les pieds marchant dans l'eau.
4	5.75	Non observé.	0.2
5	6.75	Non observé.	0.5
6	7.75	1	2
7	8.75	1.5	Non observé.
8	9.75	1.8	4.2
9	10.75	2	Non observé.
10	11.75	2.5	8
11	12.75	3	10
12	13.75	3.3	10
13	14.75	3.5	12
14	15.75	3.5	11

Les valeurs des ordonnées de la trajectoire limite deviennent un peu incertaines lorsque cette trajectoire s'élève beaucoup au-dessus de la caustique comme dans les dernières observations; alors 1 ou 2 décimètres de variation dans la hauteur de l'image directe ne sont plus sensibles dans l'image renversée. Telle est probablement la cause des petites anomalies que l'on y remarque et que je n'ai pas voulu corriger.

Nivellement du terrain.

Différences de niveau en centimètres.	Distances des stations en mètres.
$P_1M_1 = 58$	$AP_1 = 185$
$P_2M_2 - P_1M_1 = 7$	$P_1P_2 = 185$
$P_3M_3 - P_2M_2 = 0$	$P_2P_3 = 185$
$P_4M_4 - P_3M_3 = 10$	$P_3P_4 = 185$
$P_5M_5 - P_4M_4 = 11.5$	$P_4P_5 = 185$
$P_6M_6 - P_5M_5 = 13$	$P_5P_6 = 185$
$P_7M_7 - P_6M_6 = 0.5$	$P_6P_7 = 185$
$P_9M_9 - P_7M_7 = 15$	$P_7P_9 = 370$
Différ. totale . . $P_9M_9 = 115.0$	Dist. totale. . $AP_9 = 1665$

Je suis persuadé que cette élévation du terrain en pente douce est la cause déterminante qui rendoit la suspension et le mirage sensibles tous les jours, pour les plus légères différences de température, et par des temps où l'on n'auroit jamais espéré que ces phénomènes se montreroient. L'élévation rapide qui avoit lieu d'abord près du cercle produisoit le même effet que si l'on eût diminué sa hauteur au-dessus du sol, en laissant subsister les mêmes différences de températures extrêmes. Au-delà de cette première rampe, la pente plus douce du terrain, incliné seulement à l'horizon de 1′ 18″, permettoit aux trajectoires de tomber sur cette portion de la surface avec le degré d'obliquité nécessaire pour se réfléchir; alors la petite inclinaison 1′ 18″ diminuant d'autant leur dépression apparente, relevoit, pour ainsi dire, leurs secondes branches, et leur donnoit, indépendamment de la température, l'inclinaison nécessaire pour qu'elles pussent

se terminer à des objets terrestres éloignés, situés à une grande hauteur au-dessus du sol, par conséquent fort visibles et fort élevés au-dessus des couches de densité variable. Une autre conséquence résultante de cette disposition du terrain, c'est que les phénomènes n'étoient point réciproques pour deux observateurs qui se regardoient mutuellement. Par exemple, l'un étant en o, l'autre en o' à la même hauteur de 1^m16 au-dessus du sol, l'observateur o voyoit o' à moitié plongé dans l'eau avec une partie de son buste renversée, tandis que o' voyoit o seulement par vision directe comme à l'ordinaire. La raison en est que le premier étant abaissé par la pente rapide AM étoit favorisé par cette circonstance qui devenoit au contraire défavorable à l'autre observateur, parce qu'elle l'empêchoit de mener au premier une trajectoire curviligne qui auroit dû avoir son *minimum* dans cette partie si le plan M_1M_2 s'étoit prolongé sous la même inclinaison. Aussi pour observer o, il falloit que o' s'abaissât jusqu'au L_3 sur la trajectoirelimite, afin de faire tomber le *minimum* sur M_1M_2', et pour le voir disparoître il falloit qu'il se baissât jusqu'au C^3 sur la caustique en se couchant sur le terrain.

Il existe un moyen facile de voir commodément ces phénomènes, même lorsqu'ils sont à peine sensibles. C'est d'adapter devant l'objectif d'une lunette un miroir plan incliné de 45°, alors en tenant la lunette verticale, le miroir donne l'image des objets situés à l'horizon, et en l'approchant plus ou moins du sol ou du corps échauffé on observe l'image droite et l'image renversée dans le champ de la lunette. Cet appareil a été imaginé

par M. Wollaston. Il y avoit placé un micromètre avec lequel il mesuroit la dimension des images, depuis le point où l'image renversée touchoit l'horizon apparent jusqu'au point correspondant de l'image droite. Mais il est facile de sentir que pour un même état de l'air, cet angle dépend de la distance de l'objet et de sa hauteur, même en supposant toujours l'œil à la même place; car la seconde branche de la trajectoire limite rencontre l'objet d'autant plus haut qu'il est plus éloigné. Supposons toujours l'observateur dans les couches supérieures où la densité est sensiblement constante : si le sommet de l'objet observé se trouve placé à la même hauteur que l'œil, l'intervalle observé par le moyen de M. Wollaston sera précisément égal à l'angle I ou à la dépression apparente de l'horizon. Si l'objet est plus bas que l'œil, l'intervalle observé sera moindre que I; il sera plus grand si l'objet est plus élevé que l'œil; et enfin si l'objet étoit infiniment éloigné, il seroit égal à $2I$ ou au double de la dépression apparente. De plus grandes variations encore auroient lieu si l'observateur pénétroit dans les couches de densité variables. Ces circonstances auxquelles M. Wollaston n'a point eu égard, sont très-probablement la cause des irrégularités qu'il a remarquées lui-même dans ses observations, et c'est ce qui m'a empêché de les calculer.

Les phénomènes que nous venons d'examiner ne supposent à la caustique qu'une branche unique, mais elle peut aussi en avoir plusieurs, et c'est ce qui produit la multiplicité des images extraordinaires. Pour en donner un exemple simple, il ne faut que modifier un peu le

cas de la progression arithmétique et supposer, qu'à une certaine hauteur le pouvoir réfringent ne varie plus. Cette supposition particulière a du rapport avec ce qui se passe généralement dans l'air atmosphérique lorsqu'il repose sur un corps échauffé. Dans ce cas, la forme des trajectoires sera la même que précédemment, tant qu'elles resteront dans les couches inférieures où le pouvoir réfringent est variable, mais au-dessus de cette limite, elles se changeront en des lignes droites indéfinies qui seront les prolongemens de leurs tangentes extrêmes. Cette modification devra nécessairement introduire aussi des changemens dans le nombre et dans la position des images qui pourront être reçues par l'observateur, c'est ce qu'il s'agit d'examiner.

Pour commencer par le cas le plus simple, nous placerons l'observateur sur la limite même qui sépare les couches variables de celles où le pouvoir réfringent est constant; nous chercherons, comme précédemment, la courbe limite de toutes les trajectoires non pas pour leur partie curviligne, car nous savons que sa limite est une parabole; mais pour leur portion rectiligne: et à cet effet nous allons d'abord déterminer l'équation des lignes droites dans lesquelles elles dégénèrent.

Cette équation se présente comme d'elle-même; car à cause de la symétrie des trajectoires, leurs secondes branches, lorsqu'elles reviennent au niveau de l'observateur en sortant des couches inférieures, ont des inclinaisons exactement contraires à celles que leurs premières branches avoient lorsqu'elles y sont entrées. Ces secondes

branches entrent donc dans les couches de réfraction constante avec une inclinaison I, de plus elles y entrent sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale au double de l'amplitude de la trajectoire, ainsi la ligne droite danslaquelle celle-ci dégénère, à partir de ce point, a pour équation

$$z = (2\,X - x).\ tang.\ I$$

Dans le cas particulier de la progression arithmétique on a

$$X = \frac{sin.\ 2\,I}{mA}$$

par conséquent

$$z = \frac{4\,sin^2.\ I}{mA} - x.\ tang.\ I. \qquad (1)$$

C'est l'équation particulière de toutes ces lignes droites. En prenant sa différentielle relative à I seul, et l'égalant à zéro, on aura

$$x = \frac{8\,sin.\ I.\ cos^3.\ I}{mA} \qquad (2)$$

c'est la condition des intersections successives. Il faut maintenant éliminer I entre cette équation et la précédente. Or celle-ci donne pour $sin^2.\ I$ deux valeurs, qui sont

$$sin^2.\ I = \frac{1 - \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}$$

$$sin^2.\ I = \frac{1 + \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}.$$

En mettant successivement ces deux valeurs de $sin^2.\ I$

dans l'équation (2), après avoir élevé ses deux membres au carré, on trouve

$$\frac{m^2A^2x^2}{16} = (1 - \sqrt{1 + 2\,mAz}).\left(\frac{3 + \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}\right)^3$$

$$\frac{m^2A^2x^2}{16} = (1 + \sqrt{1 + 2\,mAz}).\left(\frac{3 - \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}\right)^3$$

Ce sont les deux branches de la courbe formée par les intersections successives de toutes les droites ; cette courbe est représentée dans la *fig.* 12.

La première de ses branches commence à l'origine même, car $z = o$ y donne $x = o$, elle ne s'étend que du côté des z négatives, c'est-à-dire au-dessus de l'observateur, car z positif donneroit x imaginaire ; si l'on suppose z fort petit, l'équation de cette branche se réduit à

$$z = -\frac{mAx^2}{16}$$

elle se confond donc alors avec une parabole, mais cette coincidence n'a lieu que pour de très-petites valeurs de z ; enfin cette branche s'arrête lorsqu'on a

$$1 + 2\,mAz = 0$$

ce qui donne

$$z = -\frac{1}{2.\,mA}; \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2.\,mA}$$

Ces valeurs de x et de z répondent à une valeur de $\sin^2. I$ qui est

$$\sin^2. I = \tfrac{1}{4}; \quad \text{d'où l'on tire} \quad I = 30^\circ$$

Au-delà de ce terme la branche que nous discutons

devient imaginaire, mais c'est précisément alors que l'autre commence, et elle va continuellement en se rapprochant de l'observateur, et en s'abaissant vers l'axe des x qu'elle coupe enfin dans un point dont l'abscisse est

$$x = \frac{2}{mA}$$

Ce point répond à une valeur de $sin.\ I$ qui est

$$sin^2.\ I = \tfrac{1}{2};\quad \text{ce qui donne}\quad I = 45^\circ.$$

En effet, c'est alors que les intersections des trajectoires commencent à se faire dans les couches dont le pouvoir réfringent est variable.

Pour connoître maintenant le sens de la courbure de chacune des deux branches précédentes, pour le suivre dans toute leur étendue, et savoir si elles n'ont pas de points d'inflexion, il faudroit différencier les équations précédentes entre x et z, mais on y parviendra plus facilement au moyen des équations entre x et z et I.

En effet, les valeurs de x et de z résultantes des équations (1) et (2) peuvent être mises sous la forme

$$mA.\ x = 2.\ sin.\ 2\ I + sin.\ 4\ I$$
$$mA.\ z = 1 - 2.\ cos.\ 2\ I + cos.\ 4\ I$$

en faisant varier dans ces équations x, z et I, et prenant dx pour différentielle constante, on en tire

$$\frac{dz}{dx} = -\ tang.\ I$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{(1 + cos.\ 6\ I).\ tang^3.\ 3\ I}{2.\ (sin.\ 2\ I + sin.\ 4\ I)^3}$$

Ces valeurs s'appliquent également aux deux branches

de la courbe limite. La première, celle de $\frac{dz}{dx}$, nous apprend que cette courbe est partout tangente à quelqu'une des trajectoires, cela devoit être. La seconde, celle de $\frac{d^2z}{dx^2}$, nous fera connoître par son signe dans quel sens chacune des branches tourne sa convexité. Or le facteur $\frac{1 + cos.\ 6\ I}{2.\ (sin.\ 2\ I + sin.\ 4\ I)}$ est constamment positif depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 45°$, c'est-à-dire dans toute l'étendue des deux branches; mais le facteur $tang^3.\ 3\ I$ est positif sur la première branche depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 30°$, et négatif sur la seconde depuis $I = 30°$ jusqu'à $I = 45°$. La première branche tourne donc sa concavité vers l'axe des x, et la seconde sa convexité : c'est ce que représente la *fig.* 12.

Dans cette figure O est l'observateur, et OX l'axe des x qui sépare les couches inférieures où la densité est variable, des supérieures où elle est constante. La parabole ZF est comme dans la *fig.* 7 la limite des intersections des trajectoires consécutives qui se coupent au-dessous de la ligne OX. Ces trajectoires s'étendent depuis les inclinaisons verticales jusqu'à celle de 45 degrés. Pour les trajectoires suivantes, depuis $I = 45°$ jusqu'à $I = 30$ degrés, les intersections successives se font sur la branche FR qui les touche toutes et leur sert de limite; enfin depuis $I = 30°$ jusqu'à $I = 0$, les intersections se font sur la branche RO qui, près du point O se confond avec une parabole.

Il résulte d'abord de cet arrangement que tous les

points contenus dans l'espace ZFX terminé par le prolongement de l'axe OX et la portion de parabole ZF seront tout-à-fait invisibles pour l'observateur.

Si par le point F on mène à la parabole ZF la tangente FT, qui fera avec l'axe des x un angle de 45°, tous les points compris dans l'espace indéfini $VOZFT$ pourront envoyer à l'observateur une trajectoire concave qui touchera la parabole ZF entre les deux points Z et F, et qui correspondra à une valeur de I comprise entre 90 et 45 degrés. Si le point donné est compris dans l'espace elliptique $OM'M''Z$, il sera vu ainsi par une première branche; s'il est hors de cet espace, il sera vu par une seconde.

Si l'on prolonge indéfiniment les droites FT, RT' qui sont les tangentes extrêmes de l'arc FR, ce qui donnera l'angle TFT' qui sera de 15 degrés, tous les points compris dans cet angle pourront envoyer une tangente à l'arc FR, et par conséquent à l'observateur une trajectoire concave qui les rendra visibles par sa seconde branche, et qui répondra à une valeur de I comprise entre 45° et 30°.

De tous les points compris dans l'espace FtR on pourra mener deux tangentes à l'arc FR, et par conséquent envoyer à l'observateur deux trajectoires, qui correspondront aussi à des valeurs de I comprises entre 45 et 30 degrés et dont les secondes branches les rendront visibles.

Il n'en sera pas de même des points compris dans l'espace θtF; ils ne pourront envoyer à l'arc FR qu'une seule tangente; ils n'enverront donc à l'observateur

qu'une seule trajectoire dont l'inclinaison soit comprise entre 45 et 30 degrés.

Tous les points compris dans l'espace $O\theta R$ pourront envoyer à l'arc OR deux tangentes, et par conséquent à l'observateur deux trajectoires correspondantes à des valeurs de I comprises entre 0 et 30 degrés. Ces trajectoires parviendront encore à l'observateur par leurs secondes branches.

Tous les points compris dans l'espace indéfini $XORT''$, c'est-à-dire entre l'axe OX, la courbe OR et le prolongement de sa tangente extrême, pourront envoyer une tangente à l'arc OR, et par conséquent à l'observateur une trajectoire comprise entre les inclinaisons $I=0$ et $I=30$ degrés.

Enfin, tous les points situés au-dessus de l'axe OX dans les couches de réfraction constante peuvent envoyer directement au point O une trajectoire rectiligne; c'est celle qui les rend visibles ordinairement.

Maintenant si un point se trouve appartenir en même-temps à plusieurs de ces espaces, il cumulera les propriétés qui leur appartiennent, et de là résulteront pour l'observateur plusieurs images visibles d'un même objet.

Soit par exemple l'objet AB compris dans l'espace $OR\theta$, il pourra d'abord envoyer à l'observateur de ses extrémités A et B deux trajectoires rectilignes qui donneront l'image directe ab, puis deux AA', BB' tangentes à l'arc OR et se coupant entre l'observateur et l'objet, d'où résultera l'image renversée $B'A'$; puis deux autres trajectoires tangentes au même arc, mais se coupant en

arrière de l'objet d'où résultera l'image droite $A''B''$; et enfin deux trajectoires AA''', BB''' tangentes à la parabole ZF d'où résultera l'image renversée $B'''A'''$; en tout quatre images, deux droites et deux renversées alternant les unes avec les autres.

Si le point B étoit situé sur la courbe OR, les deux images $B'A'$, $A''B''$ se toucheroient et paroîtroient poser l'une sur l'autre. Si en même temps le point A reposoit sur l'axe θX, les points A' et a des deux images ab, $A'B'$ seroient aussi en contact; par conséquent les trois images ab, $B'A'$, $A''B''$ paroîtroient immédiatement superposées. Si l'objet étoit placé dans l'espace FTR, il pourroit encore envoyer à l'observateur quatre images alternées comme les précédentes; mais les angles sous lesquels ces images arriveroient à l'observateur seroient différens. L'image inférieure $B'''A'''$ ne seroit plus donnée par la parabole ZF, mais par la branche FR; il en seroit de même de l'image droite $B''A''$ qui seroit donnée par ce même arc au moyen de trajectoires qui se couperoient en arrière de l'objet. Il n'y auroit plus qu'une seule image donnée par l'arc OR; elle seroit analogue à $B'A'$ et renversée comme elle. La quatrième image ab seroit toujours droite et donnée par des rayons directs, comme précédemment.

Par des considérations semblables on verra facilement que les objets situés dans l'espace θtF enverront aussi à l'observateur quatre images, deux droites, l'une par des trajectoires rectilignes S, l'autre par l'arc FR, et deux renversées par les arcs OR et ZF. Au-dessous de OF les ob-

jets ne pourront envoyer que deux images, l'une droite et supérieure par des trajectoires tangentes en arrière à la parabole ZF ou aux branches FR, RO; l'autre par la parabole ZF inférieure et renversée. Pour tous les objets situés au-dessus de OX dans l'espace $XFRT'$, il n'y aura que deux images, une droite et une renversée; enfin, comme nous l'avons déjà remarqué, dans l'espace ZFX il n'y en aura pas du tout.

Dans l'air atmosphérique, et même dans tous les liquides superposés, la limite des réflexions intérieures sera toujours bien inférieure à 45 degrés, par conséquent l'image renversée $B'''A'''$ la plus basse de toutes, et qui est donnée par la branche parabolique ZF, ne se formera point.

Il en sera de même dans l'air atmosphérique, et dans presque tous les liquides, des images données par l'arc FR, qui répondent à des réflexions intérieures de plus de 30 degrés, et elles ne se formeront pas non plus.

Mais les trajectoires données par la branche OR subsisteront toujours, quelque foible que soit le pouvoir réfringent du milieu, puisqu'elles s'étendent depuis 30 degrés jusqu'aux plus petites inclinaisons; d'où il suit que dans l'air atmosphérique et dans tous les fluides superposés, lorsque les pouvoirs réfringens des couches décroîtront en progression arithmétique, on pourra toujours voir trois images savoir, deux droites et une renversée placée entre les deux autres, lorsque les objets seront placés convenablement.

Dans l'air atmosphérique et dans tous les milieux où

la différence des pouvoirs réfringens seroit très-foible, la branche OR s'étendroit très-loin, et le point de rebroussement R seroit aussi extrêmement éloigné. Il suffiroit donc alors de considérer la branche OR comme une parabole à cause de la petitesse nécessaire des indications.

Supposons maintenant qu'en conservant la loi précédente d'un décroissement de pouvoirs réfringens en progression arithmétique, on élève l'observateur dans les couches de densité constante, et qu'on le place à une hauteur H au-dessus de la limite de ces couches représentées par l'horizontale AX. Examinons maintenant les modifications que cette circonstance introduit dans la figure des courbes limites, formées par les intersections successives de toutes les trajectoires.

Ces modifications sont faciles à prévoir, quant à leur marche générale, d'après celles que subit la courbe des *minima*; car en supposant la forme serpentante que nous avons vu lui appartenir, quand la hauteur H est moindre que $\frac{1}{4}$ de MA, on verra facilement à la seule inspection de la *fig.* 2 que les points les plus bas de la première branche ZM donneront des trajectoires qui se couperont dans les couches variables, et dont la limite pourra être représentée par ZF; mais la branche MM', et même les points les plus hauts de la branche ZM donneront des trajectoires qui se couperont au-dessus de AX, et qui formeront une branche FR *fig.* 13 analogue à la branche FR de la *fig.* 12; les intersections s'élèveront ainsi jusqu'à une certaine limite, après quoi elles re-

descendront suivant une autre branche RR' analogue à la branche RO; mais ici elle coupera l'axe des X dans un point F' situé en avant de l'observateur, et se prolongera au-dessous jusqu'à une certaine limite R' qui sera déja donnée par des trajectoires appartenantes à l'arc $M'H$ de la *fig.* 2. Les trajectoires suivantes continuant toujours d'avoir leurs *minima* sur cette même branche, leurs intersections s'éloigneront de plus en plus de l'observateur jusqu'à l'infini, ce qui donnera pour dernière limite de la caustique une branche indéfinie $R'X'$ convexe vers l'axe des X, et qui appartiendra aux plus petites inclinaisons.

Pour confirmer ces considérations, nous allons d'abord démontrer un résultat qui y jetera beaucoup de lumière, et qui a l'avantage d'être général quelque soit la loi de variation des forces réfringentes; c'est que pour les trajectoires qui se coupent dans les couches de réfraction constante, la courbe limite est absolument la même, et placée de la même manière que pour un observateur qui seroit placé à l'origine des couches variables, à cela près qu'elle est plus enfoncée dans ces couches, de la quantité H, c'est-à-dire autant que l'observateur est élevé.

En effet, l'élévation de l'observateur ne fait que transporter chaque trajectoire dans le sens horizontal de la quantité $\frac{H}{tang.\ I}$; par conséquent si l'on nomme A l'amplitude propre à la trajectoire dont l'inclinaison est I, cette trajectoire, en sortant des couches variables par sa seconde branche avec l'inclinaison I, coupera l'axe

des x dans un point dont l'abscisse sera $A + \frac{H}{tang.\ I}$, A étant une fonction de I dépendante de la loi de la réfraction; et puisque à partir de ce point la trajectoire devient rectiligne, son équation sera

$$z = tang.\ I. \left(A + \frac{H}{tang.\ I} - x\right)$$

ou ce qui revient au même

$$z - H = tang.\ I.\ (A - x) \ldots\ldots (1)$$

La condition des intersections de ces droites sera

$$o = tang.\ I.\ \frac{dA}{dI} + \frac{(A - x)}{cos^2.\ I} \ldots\ldots (2)$$

et l'équation de la courbe limite sera donnée par l'élimination de I entre ces deux équations : or, le produit de cette élimination sera encore le même si l'on fait d'abord H nul, ce qui transporte l'observateur à la limite des réfractions variables, pourvu que l'on change ensuite Z en $Z - H$, c'est-à-dire, pourvu que l'on enfonce la courbe limite dans les couches variables, d'une quantité égale à l'élévation de l'observateur, ce qui est la propriété que nous avons annoncée.

Ainsi, dans le cas de la progression arithmétique, les branches FR, RF' de la *fig.* 13 ne seront autre chose que les branches FR et RO de la *fig.* 12 enfoncées de la quantité H, d'où l'on voit d'abord que les intersections ne pourroient se faire au-dessus des couches variables pour des trajectoires dont l'inclinaison surpas-

seroit ou même égaleroit 45 degrés, car cette inclinaison formoit dans la *fig.* 12 le commencement F de la branche FR. On voit aussi que les trajectoires menées sous les plus petites inclinaisons, et qui, dans la *fig.* 12, se coupoient hors du milieu variable sur la branche RO, se couperont maintenant dans ce milieu. A mesure que l'observateur s'élevera, les points F, F' se rapprocheront et ils coincideront ensemble, lorsque la hauteur de l'observateur égalera la hauteur primitive du point R qui, dans le cas de la *fig.* 12, étoit $-\frac{1}{2mA}$. Alors les intersections consécutives se feront toutes dans les couches variables au-dessous de AX. Généralement les intersections commenceront à se faire dans l'intérieur des couches variables lorsque l'on aura

$$H = \frac{4 \sin^2. I}{mA} - \frac{8 \sin^4. I}{mA}$$

car, d'après ce que l'on a vu dans la page 87, le second membre de cette équation exprime la hauteur de chaque point de la caustique au-dessus des couches variables, lorsque l'observateur est placé à la limite même de ces couches. Les intersections devront donc se faire dans le milieu variable pour toutes les valeurs de I comprises entre les racines de cette équation, c'est-à-dire entre

$$\sin^2. I = \frac{1+\sqrt{1-2mA.H}}{4} \text{ et } \sin^2. I = \frac{1-\sqrt{1-2mA.H}}{4}$$

En faisant $I = 30°$, on aura la hauteur H qui est telle que le point de rebroussement de la branche supérieure

tombe sur l'axe des X, et par conséquent pour cette hauteur de l'observateur, et pour toutes celles qui la surpasseront, les intersections des trajectoires se feront toutes dans le milieu inférieur. Or $I = 30^{\circ}$ donne $sin. I = \frac{1}{2}$. En substituant cette valeur dans la formule précédente, on en tire $H = \frac{1}{2\,mA}$, comme nous venons de le trouver par la considération particulière de ce point.

On a vu dans la page 61 que la courbe des *minima* cesse d'avoir des points de rebroussement lorsque H est égal à $\frac{1}{4\,mA}$, et que pour des valeurs de H plus grandes, sa dernière branche est toute convexe vers l'axe des x. Il arrive donc alors que les intersections successives se font toutes au-dessous de l'observateur; car c'est seulement le retour de la courbe des *minima* vers l'axe des z qui peut donner des trajectoires consécutives qui se coupent au-dessus de lui. Aussi quand $H = \frac{1}{4\,mA}$, le point de rebroussement R de la branche FR se trouve au niveau de l'observateur, car son élévation totale étoit $\frac{1}{2\,mA}$ quand H étoit nul, et il a dû descendre autant que l'observateur a monté. En général sa hauteur sera $\frac{1}{2\,mA} - H$.

On a vu précédemment que ce point appartient à une valeur de I égale à 30 degrés. Ainsi la branche RF sera toujours invisible dans l'air atmosphérique et dans la plupart des fluides : elle y sera remplacée par le prolongement de la seconde branche de la trajectoire limite

qui sera tangente au sol. Il seroit donc inutile de chercher à la déterminer plus exactement. Mais il n'en est pas ainsi de la branche RR' qui peut encore avoir lieu pour de petites inclinaisons, ni à plus forte raison de la branche $R'X'$ qui a lieu pour les dernières valeurs de I.

Nous allons donc chercher à déterminer ces dernières branches; mais pour ne pas nous jeter dans des considérations inutiles, nous nous bornerons au cas où la limite de la réflexion possible est extrêmement petite, soit par le peu de force réfringente du milieu, soit par le peu de différence de densité des couches extrêmes.

D'après ce que nous avons trouvé précédemment dans le cas de la progression arithmétique, l'équation des secondes branches des trajectoires dans le cas qui nous occupe sera

$$x = \frac{H}{tang.\,I} + \frac{2\ cos.\ I}{mA}.\left(sin.\,I + \sqrt{sin^2.\,I - mAz}\right)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(1)\ldots\ x.\,tang.\,I = H + \frac{2\,sin.\,I}{mA}.\left(sin.\,I + \sqrt{sin^2.\,I - mAz}\right)$$

la condition des intersections de ces branches donnera

$$(2)\ldots\ \frac{x}{cos^2.\,I} = \frac{2\ cos.\ I}{mA}.\left(sin.\,I + \sqrt{sin^2.\,I - mAz}\right)$$
$$+ \frac{2\ sin.\ I}{mA}.\left(cos.\ I + \frac{sin.\ I.\ cos.\ I}{\sqrt{sin^2.\ I - mAz}}\right)$$

la courbe cherchée résultera de l'élimination de I entre

ces deux équations. Cette élimination considérée en général offre une grande complication, mais elle se simplifie quand on se borne à considérer des inclinaisons très-petites dans un milieu dont le pouvoir réfringent est très-foible, comme cela a lieu dans l'air atmosphérique.

En effet, soit Z' la profondeur qu'il faudroit donner aux couches réfringentes pour atteindre la limite de la réflexion possible, soit que cette limite s'étende jusqu'à celle de la réflexion intérieure, soit qu'elle se trouve réduite au-dessous de ce terme par l'interposition du sol. Nommons I' l'angle sous lequel se fait cette réflexion, on aura

$$sin^2. I' = mAZ'$$

Maintenant toutes les autres valeurs de I seront nécessairement moindres que I' : soit donc

$$sin. I = K. sin. I'$$

K sera nécessairement une fraction. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, en faisant pour plus de simplicité $sin. I' = \omega$, et prenant Z' pour unité; ce qui donne $mA = \omega^2$ alors x et z deviennent uniquement des fonctions de H, de K et de ω, que l'on peut développer suivant les puissances de cette dernière quantité. En se bornant ainsi aux termes de ce développement qui sont les plus considérables, c'est-à-dire à ceux qui ont les plus petites puissances de ω pour facteurs, on trouve

$$z = K^2 - \frac{4 K^6}{(H - 2 K^2)^2}; \quad x = \frac{H^2}{K. (H - 2 K^2). \omega}$$

Ce développement cesseroit d'être possible si l'on avoit $H = 2K^2$, mais d'après ce que l'on a vu précédemment dans la page 98, cela ne sauroit arriver ; car lorsque les intersections commencent à se faire au-dessous de la ligne de densité constante, on a $H = 4K^2 - 8K^4\omega^2$; ainsi pour des valeurs de I moindres que celle limite, et à cette limite même la quantité $H - 2K^2$ ne sera point nulle, et par conséquent le développement pourra s'effectuer.

D'après ces expressions de x et de z, il est facile de voir que la caustique, après avoir formé la branche FR dans la couche de densité constante, entre dans les couches variables au point F' pour lequel on a

$$H = 4K^2 ; \quad x = \frac{4\sqrt{H}}{\omega} ; \quad K = \frac{\sqrt{H}}{2}$$

qu'ensuite elle se continue suivant la branche $F'R'$ concave vers l'axe des x, et terminée au point R' dont les coordonnées sont

$$z = \frac{H}{8} ; \quad x = \tfrac{3}{2}.\frac{\sqrt{6H}}{\omega} ; \quad K = \sqrt{\frac{H}{6}}$$

L'abscisse du point R' est, comme on voit, plus petite que l'abscisse du point F' ; mais en R il se fait un rebroussement : le signe de la courbure change ; la courbe devient convexe vers l'axe des x et s'éloigne indéfiniment de l'observateur en formant la branche $R'X'$; en même temps elle se rapproche de l'axe des x qui lui sert d'asymptote horizontale. Toutes ces inflexions de la caustique sont analogues avec celles qu'elle faisoit dans le cas d'un

observateur placé sur la limite des couches de densité variables : seulement alors, le point de rebroussement R étoit situé à l'origine même des trajectoires, et la dernière branche RX' de la caustique au lieu d'être courbe étoit une ligne droite horizontale ; c'étoit l'axe même des x.

Comme la plus grande valeur possible de K est d'être égal à l'unité, on voit que la branche RF' disparoîtra si $H = 4Z'$ ou surpasse $4Z'$, Z' étant la profondeur des couches où la réflexion est possible, profondeur que nous avions prise pour unité. De même la branche $F'R'$ disparoîtra si $H = 8Z'$ ou surpasse $8Z'$, car alors le point de rebroussement R' descendra à la hauteur de la couche limite, ou tombera au-dessous, et la caustique se réduira à la branche unique et indéfinie $R'X'$ qui subsistera quelle que soit la hauteur de l'observateur pour les plus petites inclinaisons.

En rappelant ici ce que nous avons dit précédemment pour les cas où l'observateur étoit situé à la limite même des couches variables, et nous bornant aux cas qui peuvent exister dans la nature, il est facile de trouver le nombre et la position des images que chaque point de l'espace pourra envoyer à l'observateur.

Si par le point O supposé le lieu de l'observateur, on mène la trajectoire limite OMF qui est tangente au sol, et que l'on prolonge indéfiniment sa seconde branche qui sera rectiligne et que nous supposerons quelque part tangente à la branche FR, il est facile de voir :

1°. Que tous les points compris dans le triangle mixti-

ligne GRR' enverront à l'observateur trois images, deux droites et une renversée, celle-ci entre les deux autres. La quatrième image, analogue à $A'''B'''$ de la *fig.* 12, aura disparu, comme tombant au-dessous de la limite de la réflexion.

2°. Que tous les points situés hors de ce triangle, mais cependant compris entre les prolongemens indéfinis des branches de la caustique, n'enverront à l'observateur que deux images, l'une droite, l'autre renversée, celle-ci inférieure à l'autre. La troisième image, droite et inférieure aux deux autres, n'aura plus lieu.

3°. Tous les points contenus dans l'espace $OMGR'RT'$ ne pourront envoyer à l'observateur qu'une seule image droite.

4°. Enfin tous les points contenus dans l'espace indéfini $MGX'F$ seront entièrement invisibles pour l'observateur. Mais s'il s'élève, la trajectoire limite s'éloignant, le point M s'éloignera aussi. Par conséquent quelques-uns des points renfermés dans l'espace invisible en sortiront et deviendront visibles. Le contraire arrivera si l'observateur s'abaisse. Le point M se rapprochant, il perdra de vue des points qui lui étoient précédemment cachés.

Dans ce qui précède nous avons supposé que l'observateur se trouvoit au-dessus du milieu variable, et dans la couche de plus grande densité. On pourroit également le supposer placé dans les couches variables elles-mêmes, et un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire donneroit la forme de la caustique résultante de cette position. Soit donc *fig.* 14, AX la ligne horizontale

qui termine inférieurement la couche de densité constante ; soit O l'observateur abaissé au-dessous de cette ligne d'une quantité $AO = H$: par le point O menons l'horizontale OX' parallèle aux couches, il est évident d'abord que les trajectoires telles que OV', OV'', qui auront leur *minimum* en arrière de l'observateur, traverseront les couches de densité variables sans se couper, et pénètreront dans le milieu supérieur suivant des directions divergentes, de sorte qu'elles ne s'y couperont pas non plus. Mais les trajectoires telles que OMV qui auront leur *minimum* en avant de l'observateur et au-dessous de la ligne OX' se couperont nécessairement dans un milieu ou dans l'autre. Celles qui se couperont dans le milieu inférieur formeront la portion de caustique $ZX'X$ qui, d'après ce que l'on a vu précédemment, sera une parabole ayant pour l'axe l'axe des Z. Les trajectoires qui se couperont au-dessus de AX par leurs prolongemens formeront une autre portion de caustique qui servira de prolongement à la parabole OMV, et qui aura pour asymptote la ligne droite

$$x = \frac{\sin.\, 2\, I'}{mA} + \frac{z}{\tang.\, I'}$$

suivant laquelle dégénère la trajectoire OL menée du point O dans une direction horizontale. I' est ici une constante donnée par l'équation

$$\sin^2.\, I' = mAH$$

c'est l'angle sous lequel la dernière trajectoire OL pénètre dans le milieu supérieur. Ainsi, selon que l'obser-

vateur est au-dessus ou au-dessous de la limite des densités variables, la dernière branche de la caustique s'éloigne à l'infini au-dessous de cette limite ou au-dessus.

Considérons maintenant le cas où les pouvoirs réfringens du milieu décroissent suivant une exponentielle. Nous avons déjà remarqué que ce mode de décroissement est très-propre à représenter les expériences thermométriques. Les résultats qu'il donne sont faciles à prévoir d'après ce que nous avons dit, page 50, relativement à la courbe des *minima*. La partie la plus basse de cette courbe, celle qui répond aux plus grandes valeurs de I va en s'éloignant de l'observateur à mesure qu'elle s'élève, c'est-à-dire à mesure que I diminue. Les trajectoires qui auront leur *minimum* sur cette partie de la courbe devront donc se couper au-dessous de la ligne horizontale qui passe par l'observateur, et d'autant plus près de leur *minimum* que la ligne des *minima* approchera plus d'être horizontale. Elles formeront donc ainsi une portion de caustique située pareillement au-dessous de l'observateur, et qui ira en s'élevant à mesure que I deviendra moindre. Mais on a vu qu'au-dessous d'une certaine valeur de I, la courbe des *minima* revient vers l'observateur avec lequel elle coincide lorsque $I = 0$. Ainsi, à ce point de rebroussement, les trajectoires commenceront à se couper au niveau de l'observateur et sur l'axe des x; après quoi I diminuant toujours, elles viendront se couper au-dessus de cet axe où elles formeront le reste de la caustique qui s'éloignera de l'observateur à l'infini;

mais cette dernière branche sera plus ou moins applatie, suivant la rapidité du décroissement des pouvoirs réfringens, et selon que l'observateur sera enfoncé à une profondeur plus ou moins grande, dans les couches où la force réfringente varie d'une manière sensible.

Occupons-nous en particulier de cette dernière branche, la seule qui nous intéresse, puisque c'est elle qui subsiste sous les plus petites inclinaisons. Pour le faire avec facilité, on remarquera qu'au-dessus d'une certaine hauteur la variation des pouvoirs réfringens devient tellement petite qu'on peut la supposer sensiblement nulle, et regarder le milieu comme homogène. Cette propriété tient évidemment à la nature du décroissement par exponentielle. Or, en reprenant l'équation d'une seconde branche qui se déduit de la page 46, et faisant $mA = n$, nous aurons à une hauteur z *au-dessus* de l'observateur

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{\sin^2. I + n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{4}{a}.\, log. \left(\frac{\sin. I + \sqrt{\sin^2. I + n}}{\sqrt{n}} \right) \\ - \frac{2}{a}.\, log. \left(1 + \frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I + n}} \right) \\ + \frac{2}{a}.\, log. \left(1 + \sqrt{1 - \frac{n e^{-az}}{\sin^2. I + n}} \right) \end{array} \right\}$$

Puisque, à la hauteur que nous considérons, l'état des couches devient sensiblement constant, il faut que z soit assez considérable pour que la quantité e^{-az} soit insensible, alors le terme de l'expression précédente qui contient z sous le signe logarithmique, devient lui-même constant, et se réduit à $log.\ 2$, le logarithme étant hy-

perbolique. De plus, nous supposerons que l'inclinaison I est très-petite par elle-même, et relativement à n, supposition d'autant plus légitime, que I peut décroître jusqu'à devenir nul, tandis que n a une valeur fixe qui peut être plus ou moins grande, suivant que l'observateur est plus ou moins enfoncé dans les couches variables. Regardons donc $\frac{sin.\,I}{\sqrt{n}}$ comme une quantité très-petite du premier ordre, nous aurons en développant la valeur de n et nous bornant aux termes les plus sensibles,

$$x = \frac{cos.\,I}{\sqrt{n}}.\left(z + \frac{2}{a}.\,log.\,2\right) + \frac{2\,sin.\,I}{an}.$$

Cette dernière portion des trajectoires se réduit donc sensiblement à une ligne droite, ce qui devoit être d'après les circonstances où nous les supposons. La condition des interjectoires de ces droites sera

$$o = -\,sin.\,I.\left(z + \frac{2}{a}.\,log.\,2\right) + \frac{2\,cos.\,I}{a.\,\sqrt{n}}$$

ce qui donne pour x et z, ces valeurs

$$z + \frac{2}{a}.\,log.\,2 = \frac{2}{a\,\sqrt{n}.\,tang.\,I};\quad x = \frac{2}{an.\,sin.\,I}$$

éliminant I, on a pour l'équation de cette dernière branche de la caustique.

$$z + \frac{2}{a}.\,log.\,2 = x.\sqrt{n}\sqrt{1 - \frac{4}{a^2n^2x^2}}$$

qui, étant différenciée, donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{an^2x^2}}}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{4}{a.\ n^{\frac{3}{2}}.\ x^3.\left(1 - \frac{4}{a^2n^2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La caustique se termine donc par une branche concave vers l'axe des x, et dont l'inclinaison va toujours en diminuant, à mesure qu'elle s'élève et s'éloigne de l'observateur. Cette dernière branche à une asymptote rectiligne dont l'équation est

$$z + \frac{2}{a}.\ \log.\ 2 = x.\ \sqrt{n}$$

ce qui donne à cette limite

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{n}$$

Il est facile de vérifier ce résultat; car le point de tangence extrême doit appartenir à la trajectoire menée sous l'inclinaison $I = 0$. Or, l'équation différentielle des trajectoires qui est en général

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{\sin^2.\ I - m\varphi}}{\cos.\ I}$$

devient, dans le cas actuel,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{\sin^2.\ I - n.\ (e^{-az} - 1)}}{\cos.\ I}$$

Lorsqu'on suppose e^{-az} insensible et I nulle, elle se réduit à

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{n}$$

Comme nous venons de le trouver.

On voit en général qu'il en sera de même dans toutes les lois de décroissement qui deviennent insensibles à une certaine hauteur au-dessus de l'observateur. A cette limite φ étant négative et sensiblement constante, les trajectoires deviennent rectilignes, et la caustique a pour asymptote une ligne droite dont l'inclinaison est $\sqrt{-m\varphi_{(h)}}$, $\varphi_{(h)}$ désignant la valeur de φ à la hauteur où la variation des pouvoirs réfringens est insensible.

L'inclinaison de cette dernière branche de la caustique diminue en même temps que $\varphi_{(h)}$, c'est-à-dire à mesure que l'observateur se trouve placé plus haut dans le milieu réfringent, et par conséquent dans des couches où la variation de la force réfringente est moindre. Enfin, s'il est placé dans les couches où cette force devient sensiblement constante $\varphi_{(h)}$, deviendra nulle ou insensible, et l'on a pour l'inclinaison de la tangente extrême $\frac{dz}{dx} = 0$, c'est-à-dire, que la dernière extrémité de la caustique sera horizontale, circonstance qu'il étoit facile de prévoir. C'est le cas de la réflexion dans les milieux diaphanes homogènes; ce cas est la limite de toutes les lois précédentes de décroissement.

Les phénomènes ont lieu de cette manière en supposant que l'accroissement de la force réfringente, à me-

sure qu'on s'élève, est continué indéfiniment suivant la même fonction, par exemple, suivant la même exponentielle, en sorte que l'asymptote de cette exponentielle réponde au cas où la variation de la force réfringente devient insensible. Mais on pourroit imaginer des lois de densité telles que l'exponentielle fût interrompue plus bas que son asymptote, et que de là elle se prolonge suivant sa dernière tangente, ce qui rendroit également la densité constante à une certaine hauteur, quoique avec des circonstances bien différentes de celles que nous avons considérées. Ce cas est très-probablement celui qu'a observé M. Wollaston, lorsqu'en regardant des objets par dessous la surface horizontale d'une plaque de fer rouge, et par des rayons presque parallèles à cette surface, il apercevoit trois images, deux droites et une renversée. Dans ce cas, la couche d'air inférieure, en contact avec la plaque, ne pouvoit pas échapper en vertu de sa légèreté spécifique, aussi librement que si elle eût reposé dessus. Au contraire, cette légèreté devenoit un obstacle à sa dissipation. Elle ne pouvoit s'enfuir que latéralement, et cette circonstance devoit nécessairement rendre le décroissement des densités plus rapide. Il paroît donc naturel de penser que, dans ce cas, l'exponentielle qui représente ce décroissement étoit interrompue par l'air extérieur avant d'atteindre son asymptote, au lieu qu'elle y seroit parvenue si l'air chassé de la surface du fer rouge eût traversé les couches d'air superposées, et, en se mêlant avec elles, eût contribué à rendre le décroissement continu, suivant une même loi. Ce cas

est analogue à celui que nous a présenté la progression arithmétique, lorsque nous l'avons interrompue à une certaine hauteur pour lui faire succéder une densité constante, et nous devons le traiter de la même manière.

Pour cela, plaçons d'abord l'observateur à la limite même de la densité variable et de la densité constante. Les trajectoires les plus basses se couperont d'abord, dans les couches variables, au-dessous du niveau de l'observateur, mais I diminuant toujours, les intersections commenceront à se faire au-dessus de ce niveau, c'est-à-dire dans les couches de densité, à cause du point de rebroussement de la courbe des *minima*. Cela pourra même arriver pour des valeurs de l'angle I qui ne seroient pas très-petites, puisque cela dépendra de la rapidité du décroissement à la hauteur où l'observateur se trouve, sans qu'il soit nécessaire, comme précédemment, de supposer n très-petit, puisque l'exponentielle est supposée interrompue bien avant son asymptote. Considérons donc cette portion de la caustique qui se trouve au-dessus de l'observateur dans les couches de densité constante, et considérons-la principalement pour les petites inclinaisons.

Dans la position que nous donnons ici à l'observateur, l'abscisse d'un point quelconque des trajectoires devenues rectilignes se composera d'abord de l'amplitude de la trajectoire curviligne, qui est $\frac{4 \cos. I}{a. \sqrt{\sin^2. I + n}}.$ $\log. \left(\frac{\sin. I + \sqrt{\sin^2. I + n}}{\sqrt{n}}\right)$, et ensuite de la portion d'abscisse due à la hauteur z dans les couches de den-

sité constante, laquelle sera $\frac{z}{tang.\, I}$, en prenant les z positifs au-dessus de la limite commune des deux densités. De sorte que l'on aura généralement

$$x = \frac{4\, cos.\, I}{a.\, \sqrt{sin^2.\, I + n}} . \, log. \left(\frac{sin.\, I + \sqrt{sin^2.\, I + n}}{\sqrt{n}} \right) + \frac{z}{tang.\, I}$$

Si nous voulons nous borner aux très-petites inclinaisons, l'angle I peut être considérée comme extrêmement petit par rapport à n, et en faisant $sin.\, I = K.\sqrt{n}$ il ne faudra avoir égard qu'aux premières puissances de K. En développant, suivant ces suppositions, le terme indépendant de z, on trouve qu'il se réduit à $\frac{2\, sin.\, 2\, I}{an}$; de sorte que l'expression approchée de x devient

$$x = \frac{2\, sin.\, 2\, I}{an} + \frac{z}{tang.\, I}$$

Cette valeur de x est précisément la même que si la densité au-dessous de l'observateur décroissoit suivant une progression arithmétique dont la raison seroit na; et en effet, les trajectoires qui répondent à de petites inclinaisons, descendant très-peu avant dans le milieu inférieur, la partie de l'exponentielle qui les comprend, peut être assimilée à une progression arithmétique dans les mêmes circonstances; d'où il suit que la caustique se termineroit comme dans le cas de la page 88, par une courbe convexe vers l'axe des x; courbe qui, dans les

très-petites inclinaisons, se confond avec une parabole dont l'équation sera

$$z = \frac{na. x^2}{16}$$

Cette dernière branche sera donc d'autant plus applatie que na sera moindre, c'est-à-dire que l'observateur sera plus rapproché de l'asymptote de l'exponentielle. Si na devenait nulle ou insensible, on auroit constamment $z = 0$, et cette dernière branche se réduiroit à une ligne droite horizontale menée par l'observateur, ce qui s'accorde avec ce que nous venons de démontrer précédemment. Les mêmes résultats auront lieu dans toutes les lois de décroissement dont la limite est une progression arithmétique.

Si, dans les circonstances que nous venons d'admettre, l'observateur ne se trouvoit pas placé dans les couches variables, mais dans celles de densité constante, il est aisé, par ce qui précède, de prévoir ce qui devroit arriver. Car d'abord, la portion de la caustique située au-dessus de la limite des deux densités, ne seroit autre chose que la précédente abaissée de la quantité H; H étant la hauteur de l'observateur au-dessus de cette limite; et quant à la partie de la caustique située dans le milieu variable, comme elle n'embrasseroit que de très-petits angles, elle seroit précisément la même que pour une progression arithmétique dont la raison seroit na; car pour des trajectoires menées sous de très-petits angles et très-peu enfoncées dans le milieu variable, le décroissement par

exponentielle se confond avec la progression arithmétique. Sa forme générale sera donc la même que celle de la *fig.* 14 qui convient à une pareille progression, et selon les hauteurs différentes de l'observateur elle présentera les mêmes accidens. Des résultats analogues auront lieu pour toutes les lois de décroissement qui auront pour limite une progression arithmétique. On pourra donc, en se plaçant très-près de la limite des densités différentes, y observer trois images, puisque la progression arithmétique les comporte; ce qui explique complètement les apparences observées par M. Wollaston au-dessous d'une plaque de fer rouge.

Enfin, pour rassembler ce que l'on peut dire de plus général dans le cas d'un décroissement de force réfringente toujours continué dans le même sens, je vais supposer que la loi de ce décroissement est absolument quelconque; mais qu'elle s'arrête à une certaine hauteur où la densité devient constante, et plaçant l'observateur au-dessus de cette limite, je me propose d'examiner quelle doit être la forme et la position de la dernière branche de la caustique pour de très-petites inclinaisons.

Partons toujours du cas où l'observateur seroit placé à la limite même des deux densités. Soit alors $A_{(i)}$ l'abscisse du *minimum* de la trajectoire menée sous l'angle I ou sa demi-amplitude, l'équation d'une seconde branche dans sa partie curviligne sera de la forme

$$x = 2\,A_{(i)} - \Psi.\,(I.\,z)$$

$\Psi.\,(I.\,z)$ étant une fonction de I et de z qui devient

nulle quand $z = 0$, et qui devient égale à $A_{(i)}$, au *minimum* de la trajectoire, lorsque z est déterminé par l'équation

$$sin^2.\ I = m.\ \varphi$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, si la fonction $A_{(i)}$ va croissant à mesure que I diminue, deux trajectoires consécutives se coupent avant d'avoir atteint le niveau de l'observateur; car alors, l'amplitude de la plus basse étant moindre que l'amplitude de la plus haute, il faut nécessairement qu'il y ait un point d'intersection entre les abscisses $A_{(i)}$ et $2\ A_{(i)}$. Si l'accroissement de $A_{(i)}$ se continue ainsi sous les plus petites inclinaisons, il en résultera nécessairement que la dernière branche de la caustique, celle qui convient aux inclinaisons très-petites, restera toute entière comprise dans les couches de densité variables; et selon que $A^{(i)}$ variera successivement avec plus ou moins de rapidité, elle pourra avoir des points de rebroussement plus ou moins nombreux qui contribueront à multiplier le nombre des images.

Maintenant si l'on élève l'observateur de la quantité H dans les couches de densité constantes, en conservant toujours l'origine des z sur la limite des deux densités, l'équation d'une seconde branche deviendra

$$x = \frac{H}{tang.\ I} + 2\ A_{(i)} - \Psi.\ (I.\ z)$$

Dans le point où cette seconde branche coupe l'axe des x,

Ψ sera nulle. Nommant $X_{(i)}$ l'abscisse correspondante, on aura

$$X_{(i)} = \frac{H}{tang.\ I} + 2\, A_{(i)}$$

Or, puisque $A_{(i)}$ est supposé croître continuellement à mesure que I diminue, et que la quantité $\frac{H}{tang.\ I}$ croît aussi dans les mêmes circonstances, il est aisé de voir que deux trajectoires consécutives et infiniment voisines se couperont nécessairement entre les abscisses $\frac{H}{tang.\ I} + A_{(i)}$ et $\frac{H}{tang.\ I} + 2\, A_{(i)}$; de sorte que la dernière branche de la caustique restera toujours au-dessous de la limite des densités constantes, comme dans le cas précédent. Mais de plus, quelques-unes des sinuosités produites par les points de rebroussement qui existoient alors, pourront diminuer, à cause de la hauteur de l'observateur; parce que, à mesure que I diminue, chaque trajectoire se trouve transportée, dans le sens horizontal de la quantité $\frac{H.\ dI}{sin^2.\ I}$, au-delà de celle qui lui est immédiatement inférieure, et il ne peut y avoir de rebroussement que quand les variations de $2\, A_{(i)} - \Psi$ surpassent cette quantité. Comme elle devient infinie quand I est nul, il est clair que l'élévation de l'observateur dans les couches de densité constante fait d'abord disparoître les derniers points de rebroussement correspondans aux plus petites inclinaisons, puis successivement ceux qui répondent à des inclinaisons plus grandes; enfin, en élevant suffisamment l'observateur, on les fera disparoître tous, et alors

la dernière portion de la caustique sera réduite à une branche unique, convexe vers l'axe des x, et ayant pour asymptote cet axe qui est aussi la limite des deux densités. De sorte qu'on ne pourra voir par le moyen de cette branche que deux images de l'objet, dont la supérieure sera droite et l'inférieure renversée; mais en abaissant l'observateur les images multiples reparoîtront.

Venons maintenant au cas dans lequel $A_{(i)}$ diminue en même temps que I. C'est celui de la progression arithmétique, quand les inclinaisons sont infiniment petites, comme on l'a vu précédemment. Si l'observateur est placé à la limite des deux densités, alors les trajectoires menées sous les plus petites inclinaisons se coupent dans les couches de densité constante; mais si l'on élève l'observateur au-dessus de la limite, de la quantité H, alors pour une diminution d'inclinaison égale à dI, la valeur de $X_{(i)}$ s'accroît de la quantité $\frac{H}{\sin^2. I}. dI - 2\, dA_{(i)}$. Si le second de ces deux termes l'emporte sur le premier, l'intersection se fera au-dessus de la limite, comme précédemment; mais si le premier terme est le plus considérable, les deux trajectoires se couperont au-dessous de cette ligne, dans les couches de densité variable. Or ce dernier cas arrivera toujours pour les dernières valeurs de I, puisqu'alors la quantité $\frac{H}{\sin^2. I}$ devient infinie, au lieu que dA_i ne peut jamais le devenir par la nature du problème. Ainsi, quelle que soit la loi de décroissement des forces réfringentes, pour peu que l'observateur soit situé au-dessus des couches varia-

bles, la dernière portion de la caustique se terminera toujours par une branche concave vers le sol sans aucun point de rebroussement; mais elle pourra en avoir d'autres, correspondans à des inclinaisons plus grandes, qui disparoîtront à leur tour si l'observateur est plus élevé. On voit par là, sans aucune hypothèse, pourquoi le cas de deux images est celui qui s'observe le plus fréquemment.

Les phénomènes que nous venons de considérer peuvent être variés à l'infini, selon les suppositions que l'on voudra faire pour le décroissement des pouvoirs réfringens des couches; mais parmi toutes les dispositions imaginables il en est cependant une qui mérite une attention particulière, parce que la nature en présente quelquefois l'exemple dans l'atmosphère, et qu'alors il en résulte des phénomènes extrêmement curieux.

C'est le cas dans lequel le pouvoir réfringent des couches, après avoir d'abord été croissant de bas en haut jusqu'à une certaine limite, va ensuite en décroissant. La loi de ces variations doit certainement être différente, suivant les diverses circonstances, et il en doit résulter dans la forme des caustiques de très-grandes différences; mais leur forme générale doit toujours conserver quelque analogie dépendante de l'état alternatif que nous venons de supposer. Ainsi nous pourrons encore nous en faire une idée en examinant le cas particulier de deux progressions arithmétiques inégales et contraires, et de là nous tâcherons d'inférer ce qui doit arriver en général dans les autres lois les plus ordinaires, ainsi que nous en avons usé précédemment.

Pour plus de simplicité, plaçons d'abord l'observateur dans la couche où le pouvoir réfringent est le plus considérable, et qui est intermédiaire entre les deux décroissemens. Soit donc OX (*fig.* 15) la ligne qui les sépare. Menons par le point O, dans le milieu inférieur, des trajectoires correspondantes à toutes les inclinaisons, depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 90°$, et voyons les systèmes d'intersection qui en résultent.

D'abord toutes les trajectoires comprises entre $I = 90$ et $I = 45$ degrés se couperont dans le milieu inférieur et formeront par les intersections de leurs secondes branches la caustique $Z'F$, qui sera une portion de parabole. Cela résulte de ce que l'on a vu précédemment.

Pour des valeurs de I moindres que 45 degrés, les intersections ne se feront plus dans le milieu inférieur, au-dessous de l'axe OX, mais au-dessus de cette ligne et dans le milieu supérieur; ce qui donnera la portion de caustique FV analogue à la branche FR de la *fig.* 12, laquelle ne diffère du cas présent qu'en ce que la densité du milieu supérieur étoit supposée constante. Cette branche FV s'arrêtera bientôt, comme le faisoit la branche FR, et I diminuant toujours, les intersections commenceront à se rapprocher de l'observateur; ce qui donnera la dernière portion de caustique OV analogue à la branche OR de la *fig.* 12.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les intersections $TT'T''$ des premières branches que les trajectoires OMT, OMT' envoient dans l'espace supérieur après s'y être repliées; mais les secondes branches de ces

mêmes trajectoires s'y coupent également, du moins sous certaines conditions d'inclinaison. En effet, considérons la trajectoire $OM'''F$, menée sous l'inclinaison de 45 degrés. Pour celle-là, le point de tangence sur la caustique est en F sur l'axe OX; de sorte qu'elle se coupe sur cet axe même avec la trajectoire infiniment voisine qui la suit. Or il est clair que ces deux trajectoires entrant ainsi dans le milieu supérieur, avec l'inclinaison de 45°, se couperont encore de nouveau sur ce même axe en F'' par les prolongemens de leurs secondes branches; de sorte que le point F'' appartiendra à la caustique que les secondes branches $T\theta$ doivent former. Pour les valeurs de I plus grandes que 45 degrés, les intersections se feront au-dessus de F'', ce qui donnera la portion de caustique $F''Z$ dans l'espace supérieur; et pour les inclinaisons moindres que 45 degrés, les intersections se feront dans le milieu inférieur, au-dessous de F'', ce qui donnera une nouvelle portion de caustique que nous considérerons plus loin.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les trajectoires menées originairement dans le milieu inférieur. Celles que l'on mènera dans le milieu supérieur conduiront à des conséquences analogues et donneront les nouvelles branches OVF', $Z'F''$. Le point F'' résultant de deux amplitudes de 45°, sera commun aux deux caustiques. En nommant A'; A les raisons des deux progressions arithmétiques, on aura

$$OF = \frac{2}{mA'}; \quad OF' = \frac{2}{mA}; \quad OF'' = \frac{2}{mA'} + \frac{2}{mA}$$

et l'ensemble de ces courbes ainsi combinées sera tel que le représente la *fig.* 15.

Mais parmi ces diverses branches il n'y aura que OV et OV' qui auront lieu pour de petites inclinaisons, et même, dans la plupart des cas que la nature présente, celles-ci s'étendront au-delà des limites de la réflexion intérieure. Ainsi, après avoir indiqué, comme nous venons de le faire, la forme complète de la caustique, afin que l'on en puisse suivre aisément les diverses parties et que l'on saisisse mieux leur connexion, nous allons nous borner dans le calcul à ce qui peut être utile, c'est-à-dire à la détermination des branches OV, OV'.

Pour cela nommons toujours A la raison de la progression arithmétique dans l'espace supérieur ZOX, et A' la raison de la progression dans l'espace inférieur. Prenons les z positives dans le sens OZ. Cela posé, pour une trajectoire telle que OM (*fig.* 15), l'amplitude OMQ sera égale à $\frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA}$, et l'équation d'une première branche telle que OQT, dans l'espace supérieur, sera

$$x = \frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA'} + \frac{2 \cos. I}{mA}. (\sin. I - \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

Celle d'une seconde branche, comme $OQ\theta$, serait

$$x = \frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA'} + \frac{2 \cos. I}{mA}. (\sin. I + \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

En faisant, pour plus de simplicité, $mA = \alpha$, $mA' = \alpha'$,

ces deux équations, qui ne diffèrent que par le signe du radical, se réuniront dans la suivante :

$$(1)\quad \alpha.x^2 - 2x.\sin.2I\frac{(2\alpha+\alpha')}{\alpha'} + 4\sin^2.2I\frac{(\alpha+\alpha')}{\alpha'^2} + 2.(1+\cos.2I)z = 0$$

la condition des intersections sera

$$(2)\quad -x.\cos.2I.\frac{(2\alpha+\alpha')}{\alpha'} + 4\sin.2I.\cos.2I.\frac{(\alpha+\alpha')}{\alpha'^2} - z.\sin.2I = 0$$

Éliminant z entre ces deux équations, on en tire

$$x^2 - 2x.\frac{(2\alpha+\alpha')}{\alpha.\alpha'}.\frac{(1+\cos.2I)}{\sin.2I} + \frac{4.(\alpha+\alpha')}{\alpha.\alpha'^2}.(1+\cos.2I)^2 = 0$$

De là résultent deux valeurs de x en I. Si on les développe dans la supposition de I fort petite, en se bornant aux termes les plus sensibles, on trouvera

$$x = \frac{2.(\alpha+\alpha')}{\alpha'.(2\alpha+\alpha')}.(1+\cos.2I).\sin.2I$$

et

$$x = \frac{2.(2\alpha+\alpha')}{\alpha.\alpha'}.\frac{(1+\cos.2I)}{\sin.2I}.\left[1 - \frac{\alpha.(\alpha+\alpha')}{(2\alpha+\alpha')^2}.\sin^2.2I\right]$$

La première peut être mise sous la forme

$$x = \frac{(\alpha+\alpha')}{\alpha'.(2\alpha+\alpha')}.(2\sin.2I + \sin.4I)$$

et en la substituant dans l'équation (2) elle donne

$$z = -\frac{(\alpha+\alpha')}{\alpha'^2}.(1 - 2\cos.2I. + \cos.4I)$$

Ces valeurs sont analogues à celles que nous avons trouvées dans la page 89 pour les coordonnées de la caustique OS (*fig.* 12), lorsque la densité de la couche supérieure étoit constante. Ici ce sont les coordonnées de la caustique $OTT'T''$ (*fig.* 15). A mesure que I augmente, les valeurs de z et de x augmentent aussi en restant positives. Par la différentiation de ces valeurs on trouve que la caustique OTT' est convexe vers l'axe des x, et qu'elle se confond avec une parabole pour de petites valeurs de I, telles que celles qui ont lieu dans l'air atmosphérique. L'équation de cette parabole est

$$z = \frac{(2\alpha + \alpha')^2}{16.(\alpha + \alpha')} . x^2$$

Si l'on suppose α nul, c'est-à-dire la densité du milieu supérieur constante, elle se réduit à

$$z = \frac{\alpha' . x^2}{16}$$

Tout cela est analogue à ce que l'on a vu dans l'article cité.

Quant à la seconde valeur de x, quoiqu'elle s'évanouisse aussi quand I est nul, et qu'ainsi elle subsiste encore même dans les très-petites inclinaisons, cependant elle n'a aucune application dans le cas actuel, car elle donne des valeurs de z négatives; ce qui montre qu'elle appartient à la caustique que fourniroient les secondes branches $T\theta$ en se coupant au-dessous de la ligne OX, si après être parties des points $TT'T''$, comme

précédemment, elles trouvoient en rentrant dans l'espace inférieur $Z'OX$ la continuation de la même loi de densité qui a lieu dans l'espace supérieur. Mais ce n'est pas là le cas, comme il est aisé de le sentir; et les branches $T\theta$, à leur entrée dans l'espace inférieur, commenceroient à être soumises aux lois de densité qui y règnent; ce qui les recourbe en sens contraire, comme dans la *fig.* 16. De là résulte un autre système d'intersections qu'il faut considérer en particulier, et qui n'est point représenté par la seconde valeur de x, à laquelle il est par conséquent inutile d'avoir égard.

En appliquant les considérations précédentes aux trajectoires Omt, $Om't'$, $Om''t''$ (*fig.* 15), menées du point O dans l'espace supérieur ZOX, on verra de même que ces trajectoires, en se repliant par leurs secondes branches dans l'espace inférieur $Z'OX$, y formeront une caustique $Ot't''$ analogue à $OT'T''$, et dont les équations seront les mêmes, en changeant α en α' et α' en α. De sorte qu'en prenant les z' positives du côté de OZ', ces équations seront

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha . (2\alpha' + \alpha)} . (2 \sin. 2I. + \sin. 4I)$$

$$z' = -\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha^2} . (1 - 2\cos. 2I + \cos. 4I)$$

qui, sous les très-petits angles, donneront la parabole

$$z' = \frac{(2\alpha' + \alpha)^2}{16. (\alpha + \alpha')} x^2$$

On aura donc de cette manière, dans les petites in-

clinaisons, deux branches de caustiques analogues et correspondantes, situées, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la ligne OX. La première aura pour limite la trajectoire OHV, la plus basse de celles que l'on puisse mener dans l'espace inférieur $Z'OX$ parmi celles qui y ont leur *minimum*; l'autre caustique OV' sera limitée d'une manière analogue par la trajectoire OSV', la plus haute de celles que l'on puisse mener dans l'espace supérieur ZOX, du moins tant qu'on se bornera à des inclinaisons très-petites, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent.

Maintenant il est facile de voir qu'un objet situé dans l'espace VOV', que les caustiques comprennent, pourra envoyer à l'observateur O trois images, savoir deux droites et une renversée située entre deux autres. Par exemple l'objet AB (*fig.* 18), qui se trouve au-dessous de la ligne OX enverra une image droite $A'B'$ par la caustique supérieure OV, et deux autres images par la cautique OV', l'une droite, l'autre renversée. Si l'objet se trouvoit au-dessus de la ligne OX, dans l'espace VOX, il n'y auroit qu'une seule image donnée par la caustique OV'; ce seroit la supérieure, et les deux autres seroient données par la caustique OV.

Mais ces caustiques ne sont pas les seules qui puissent rendre les objets visibles dans ces circonstances, même en se bornant aux inclinaisons très-petites. Car les trajectoires, après s'être repliées une fois dans l'un des milieux et une fois dans l'autre, comme on le voit dans les *fig.* 16 et 19, doivent, en rentrant dans le premier

milieu, se couper de nouveau et donner de nouvelles caustiques par leurs continuelles intersections. C'est ce qu'il s'agit d'examiner.

Considérons d'abord les caustiques situées dans l'espace supérieur ZOX. Elles seront données par les intersections des trajectoires dans cet espace; mais les trajectoires qui formeront ces intersections pourront avoir été originairement menées dans l'espace ZOX, comme le montre la *fig.* 19, ou dans l'espace $Z'OX$, comme le montre la *fig.* 16. Discutons successivement ces deux cas, en commençant par le premier.

Si les trajectoires ont été originairement menées dans l'espace supérieur, elles ne pourront y revenir qu'après avoir eu un nombre égal de *maxima* dans cet espace et de *minima* dans l'espace inférieur; c'est-à-dire que l'équation des branches extrêmes, après ces diverses révolutions, sera

$$x = \frac{4\,n.\,\sin.\,I.\,\cos.\,I}{\alpha} + \frac{4\,n.\,\sin.\,I.\,\cos.\,I}{\alpha'} + \frac{2\,\cos.\,I}{\alpha}.\,(\sin.\,I - \sqrt{\sin^2.\,I - \alpha z}$$

les z étant pris positivement au-dessus de la ligne OX. En faisant disparoître le radical cette équation devient

$$x^2 - 2\,x.\,\sin.\,2\,I.\,\frac{[2\,n.\,(\alpha + \alpha') + \alpha']}{\alpha.\,\alpha'} + \frac{4\,n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') + \alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}.\,\sin^2.\,2\,I + \frac{2.\,(1 + \cos.\,2\,I)}{\alpha}\,z = 0$$

Sous cette forme on voit qu'elle est analogue à celle de la page 123, et qu'elle peut être traitée de la même manière. Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\frac{2n.(\alpha+\alpha')+\alpha'}{\alpha.\alpha'}=A;\quad \frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha^2.\alpha'^2}=B$$

et que l'on cherche ensuite l'équation de la caustique, comme nous l'avons fait précédemment, on la trouvera donnée par le système des deux équations suivantes :

$$x=\frac{B}{A}.(2\,sin.\,2\,I+sin.\,4\,I)$$

et

$$z=-B\alpha.(1-2\,cos.\,I.+cos.\,4\,I)$$

Ces caustiques sont donc toutes analogues à la première que nous avons considérée; elles n'en diffèrent que par le paramètre; et, dans les inclinaisons très-petites elles se réduisent à des paraboles qui ont pour axe commun l'axe des z et qui touchent l'axe des x à l'origine des coordonnées. En remettant pour A et B leurs valeurs, on a

$$x=\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha.\alpha'.[2\,n.(\alpha+\alpha')+\alpha']}.(2\,sin.\,2\,I+sin.\,4\,I)$$

et

$$z=-\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha.\alpha'2}.(1-2\,cos.\,2\,I+cos.\,4\,I)$$

Telles sont les équations des caustiques formées dans l'espace supérieur ZOX par les intersections des trajectoires menées originairement dans cet espace ou partant

de l'observateur. Si $n = 0$, x et z deviennent nuls et la caustique se réduit à un point qui est l'origine même des coordonnées. En effet, dans ce cas on demande que l'intersection ait lieu immédiatement entre les premières branches des trajectoires menées dans l'espace ZOX, et ces premières branches ne peuvent se couper qu'à l'origine. Les équations précédentes ne comprennent point les intersections possibles des secondes branches au-dessous de la ligne OX; mais aussi on a vu précédemment que ces dernières n'ont pas lieu dans le cas actuel, et c'est pourquoi nous n'avons pas considéré la valeur de x qui s'y rapporte. Cette analyse ne donne pas non plus les branches de la caustique qui sont formées par les intersections des secondes branches de trajectoires, dans l'espace supérieur; mais on a vu aussi que ces branches de la caustique ne sauroient avoir lieu pour de petites inclinaisons.

Venons maintenant aux caustiques formées dans l'espace ZOX par des trajectoires menées originairement dans l'espace $Z'OX$: elles ne pourront être formées qu'après que les trajectoires auront eu un nombre n de *minima* dans l'espace inférieur, et un nombre $n - 1$ de *maxima* dans l'espace supérieur; ce qui donnera l'équation

$$x = n.\frac{4\,\sin. I. \cos. I}{\alpha'} + (n - 1).\frac{4\,\sin. I. \cos. I}{\alpha}$$

$$+ \frac{2\cos. I}{\alpha}.\sin. I \pm \sqrt{\sin.^2 I - \alpha z}$$

ou, en faisant disparoître le radical,

$$x^2 - 2\,x.\,sin.\,2\,I.\,\frac{[2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\,\alpha'}$$
$$+ \frac{4\,n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}.\,sin^2.\,2\,I$$
$$+ \frac{2.\,(1 + cos.\,2\,I)}{\alpha}\,z = 0$$

Cette équation est encore analogue aux précédentes, et en faisant, pour plus de simplicité,

$$A = \frac{2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha'}{\alpha.\,\alpha'}$$
$$B = \frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}$$

elle donne également

$$x = \frac{B}{A}.\,(2\,sin.\,2\,I + sin.\,4\,I)$$
$$z = -\,B.\,\alpha.\,(1 - 2\,cos.\,2\,I + cos.\,4\,I)$$

ou, en remettant pour A et B leurs valeurs,

$$x = \frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\,\alpha'.\,[2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}.\,(2\,sin.\,2\,I + sin.\,4\,I)$$

et

$$z = -\frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\,\alpha'^2}.\,(1 - cos.\,2\,I + cos.\,4\,I)$$

Si l'on fait dans ces équations $n = 1$, on retombera sur les valeurs de x et de z trouvées plus haut, pour la première caustique formée dans l'espace supérieur ZOX par les trajectoires menées originairement

dans l'espace $Z'OX$, et qui n'ont eu qu'un *minimum* dans cet espace.

Il existera de même, dans l'espace inférieur, des caustiques analogues aux précédentes, c'est-à-dire formées par des trajectoires qui auront eu plusieurs *minima* dans l'espace supérieur ZOX et plusieurs *maxima* dans l'espace inférieur $Z'OX$. Il suffira, pour obtenir ces caustiques, de changer α en α' dans les résultats précédens; alors, en désignant par z' les z qui s'y rapportent, et que nous prendrons positivement dans le sens OZ', on aura :

1°. Caustiques formées dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans cet espace,

$$x = \frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}{\alpha.\alpha'.[2n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}.(2\,sin.\,2\,I + sin.\,4\,I)$$

$$z' = -\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}{\alpha'\,\alpha^2}.(1 - 2\,cos.\,2\,I + cos.\,4\,I)$$

2°. Caustiques formées dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans l'espace supérieur ZOX,

$$x = \frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}{\alpha.\alpha'.[2n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}.(2\,sin.\,2\,I + sin.\,4\,I)$$

$$z' = -\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}{\alpha'.\,\alpha^2}.(1 - 2\,cos.\,2\,I + cos.\,4\,I)$$

En faisant $n = 1$ dans ces derniers on retrouvera les valeurs de x et de z trouvées précédemment pour la caustique formée dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans l'espace supé-

rieur ZOX, et qui n'auroient eu qu'un *maximum* dans cet espace.

Cherchons maintenant dans quel ordre ces différentes caustiques sont rangées de chaque côté de l'axe OX; considérons d'abord celles qui se trouvent au-dessus de cet axe. Les équations qui les donnent sont toujours de la forme

$$x = \frac{B}{A} . (2 \sin. 2 I + \sin. 4 I)$$
$$z = - B\alpha . (1 - 2 \cos. 2 I + \cos. 4 I)$$

En se bornant aux très-petits angles, on en déduit une parabole du second ordre qui est

$$z = \frac{A^2 \alpha}{16 B} . x^2$$

et le rang de chaque parabole dépendra de la grandeur du terme $\frac{A^2 \alpha}{16 B}$, suivant la valeur de n qui y correspond.

Pour les trajectoires qui commencent leur cours dans l'espace ZOX, on a

$$A = \frac{2 n . (\alpha + \alpha') + \alpha'}{\alpha . \alpha'} ; \quad B = \frac{n . [n . (\alpha + \alpha') + \alpha'] . (\alpha + \alpha')}{\alpha^2 . \alpha'^2}$$

Ainsi, en nommant P le coefficient $\frac{A^2 \alpha}{16 B}$ on aura

$$P = \frac{[2 n . (\alpha + \alpha') + \alpha']^2 . \alpha}{16 n . (\alpha + \alpha') . [n . (\alpha + \alpha') + \alpha']}$$

Cette valeur de P peut être mise sous la forme suivante:

$$P = \frac{\alpha}{4} . \left[1 + \frac{\alpha'^2}{4 n . (\alpha + \alpha') [n . (\alpha + \alpha') + \alpha']} \right]$$

On voit donc qu'elle diminue sans cesse à mesure que n augmente, et qu'elle a pour limite $\frac{\alpha}{4}$; ce qui correspond à n infini. Ainsi les caustiques données par ce système d'intersections se rapprochent de plus en plus de l'axe OX, à mesure que les inflexions des trajectoires qui les donnent ont été multipliées. Mais quelque nombreuses qu'on les suppose, les caustiques seront limitées, du côté de l'axe, par la parabole $z = \frac{\alpha . x^2}{4}$ au-dessus de laquelle elles se trouveront toujours placées. En opérant de même sur les caustiques données par des trajectoires qui commencent leur cours dans l'espace inférieur $Z'OX$, on aura

$$A = \frac{2n.(\alpha + \alpha') - \alpha'}{\alpha . \alpha'}; \quad B = \frac{n.[n.(\alpha + \alpha') - \alpha'].(\alpha + \alpha')}{\alpha^2 \alpha'^2}$$

et l'on en déduira

$$P = \frac{\alpha . [2n.(\alpha + \alpha') - \alpha']^2}{16 n.(\alpha + \alpha').[n.(\alpha + \alpha') - \alpha']}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$P = \frac{\alpha}{4} . \left[1 + \frac{\alpha'^2}{4n.(\alpha + \alpha').[n.(\alpha + \alpha') - \alpha']} \right]$$

Les caustiques données par ce système d'intersections seront donc rangées au-dessus de l'axe OX, comme les précédentes; c'est-à-dire que celles pour lesquelles n est plus considérable, en seront plus rapprochées; mais ce rapprochement aura encore pour limite la parabole

$$z = \frac{\alpha x^2}{4}$$

On voit aussi que, pour des valeurs égales de n, les valeurs de P sont plus petites pour le premier système que pour le second ; ainsi, le nombre des inflexions étant le même, les caustiques données par le premier système s'approcheront davantage de l'axe OX.

En appliquant ces raisonnemens aux caustiques situées dans l'espace inférieur $Z'OX$, on verra facilement qu'elles sont rangées au-dessous de l'axe OX d'une manière analogue aux précédentes, et qu'elles ont pour limite la parabole dont l'équation seroit

$$z' = \frac{\alpha' x^2}{4}$$

ce qui répondroit à un nombre de réflexions infini.

Et de même que les premières branches OV, OV', que nous avons déterminées *fig.* 15, appartenoient au système général des deux courbes OVZ', $OV'Z$, de même les nouvelles OV_1, OV_1' (*fig.* 20) appartiennent au système des deux courbes OV_1Z', $OV_1'Z$; d'où l'on voit maintenant ce que signifient les deux branches ZF'', $Z'F''$ de la *fig.* 16. Elles servoient pour ainsi dire d'attente pour les branches $OV'F''$, $OV_1'F''$, qui n'en sont que la continuation. Les autres branches OV_{11}, OV_{11}' se rattachent à des branches analogues, correspondantes à un certain nombre de réflexions complètes, et qui toutes viennent aboutir aux points Z, Z', où se fait la réflexion perpendiculaire.

Maintenant il est facile de comprendre qu'un point lumineux, situé entre ces caustiques, enverra à l'observa-

teur autant d'images qu'il pourra leur mener de trajectoires tangentes. Par exemple, le point lumineux M (*fig.* 20) situé au-dessus de l'axe OX et au-dessous de la caustique limite pourra envoyer par chacune des caustiques OV, $OV_{,}$, $OV_{,,}$, deux images, une directe et une renversée, lesquelles viendront se peindre dans l'espace supérieur ZOX ou dans l'espace inférieur $Z'OX$, selon le système d'intersections auquel elles appartiendront. Et le même point M pourra aussi envoyer une image par chacune des caustiques inférieures $OV'OV_{,}'OV_{,,}'$, mais il n'en enverra qu'une seule par chacune d'elles. Tous cela est analogue à ce que nous avons remarqué précédemment lorsque nous avons traité pour la première fois de la formation de ces images.

Toute extraordinaire que cette multiplicité d'images puisse paroître elle n'est cependant pas impossible à réaliser; car nous en avons observé deux exemples dans les triangles d'Espagne, ainsi que je l'ai rapporté au commencement de ce mémoire. Mais pour apprécier la probabilité que l'on peut avoir de la rencontrer dans la nature, il faut remarquer que la position supposée ici à l'observateur, sur la limite commune des deux couches, n'est pas nécessaire à la production du phénomène; ce qui le rendroit infiniment rare. Le même effet peut exister pour un observateur placé dans un des deux milieux, de sorte que l'opposition du décroissement des densités en est la véritable condition; laquelle, loin d'être improbable, doit au contraire se montrer dans la nature assez fréquemment.

Supposons donc l'observateur placé dans le milieu supérieur ZAX (*fig.* 21) à une hauteur H au-dessus de l'axe AX, commune intersection des deux milieux. Considérons d'abord les portions de caustiques qui se forment dans le milieu supérieur. Les trajectoires qui les donneront seront d'abord parties du point O, ou de l'observateur, par une première ou par une seconde branche; et après avoir eu un *maximum* dans cet espace ou n'en avoir point eu, elles descendront dans le milieu inférieur, s'y replieront, et après avoir atteint leur *minimum*, rentreront dans l'espace supérieur pour recommencer de nouvelles révolutions. Ainsi en supposant qu'elles aient fait n de ces révolutions, c'est à dire qu'elles aient eu n *minima* dans l'espace inférieur, elles n'auront fait que $n - 1$ révolutions complètes dans l'espace supérieur, sans compter leur première et leur dernière branche; et en nommant I l'angle sous lequel elles pénètrent dans l'espace inférieur, c'est-à-dire l'angle que leur tangente forme avec l'axe des x en entrant dans cet espace, l'équation d'une quelconque de ces trajectoires sera

$$x = \frac{2 \cos. I}{\alpha}.(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha H}) + \frac{4 n. \sin. I. \cos. I}{\alpha'}$$
$$+ \frac{4(n-1). \sin. I. \cos. I}{\alpha} + \frac{2 \cos. I}{\alpha}.(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha z})$$

Le premier terme se rapporte à la première partie de la trajectoire, depuis sa sortie de l'observateur jusqu'à son entrée dans le milieu inférieur. Les deux termes suivans expriment le nombre d'amplitudes complètes décrites

dans un milieu et dans l'autre. Le dernier terme exprime la dernière branche de la trajectoire que l'on considère, celle proprement où se fait l'intersection. Les signes — des radicaux ont lieu quand la trajectoire commence ou finit par une première branche; le signe +, au contraire, doit être employé quand il s'agit d'une seconde branche. Pour éviter ces doubles signes nous emploierons des coefficiens a et b que l'on fera à volonté + ou — 1; de cette manière on aura

$$(1)\quad x = 2\,n.\,\sin.\,2\,I.\,\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha.\,\alpha'} + \frac{2\cos.\,I}{\alpha}.\left(a\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha H} + b\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha z}\right)$$

La condition des intersections est

$$(2)\quad 0 = 2\,n.\,\cos.\,2\,I.\,\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha'} - \sin.\,I.\left(a\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha H} + b\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha z}\right) + \cos^2.\,I.\left(\frac{a.\,\sin.\,I}{\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha H}} + \frac{b.\,\sin.\,I}{\sqrt{\sin^2.\,I - \alpha z}}\right)$$

Il reste à éliminer I entre ces deux équations. Nous n'essaierons pas de le faire en général, ce qui entraineroit une trop grande complication; mais seulement pour de très-petits angles, comme précédemment. Alors nous ferons

$$\alpha' = \sin^2.\,I' = \omega^2;\ \sin.\,I = K.\,\sin.\,I' = K\omega$$
$$\alpha = \mu\,\omega^2$$

I' sera la limite de la réflexion dans le milieu inférieur,

et K sera toujours une fraction ; car si la trajectoire pénétroit dans le milieu inférieur avec une inclinaison égale à I' ou plus grande que I', elle cesseroit de s'y réfléchir. De plus, μ sera un nombre dépendant du rapport des limites de la réfraction dans les deux milieux, limites que nous supposerons toutes deux du même ordre et extrêmement petites ; en sorte que μ sera un nombre fini et ω une quantité fort petite. Substituant ces valeurs dans l'équation (2), elle devient

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2n.(1-2K^2\omega^2).(1+\mu) \\ & - K\omega^2.(a\sqrt{K^2-\mu H}+b\sqrt{K^2-\mu z}) \\ & + K.(1-K^2\omega^2).\left(\frac{a}{\sqrt{K^2-\mu H}}+\frac{b}{\sqrt{K^2-\mu z}}\right). \end{aligned}$$

Cette équation contient des termes indépendans de ω. Ce sont eux qui donneront la partie la plus sensible de la valeur de z. Ainsi, en faisant ω nul, on aura pour déterminer z l'équation approchée

$$(3) \quad 0 = 2n.(1+\mu)+K.\left(\frac{a}{\sqrt{K^2-\mu H}}+\frac{b}{\sqrt{K^2-\mu z}}\right)$$

d'où l'on tire

$$\mu z = K^2 - \frac{K^2.(K^2-\mu H)}{[aK+2n.(1+\mu)\sqrt{K^2-\mu H}]^2}$$

et enfin

$$(4) \quad z = \frac{K^2.\{aK+[2n.(1+\mu)+1].\sqrt{K^2-\mu H}\}.\{aK+[2n.(1+\mu)-1].\sqrt{K^2-\mu H}\}}{\mu.[aK+2n.(1+\mu).\sqrt{K^2-\mu H}]^2}$$

La valeur correspondante de x est

$$x = \frac{4Kn.(1+\mu)+2(a\sqrt{K^2-\mu H}+b\sqrt{K^2-\mu z})}{\mu\omega}$$

L'indéterminée b a disparu par l'élévation au carré; de sorte que cette valeur de z convient également aux deux cas où la dernière portion de la trajectoire, celle qui forme la caustique que l'on considère, seroit une première branche ou une seconde. Tout ce calcul est analogue à celui que nous avons fait précédemment, lorsque la densité du milieu supérieur étoit supposé constante; et en effet, si l'on suppose $\mu = 0$, $n = 1$ et $a = -1$ dans la valeur générale de z, on retombe sur les valeurs

$$z = 4K^2 - H; \quad x = \frac{8K}{\omega}$$

qui sont en effet celles de la partie de la caustique située au-dessus de l'axe OX dans les circonstances que nous venons de rappeler.

Il y a un cas qui n'est pas compris dans la valeur précédente de z; c'est celui de $n = 0$. Il a lieu lorsque l'on veut considérer les intersections des trajectoires immédiatement après leur sortie de l'œil de l'observateur, et avant qu'elles soient descendues dans le milieu inférieur $Z'OX$. Alors, en reprenant la valeur générale de x, et faisant a et b égaux à $+1$, puisque, dans ce cas, il n'y a que les secondes branches qui se coupent, on a

$$x = \frac{2\cos. I}{\alpha} \cdot \left(\sqrt{\sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{\sin^2. I - \alpha z}\right)$$

La condition des intersections donne

$$0 = -\frac{\sin. I}{\alpha} \cdot \left(\sqrt{\sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{\sin^2. I - \alpha z}\right)$$
$$+ \frac{\cos^2. I}{\alpha} \cdot \left(\frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I - \alpha H}} + \frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I - \alpha z}}\right)$$

Cette équation devient alors divisible par $sin. I$ et par $\sqrt{sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{sin^2. I - \alpha z}$; supprimant ces facteurs il reste

$$\sqrt{sin^2. I - \alpha H}. \sqrt{sin^2. I - \alpha z} = cos^2. I$$

C'est la disparition des deux facteurs précédens qui fait que le cas que nous examinons échappe à la solution générale. En éliminant I entre cette équation et la valeur précédente de x, on trouve

$$z = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha x^2}{4(1 - \alpha H)}$$

c'est-à-dire que la caustique est une parabole; ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré dans la page 70. Si l'on met l'origine des z à l'observateur, en faisant $z = z' + H$, on trouve

$$z' = \frac{1 - \alpha H}{\alpha} - \frac{\alpha}{1 - \alpha H} \frac{x^2}{4}$$

et si l'on introduit, pour plus de simplicité, la densité $(\varrho)'$ qui a lieu au niveau de l'observateur, ainsi que la raison A' de la progression, à partir de ce point, on aura

$$\varrho' = (\varrho). (1 - AH); \quad A' = \frac{A}{1 - \alpha H}$$

$$m' = \frac{\frac{4 K'}{n'} (\varrho')}{1 + \frac{4 K'}{n'} (\varrho')},$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha H} = m'A'$$

et l'équation de la caustique devient

$$z' = \frac{1}{m'A'} - \frac{m'A'}{4}\, x^2$$

c'est précisément celle que nous avons obtenue dans l'article cité.

Pour pouvoir discuter en même temps toute l'étendue de la caustique, nous allons chercher maintenant les branches qui la complètent et qui sont situées au-dessous de l'axe OX.

Ces branches sont données par les trajectoires qui ont fait un nombre égal de révolutions complètes au-dessus et au-dessous de la ligne OX, de sorte que leur équation est

$$x = \frac{2\, cos.\, I}{\alpha} . \left(sin.\, I \pm \sqrt{sin^2.\, I - \alpha H}\right)$$
$$+ \frac{4\, n.\, sin.\, I.\, cos.\, I}{\alpha'} + \frac{4\, n.\, sin.\, I.\, cos.\, I}{\alpha}$$
$$+ \frac{2\, cos.\, I}{\alpha'} . \left(sin.\, I \pm \sqrt{sin^2.\, I - \alpha' z}\right)$$

Ici les coordonnées z sont prises positivement de haut en bas dans le milieu inférieur. Si l'on substitue les coefficiens a et b aux signes $\pm$ des radicaux, comme nous l'avons fait précédemment, cette équation devient

$$x = (2\, n + 1).\, sin.\, 2\, I.\, \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha.\, \alpha'}$$
$$+ 2\, cos.\, I. \left(\frac{a.\sqrt{sin^2.\, I - \alpha H}}{\alpha} + \frac{b.\sqrt{sin^2.\, I - \alpha' z}}{\alpha'}\right).$$

La condition des intersections est

$$o = (2n + 1).\ cos.\ 2I.\ \frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha.\ \alpha'}$$

$$- sin.\ I.\ \left(\frac{a.\ \sqrt{sin^2.\ I - \alpha H}}{\alpha} + \frac{b.\ \sqrt{sin^2.\ I - \alpha' z}}{\alpha'}\right)$$

$$+ cos^2.\ I.\ \left(\frac{a.\ sin.\ I}{\alpha.\ \sqrt{sin^2.\ I - \alpha H}} + \frac{b.\ sin.\ I}{\alpha'.\ \sqrt{sin^2.\ I - \alpha' z}}\right)$$

Soit, comme précédemment,

$$\alpha' = sin^2.I' = \omega^2;\ sin.I = K.\ sin.I' = K\omega;\ \alpha = \mu\omega^2$$

il vient

$$o = (2n + 1).\ (1 - 2K^2\omega^2).\ \frac{(\mu + 1)}{\mu}$$

$$- K\omega^2.\left(a.\ \frac{\sqrt{K^2 - \mu H}}{\mu} + b.\ \sqrt{K^2 - z}\right)$$

$$+ K.\ (1 - K^2\omega^2).\ \left(\frac{a}{\mu.\ \sqrt{K^2 - \mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2 - z}}\right)$$

Ne conservant que les termes indépendans de ω, il reste

$$o = \frac{(2n + 1).\ (1 + \mu)}{\mu} + K\left(\frac{a}{\mu.\ \sqrt{K^2 - \mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2 - z}}\right)$$

d'où l'on tire

$$z = K^2 - \frac{\mu^2 K^2\ (K^2 - \mu H)}{[aK + (2n + 1).\ (1 + \mu).\ \sqrt{K^2 - \mu H}]^2}$$

et enfin

$$z = K^2.\ \frac{\{aK + [2n(\mu + 1) + 2\mu + 1].\sqrt{K^2 - \mu H}\}.\{aK + [2n(\mu + 1) + 1]\sqrt{K^2 - \mu H}\}}{[aK + (2n + 1).\ (1 + \mu).\ \sqrt{K^2 - \mu H}]^2}$$

La valeur correspondante de x est

$$x = \frac{2}{\omega} \cdot \left[\frac{(2n+1) K.(1+\mu) + a \sqrt{K^2 - \mu H}}{\mu} + b . \sqrt{K^2 - z} \right]$$

Si l'on suppose $n = 0$, $\mu = 0$, $a = -1$, ce qui revient à supposer que la densité du milieu supérieur est constante, on trouve

$$z = K^2 - \frac{4 K^6}{(H - 2 K^2)^2}; \quad x = \frac{H^2}{K.(H - 2 K^2) \omega}$$

qui sont les mêmes valeurs que nous avons obtenues dans la page 101.

D'après ces valeurs que nous venons d'obtenir il est facile de reconnoître complètement la forme de la caustique lorsque l'observateur est placé dans le milieu supérieur à une hauteur H, comme nous l'avons supposé. En effet, soit O (*fig.* 21) le point où il se trouve; menons la ligne horizontale OX' parallèle aux couches, et considérons d'abord les trajectoires OM, OM' menées du point O au-dessous de cette ligne, sous diverses inclinaisons que nous désignerons par I'.

Premièrement il est clair que les branches OM, OM' de ces trajectoires, étant divergentes, ne peuvent pas se couper dans le milieu supérieur entre les lignes OX' et AX. Elles devront donc pénétrer dans le milieu inférieur où le sens de leur courbure changeant, elles engendreront de nouvelles trajectoires concaves vers l'axe AX. Celles de ces trajectoires qui répondront aux plus grandes valeurs de I' se couperont dans leurs secondes branches, au-dessous de l'axe AX, et formeront dans le milieu inférieur la portion de caustique $Z'F$ dans laquelle le point

Z' répondra à $I' = 90$ degrés I' diminuant toujours, les secondes branches des trajectoires inférieures ne se couperont plus au-dessous de AX. Elles pénètreront dans le milieu supérieur, où elles donneront la portion de caustique FV, analogue à la branche FR de la *fig.* 13, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Et, de même qu'alors, cette branche aura aussi une limite, c'est-à-dire qu'au-dessous de certaines valeurs de I'; les intersections s'abaisseront de nouveau et rentreront dans le milieu inférieur, suivant la branche VR analogue à la branche RR' de la *fig.* 13; après quoi I' diminuant toujours, il se formera une nouvelle branche RS' qui se terminera au point S, lorsque l'on aura $I' = 0$, $K^2 = \mu H$; ce qui donne $K^2 = z$, et la tangente de cette branche au point S sera horizontale.

Tout ceci est encore analogue à ce que l'on a vu dans la *fig.* 13 pour le cas où la densité du milieu supérieur étoit constante. La branche RS, dans le cas actuel, correspond à la branche $R'X'$ de la *fig.* 13; seulement ici elle est terminée, au lieu qu'alors elle s'étendoit à l'infini, parce que la trajectoire menée du point O sous l'angle $I' = 0$ étoit alors une ligne droite parallèle à l'axe des X, qui ne pouvoit jamais être censé pénétrer dans le milieu inférieur, si ce n'est à une distance infinie.

Et, de même que dans la *fig.* 15, les trajectoires qui forment la branche $Z'F$ dans le milieu inférieur, forment en se repliant dans le milieu supérieur la nouvelle portion de caustique ZF'' par les intersections de leurs secondes branches, de même, dans le cas actuel,

les trajectoires qui forment la portion de caustique $Z'F$ dans le milieu inférieur, formeront dans le milieu supérieur la portion de caustique $F''Z$. Mais dans le cas de la *fig.* 15, la même trajectoire donnoit les points F et F'' et toutes celles qui formoient la portion $Z'F$ formoient aussi ZF'', parce que la valeur de I en F et en F'' étoit de 45°; mais dans le cas de la *fig.* 21 l'inclinaison en F est moindre que 45°, et en F'' elle est plus grande, parce que le point V s'est abaissé vers le milieu inférieur : et de là il résulte que l'arc ZF'', est formé seulement par une partie des trajectoires qui forment l'arc $Z'F$; de sorte que les autres ont leur seconde intersection sur le prolongement de la branche ZF'' dans le milieu inférieur.

Si, d'après les expressions de Z de la page 142, on cherche les coordonnées du point F où z est nulle, seulement dans le cas de $n = 0$, on trouve

$$K = \frac{(2\mu+1)}{2} \cdot \sqrt{\frac{H}{\mu+1}}; \quad x = \frac{2}{\omega} \cdot \left[\frac{K.(1+\mu) - \sqrt{K^2 - \mu H}}{\mu} + K\right]$$

En faisant de plus $\mu = 0$, ces expressions donnent

$$K = \frac{\sqrt{H}}{2}; \quad x = \frac{4.\sqrt{H}}{\omega}$$

Ce sont précisément les valeurs trouvées au commencement de la page 101, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Si l'on fait H nul on trouve $K = 0$, $x = 0$, c'est-à-dire que le point f vient à l'origine, et qu'il est donné par la trajectoire parallèle à l'axe. C'est en effet, ce qui a lieu quand l'observateur est situé au milieu des deux couches, comme on l'a vu précédemment.

Quant aux coordonnées du point S, on les trouve en faisant $K^2 = \mu H$ et $K^2 = z$; ce qui donne

$$z = \mu H; \quad x = \frac{2.(2n+1).(1+\mu)}{\mu}.\sqrt{\mu H}$$

d'où l'on voit que si $\mu = 0$, le point S vient sur l'axe AX et s'éloigne, sur cet axe, à une distance infinie. C'est en effet ce qui a lieu quand la densité du milieu supérieur est constante.

Jusqu'à présent nous n'avons encore que la moitié de la caustique, celle qui est donnée par des branches OM, OM' menées au-dessous de la ligne OX', et par conséquent correspondantes à des valeurs de I' positives. Si nous considérons maintenant les valeurs négatives, c'est-à-dire les trajectoires menées au-dessus de la ligne OX', nous verrons naître le reste de la caustique que nous voulons déterminer.

En effet, il est visible que les plus grandes valeurs de I' donneront des trajectoires qui se couperont, dans leurs secondes branches, dans le milieu supérieur, au-dessus de l'axe AX; ce qui formera la portion de caustique ZF', telle qu'elle doit naturellement avoir lieu dans un tel milieu. Mais, après que I' aura diminué jusqu'à un certain terme, les intersections des trajectoires se feront dans le milieu inférieur, ce qui donnera la branche $F'V'$ et ensuite la branche $V'S$ qui se réunira avec la branche AS au point S lorsque l'on aura $z = 0$. En effet, il est aisé de voir que les valeurs précédemment trouvées pour z, sont en général différentes, suivant que l'on prend le

coefficient a négatif, ou positif; c'est-à-dire suivant que l'on suppose que les trajectoires parties du point O entrent dans l'espace inférieur par leur première ou par leur seconde branche. Mais ces deux cas se réunissent lorsque I' est nul, parce qu'alors on a $\sqrt{\sin^2. I - \mu H} = 0$, et le radical duquel dépendoit la différence des deux branches disparoît de la valeur de z. C'est parce que le point S appartient à la fois aux premières et aux secondes branches des trajectoires, qu'il se trouve au *minimum* d'une d'entre elles, ce qui rend horizontale la tangente de la caustique en ce point.

On voit également que les trajectoires qui forment les portions de caustiques $ZV'S$, par les intersections de leurs secondes branches au-dessus de AX ou de leurs premières branches dans le milieu inférieur, donneront dans ce même milieu, par les intersections de leurs secondes branches, la portion de caustique $Z'f''$ analogue à la branche $Z'F''$ de la *fig.* 15, et servant comme elle d'attente pour le prolongement de la caustique, par les trajectoires qui ont subi plus d'une révolution autour de l'axe AX. Seulement, dans le cas actuel, les points f'', F'' ne sont pas les mêmes, au lieu que dans la *fig.* 15 ils se trouvoient réunis.

Et delà résultera, dans les petites inclinaisons, un système de caustiques consécutives analogues à celles de la *fig.* 20, mais placées différemment. Parmi ces caustiques qui sont représentées dans la *fig.* 22, il n'y aura que les branches $VRSV'$, $V_{,}R'S'V_{,}'$ qui auront lieu sous de très-petites inclinaisons; et ces branches auront encore

la propriété que chacune d'elles renfermera toutes les suivantes comme dans la *fig.* 20. Mais les points *V*, *V'*, *V''* iront continuellement en s'abaissant vers l'axe *AX* par l'effet de l'élévation de l'observateur, comme nous avons vu qu'il arrivoit dans la *fig.* 13, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Il y aura aussi des hauteurs pour lesquelles quelques-unes des branches ci-dessus pourront disparoître en partie, ou en totalité. Mais ces variations faciles à prévoir, d'après tout ce qui précède, seroient inutiles à examiner, et il suffit à notre objet d'avoir montré qu'un système de pouvoirs réfringens composé de deux progressions arithmétiques contraires peut donner une très grande multiplicité d'images pour un objet placé convenablement, même lorsque la force réfringente du milieu, et par conséquent la limite de la réflexion extrême, est supposée extrêmement petite.

Ce que nous venons de démontrer relativement à la progression arithmétique n'est pas particulier à cette loi; au moins quant à la forme générale des caustiques, à leur double rebroussement et à leur multiplicité. Des propriétés analogues se rencontrent, avec des modifications diverses, dans tous les cas où l'on suppose deux lois de décroissemens opposés. Il n'est pas même nécessaire que les deux lois soient de même nature. Considérons par exemple le cas où le décroissement se faisant suivant une progression arithmétique dans le milieu supérieur se feroit dans le milieu inférieur suivant une exponentielle. Ce cas, comme nous l'avons vu, paroît se rapprocher extrêmement de ce qui a lieu dans la

nature. Supposons encore que l'observateur se trouve dans le milieu supérieur. Alors, dans les inclinaisons très-petites, il se formera des caustiques qui passeront d'un milieu dans l'autre avec toutes les inflexions que nous avons remarquées dans la *fig.* 22. Car on a vu que, pour de très-petites inclinaisons, les trajectoires, menées dans un décroissement par exponentielle, diffèrent très peu de ce qu'elles seroient dans le cas d'une progression arithmétique; de sorte que l'on peut appliquer à ces trajectoires les considérations que nous venons d'exposer dans les pages précédentes; et par conséquent elles donneront des caustiques parfaitement analogues à toutes celles que nous venons d'examiner. Mais on a vu que ces dernières se modifient avec la hauteur de l'observateur; que la partie de leurs branches située dans le milieu supérieur, s'abaisse à mesure que l'observateur s'élève, et qu'enfin elle s'évanouit lorsque l'observateur a atteint une certaine hauteur dépendante de la différence de densité des deux milieux et des rapports de leurs forces réfringentes. Ainsi, dans le cas actuel, il arrivera de même que la hauteur de l'observateur et la rapidité du décroissement de l'exponentielle, à l'endroit où les deux milieux se joignent, produiront des modifications analogues, sur les caustiques qui auront lieu dans ce dernier cas. Et enfin, ici comme dans les autres lois que nous avons examinées, il y aura certaines hauteurs de l'observateur qui anéantiront complètement les branches de caustiques situées dans le milieu supérieur, et qui abaisseront ces branches au-des-

sous de la limite commune des deux milieux. De sorte que dans cette circonstance, comme dans le cas de la *fig.* 14, chaque caustique pourra se réduire à une seule branche située au-dessous de cette limite, qui aura sa convexité tournée vers le milieu supérieur. Cela arriveroit, par exemple, si la progression arithmétique ne commençoit qu'à une hauteur où les variations de l'exponentielle soient devenues insensibles, en sorte qu'on puisse confondre celle-ci avec son asymptote rectiligne. Car alors les *minima* des trajectoires situées dans le milieu inférieur iroient toujours en s'éloignant de l'axe des z, et par conséquent les intersections de deux secondes branches se feroient toujours au-dessous de cet axe, dans le milieu inférieur : ce qui empêcheroit la caustique de s'élever dans le milieu supérieur. Au lieu que cela n'arriveroit pas nécessairement, pour toutes les hauteurs de l'observateur, si l'exponentielle étoit interrompue avant son asymptote ; puisqu'alors, au moins pour de petites valeurs de H, la courbe des *minima*, dans le milieu inférieur, auroit toujours un point de rebroussement après lequel elle reviendroit sur elle-même : ce qui donneroit lieu à la branche supérieure de la caustique de se former. En général la considération de la courbe des *minima*, suffira pour indiquer dans toutes les circonstances, les variations et les accidens que les caustiques doivent éprouver.

Recherche des trajectoires et des caustiques, en ayant égard à la courbure de la terre.

TOUTES les considérations que nous venons d'exposer relativement à la formation des caustiques et à la multiplicité des images dans le cas des couches planes, s'appliquent encore, avec quelques modifications, quand on a égard à la courbure de la terre. Il arrive même fort souvent que ces modifications sont très-légères, parce que la courbure de la terre étant peu sensible pour de petites distances, des différences de température, même assez foibles, suffisent pour en dissimuler l'effet, ainsi qu'on l'a vu plus haut dans les observations de dépression faites sur le sable à Dunkerque. Les dépressions observées alors pour un ou deux degrés centésimaux de différence dans les températures extrêmes, étoient incomparablement plus grandes que celles que la courbure de la terre auroit pu donner, pour des hauteurs aussi petites que celles où nous étions placés, et pour des distances aussi peu considérables que celles où se terminoit l'horizon apparent.

Mais, d'un autre côté, on conçoit moins facilement ces différences de température sur la surface de la mer que sur celle d'un terrain sablonneux que les rayons solaires peuvent échauffer à un haut degré. Ainsi, avant de chercher à étendre nos résultats aux couches sphériques, je crois devoir montrer qu'en effet il se produit, sur la surface des eaux, des phénomènes d'inflexion et de renversement analogues à ceux qui ont lieu sur les plaines sablonneuses; et qu'ils sont produits par les mêmes causes,

c'est-à-dire par l'excès de température des couches inférieures sur celles qui sont au-dessus.

Pour éclaircir ce fait rien n'est plus utile que d'observer successivement l'horizon de la mer, en se plaçant à diverses hauteurs connues au-dessus de sa surface. Toutes les trajectoires menées à cet horizon se terminant inférieurement de la même manière, comme étant toutes tangentes à la mer, peuvent être considérées comme une seule et même trajectoire sur divers points de laquelle on se place successivement, à des hauteurs connues. Chaque dépression observée fait connoître l'angle que la tangente de la trajectoire en ce point forme avec la verticale, et les changemens que cet angle éprouve entre deux stations consécutives, montrent dans quel sens la trajectoire tourne sa convexité, entre l'intervalle des deux stations.

Soit (r) le rayon mené du centre de la terre à la station la plus basse, que nous nommerons S'; soit à cette station (ϱ) la densité de l'air, et I la dépression observée. Désignons par r, ϱ, I' les quantités analogues de la station supérieure S''. Cela posé, d'après les formules rapportées dans la *Mécanique céleste* pour le cas des couches sphériques, page 277 et suivantes, l'expression $\frac{dr}{rdv}$ représente, pour chaque point de la trajectoire, la tangente de la dépression apparente du rayon visuel, et l'on a entre deux dépressions consécutives situées sur une même branche de la trajectoire, la relation suivante :

$$tang.\ I' = \frac{r}{(r).\ cos.\ I} \cdot \sqrt{1 - \frac{(r)^2.\ cos^2.\ I}{r^2} - m.\ \varphi}$$

en supposant toujours, comme précédemment,

$$m = \frac{\frac{4\,(K).\,(\varrho)}{n^2}}{1 + \frac{4\,(K).\,(\varrho)}{n^2}}\,; \quad \varphi = \frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}.$$

Si φ est une quantité positive, la trajectoire sera concave vers la surface terrestre ; c'est le cas de la réfraction ordinaire, où la densité de l'air décroît quand la hauteur augmente. Mais si φ est négative, la densité ira au contraire en décroissant, et la trajectoire sera convexe vers la même surface. Cherchons donc à tirer des observations la valeur de φ. Pour cela on commencera par carrer la valeur de *tang.* I'; ce qui donne

$$tang^2.\,I' = \frac{\frac{r^2}{(r)^2} - cos^2.\,I - m\varphi}{cos^2.\,I}$$

Soit $\frac{(r)}{r} = 1 - s$; s sera la différence du niveau des deux stations. En regardant cette différence comme une fraction extrêmement petite du rayon terrestre, et négligeant s^2, on aura

$$tang^2.\,I' - tang^2.\,I = \frac{2\,s - m\varphi}{cos^2.\,I}$$

d'où l'on tire

$$\frac{m\varphi}{2\,s} = 1 - \frac{sin.\,(I' + I).\,sin.\,(I' - I)}{2\,s.\,cos^2.\,I'}$$

En mettant dans le second membre de cette équation pour I, I' et s, leurs valeurs observées, on connoîtra si φ est positif ou négatif, par conséquent si la trajec-

toire est concave ou convexe vers la surface de la terre. On doit remarquer que $\frac{m\varphi}{4s}$ seroit ce que l'on nomme le coefficient de la réfraction terrestre, si la densité décroissoit de bas en haut suivant une progression arithmétique, comme cela a lieu ordinairement à de petites hauteurs. Si l'on vouloit supposer une loi de décroissement telle que l'on eût

$$m\varphi = 2s \quad \text{ou} \quad \frac{m\varphi}{4s} = \tfrac{1}{2}$$

on auroit

$$tang.\ I = tang.\ I'$$

c'est-à-dire que la trajectoire feroit toujours un angle constant avec la verticale, et par conséquent la trajectoire horizontale seroit un cercle. Dans ce cas l'effet de la force réfringente est égal à celui de la courbure de la terre.

Il est aisé de sentir pourquoi des observations, ainsi comparées, font connoître le sens de la courbure de la trajectoire, dans l'intervalle qu'elles comprennent. Nommons les deux stations M' et M''. La dépression observée en M' donne l'angle que fait la verticale de ce point avec la tangente de la trajectoire; et la direction de cette tangente sur la verticale se trouve ainsi déterminée. L'autre observation fait connoître les quantités analogues pour la tangente de la trajectoire en M''. Maintenant ces deux tangentes suffisamment prolongées se rencontreront nécessairement au-dessus ou au-dessous de la corde qui joint M' et M''; au-dessus si la courbe

est concave vers la surface de la terre, comme dans la réfraction ordinaire; au-dessous si elle est convexe vers cette même surface. Et pourvu que la trajectoire n'ait pas d'inflexions entre ces deux points, l'intersection dont il s'agit se fera du même côté de la corde, soit qu'on rapproche ou qu'on éloigne les deux verticales, en diminuant ou augmentant l'angle qu'elles forment au centre de la terre. Le sens de la courbure ne dépend donc nullement de la grandeur de cet angle, mais seulement des différences de niveau et des dépressions observées dans les deux stations, et voilà pourquoi on peut le déduire de l'équation différentielle, indépendamment de toute intégration.

Supposons que la trajectoire soit tangente à la mer dans la station inférieure; on aura alors $I = 0$, et I' sera la dépression apparente de l'horizon. Alors en faisant, pour plus de simplicité, $tang^2. V = 2s$, V sera la dépression vraie calculée, sans avoir égard à la réfraction, et l'on aura

$$m\varphi = \frac{sin. (V + I'). sin. (V - I')}{cos^2. I. cos^2. V}$$

expression qui, pour de petites hauteurs, pourra être réduite à

$$m\varphi = sin. (V + I'). sin. (V - I').$$

On voit par cette formule que $m\varphi$ sera positif si la dépression apparente est plus foible que la dépression vraie, et négatif si elle est plus forte. En mettant pour m et φ leurs valeurs en fonction des pressions barométriques et

des températures observées aux deux stations, on a, avec une approximation toujours très-suffisante,

$$m\varphi = \frac{(m)}{0.76}.\left[\frac{(p)}{1+(t).\,0.00375} - \frac{p}{1+t.\,0.00375}\right]$$

(m) étant, comme dans la page 27, la valeur de m calculée pour la température de la glace fondante et la pression 0.76. On tire de là, en mettant pour $m\varphi$ sa valeur observée,

$$(t)-t = \frac{(1+t.\,0.00375)}{0.00375}.\left\{\frac{(p)-p-\frac{m\varphi.\,0.76}{(m)}.(1+t.\,0.00375)}{p+\frac{m\varphi}{(m)}.\,0{,}76}\right\}$$

ce qui donnera la différence des températures extrêmes, lorsqu'on connoîtra la température de l'air dans la station supérieure, et les pressions barométriques dans les deux stations.

Je vais appliquer ces formules à des observations de dépression de l'horizon de la mer, que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque, avec le cercle répétiteur. Nos stations successives ont été : 1°. la laisse de basse mer, en plaçant le cercle sur le sable ; 2°. les divers étages et la terrasse d'une maison qui avoit vue sur la mer ; 3°. enfin la tour même de Dunkerque, dont la plate-forme, suivant les mesures de M. Delambre, est élevée de 61.754 mètres au-dessus de la laisse de basse mer. Pour avoir égard à l'effet du flux et du reflux, on mesuroit, au commencement et à la fin de chaque série, la hauteur de la mer avec une règle divisée en centimètres, et l'on prenoit la moyenne de ces deux résultats pour trouver l'élévation du centre du cercle sur la mer,

pendant la série. Toutes les hauteurs que je vais rapporter ont été conclues en ayant égard à cette précaution indispensable.

Dépressions de l'horizon de la mer observées le 26 *décembre* 1808, *la mer étant plus chaude que l'air.*

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente. *I'*.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V* (1).	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable.		Mètres.		Barom. = 0.7522.
1re série. 6 obs. .	4' 52"0	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 2°.
2e . . . 6 obs. .	4 57.4	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 4°.
Moyenne . .	4 54.7	0.610	1' 30"3	Tempér. de l'eau à la surf. 0°. Mer basse.
Sur l'estacade.				Barom. = 0.7514.
6 observations . .	7 4.0	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 3°.
6 observations . .	7 6.6	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 4.3.
Moyenne . .	7 5.3	7.475	5 16.1	Tempér. de l'eau à la surface — 0°2. La mer commence à monter.
Premier étage de la maison.				Barom. = 0.7506.
6 observations . .	8 8.9	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 4°
6 observations . .	7 57.9	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 5°.
Moyenne . .	8 3.4	13.455	7 3.7	Tempér. de l'eau, 0°. Mer un peu montante.
Troisième étage.				Barom. = 0.7495.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Therm. bar. = — 3.8.
6 observations . .	9 8.23	20.450	8 42.3	Therm. Air = — 5°.

(1) La valeur de V est calculée par la formule $tang.\ V = \sqrt{2s}$. Soit H la hauteur de l'observateur exprimée en mètres, a le rayon de la terre exprimé de la même manière, on aura $s = \frac{H}{a}$, et par conséquent $tang.\ V = \sqrt{\frac{2H}{a}}$. On peut supposer $a = 6366198$.

Dans toutes ces observations on remarque que la dépression apparente est toujours plus grande que la dépression vraie, calculée sans avoir égard à la réfraction; ce qui rend les valeurs totales de $m\varphi$ négatives. Cela prouve que la trajectoire est, au moins en partie, convexe vers la surface de la mer; résultat facile à prévoir, puisque, d'après les expériences thermométriques, la mer étoit ce jour-là plus chaude que l'air. On voit encore que l'excès de la dépression apparente diminue à mesure qu'on s'élève. Ainsi l'influence de la mer s'affoiblit avec la distance, et la courbure de la trajectoire doit changer avec la hauteur. Calculons donc les valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ entre les stations consécutives, pour connoître la loi de ces variations. En effectuant ce calcul on trouve:

Troisième étage-estacade. . . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = +0.15344 = \frac{1}{6.5}$

Premier étage-estacade . . . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = +0.16655 = \frac{1}{6.0}$

Estacade — laisse de basse mer . . $\frac{m\varphi}{4s} = -0.0142$

Les deux premiers résultats donnent des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ positives et à très-peu près égales. La moyenne seroit $\frac{m\varphi}{4s} = 0.16 = \frac{1}{6.25}$, qui diffère seulement de l'une ou de l'autre de $\frac{13}{1000}$. Ainsi, dans tout cet intervalle, la densité décroissoit sensiblement en progression arithmétique avec la hauteur, et le coefficient de la réfraction terrestre étoit égal à $\frac{1}{6.25}$ de l'arc. Cet intervalle étoit donc déjà soumis à la réfraction ordinaire, et il n'est

pas douteux que la même loi se maintenoit encore à de plus grandes hauteurs.

Mais au-dessous de cette limite $\frac{m\varphi}{4s}$ devient négative; ce qui indique une densité décroissante. Ainsi la trajectoire commence d'abord par être convexe vers la mer dans sa partie inférieure, et elle devient ensuite concave vers cette même surface. D'après la petitesse de la valeur négative de $\frac{m\varphi}{4s}$ on peut regarder la hauteur de l'estacade, ou 7.475 mètres, comme le point d'inflexion qui sépare les deux courbures.

Maintenant si l'on calcule la température de l'air à la surface de la mer, d'après les observations faites dans les deux stations, on trouve

	Différence des températures extrêmes calculée, ou $(t) - t$.	Température à l'observateur, ou valeur de t.	Température de l'air à la surface de la mer, ou valeur de (t), conclue.
Estacade.	+ 1°47	— 4°3	— 2.83
Sable	+ 0.851	— 4.0	— 3.15
Moyenne . . .	. . . .	. . . .	— 2.99

La légère différence que l'on trouve entre les valeurs de (t) peut venir de ce que le rayon visuel, dans les observations de l'estacade, touchoit la mer dans un endroit plus éloigné du port, par conséquent plus profond et moins couvert de glace que dans les expériences faites sur la laisse de basse mer. On voit encore ici ce que nous avons déjà remarqué page 33. La couche inférieure de

l'air ne prend pas toute la chaleur que la surface sur laquelle elle repose pourroit lui communiquer, et sa température est moindre que celle de cette surface.

Après avoir détaillé complètement cet exemple, je m'étendrai moins sur les suivans.

Dépressions de l'horizon de la mer, observées le 16 janvier 1809, la mer étant plus chaude que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable.		Mètres.		Baromètre = 0.7671.
6 observations. .	1′ 58″1	0.71	1′ 37″5	Therm. bar. = — 1.0.
10 observations. .	1 50.3	0.75	1 40.1	Therm. Air — 3°9.
Moyenne . .	1 54.2	0.73	1 38.8	Températ. de l'eau, 0°. Mer descendante.
Premier étage.				Baromètre = 0.7660.
8 observations. .	7 25.4	9.285	5 52.2	Therm. bar. = — 3.3.
8 observations. .	7 18.7	9.225	5 51.2	Therm. Air = — 5.0.
Moyenne . .	7 22.0	9.26	5 51.7	Mer presque étale.
Troisième étage.				Baromètre = 0.76582.
8 observations. .	8 53.6	16.37	7 47.8	Therm. bar. = — 4.0
8 observations. .	9 3.5	16.37	7 47.8	Therm. Air = — 5.0.
Moyenne . .	8 58.5	16.37	7 47.8	Au bord de la mer. Bar. =0.76625. Mer étale.
Terrasse.				Baromètre = 0.7645. Therm. bar. = — 5.0.
8 observations. .	9 42.3	21.07	8 50.7	Therm. Air = — 5.6. Mer étale.
Sur la tour.				Baromètre = 0.7614.
8 observations. .	14 35.0	62.354	15 13.0	Therm. bar. = — 4.9.
6 observations. .	14 25.2			Therm. Air = — 6.25.
Moyenne . .	14 30.1	62.354	15 13.0	Mer desc. Tempér. 0°.

Nous devons remarquer que les observations de la maison ont été faites les premières; on a été de-là sur le sable et ensuite sur la tour. Toutes ces observations calculées immédiatement donneroient des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ négatives, à l'exception de la dernière, dans laquelle la réfraction ordinaire surpasse beaucoup l'effet de la réfraction extraordinaire due à l'influence de la mer. En calculant les valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ pour les intervalles compris entre les stations consécutives, on trouve les résultats suivans:

Troisième étage-terrasse	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.113448 = \frac{1}{8.815}$
Troisième étage-tour	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.120030 = \frac{1}{8.333}$
Terrasse-tour.	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.121165 = \frac{1}{8.444}$
Valeur moyenne	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.118214 = \frac{1}{8.530}$

Tout cet intervalle est donc soumis à la réfraction ordinaire, et la densité y décroît de bas en haut, suivant une progression arithmétique; mais au-dessous de ces limites on trouve

Premier étage-troisième étage. . $\frac{m\varphi}{4s} = + 0.00213 = \frac{1}{500}$

et pour les stations plus basses la valeur de $m\varphi$ seroit négative. C'est donc ici que commence la réfraction extraordinaire. Le point d'inflexion des deux courbures se trouve placé entre le premier étage et le troisième, c'est-à-dire entre 9.26 mètres et 16.37; car en diminuant seu-

lement de 0.067 mètres la différence de niveau de ces deux stations, on y rendroit nulle la petite réfraction que nous venons de trouver égale à $\frac{1}{500}$.

En calculant par les observations inférieures la température de la couche d'air qui repose sur la surface de la mer, on obtient les valeurs suivantes :

STATIONS.	DIFFÉRENCE des températures extrêmes, ou valeur de $(t) - t$ calculée.	TEMPÉRATURE à l'observateur, ou valeur de t.	TEMPÉRATURE de l'air à la surface de la mer, conclue.
Troisième étage. . .	+ 1.04	— 5° 0	— 3.96
Premier étage . . .	+ 1.04	— 5.0	— 3.96
Sable. 1re observ. . .	+ 0.03	— 3.9	— 3.87
2e observ. . .	+ 0.02	— 3.9	— 3.88
Moyenne. . . .	. . . .	. . . .	— 3.92

L'accord des résultats de la dernière colonne entre eux montre assez l'exactitude des observations, et l'on voit encore ici que la couche d'air inférieure a une température plus basse que la surface de la mer.

Voici maintenant d'autres observations dans lesquelles la température de la surface de la mer étoit *plus froide* que celle de l'air. Elles donnent des résultats bien différens des précédentes.

Dépressions de l'horizon de la mer observées le 4 février 1809, la mer étant plus froide que l'air.

Vent S. S. O.; temps couvert, avec des éclaircis, le soleil se montrant par intervalle; horizon souvent très-net et très-bon à observer.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètres.		Barom. = 0.7524 à la station. Therm. barom. = 12.4. Therm. Air + 10.15. Mer montante. Barom. = 0 75345 au bord de la mer. Therm. barom. = 12 5. Therm. Air. + 9.6. Température de l'eau à la surface + 7.7.
8 observations . .	+ 5′ 0″ 5	10.54	6′ 15″3	
8 observations . .	4 40.6	10.06	6 6.7	
Sur le sable.				Baromètre = 0.7529. Therm. bar. = 11.3. Therm. Air. Première série + 8.6. Therm. Air. Seconde série + 9.0.
8 observations . .	— 0 22.9	0.77	+ 1 41.4	
8 observations . .	— 0 21.4	0.77	+ 1 41.4	
La dépression étant négative, l'horizon apparent étoit au-dessus du plan horizontal mené par l'œil de l'observateur; d'où il suit que l'on voyoit par une seconde branche dont le *maximum* étoit au-dessus du niveau de l'observateur. L'horizon apparent étoit sans vagues et bien terminé.				
Premier étage.				Baromètre = 0.7521. Therm. bar. = + 12.0. Therm. Air = 9.6. La mer commence à descendre.
8 observations . .	+ 4 22.5	9 0.9	5.48.6	

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Troisième étage.		Mètres.		Baromètre = 0.75165.
8 observations . .	6′25″8	16.23	7′45″7	Therm. bar. = 11.3. Therm. Air + 9.4. Mer descendante.
Terrasse.				Baromètre = 0.7513.
8 observations . .	7 27.4	20.91	8 48.6	Therm. bar. = + 11. Therm. Air = + 8.9.
8 observations . .	7 28.2	20.95	8 48.6	Au bord de la mer. Dans le port + 8.2.
Sur le chenal.				Baromètre = 0.7530.
6 observations . .	+ 1 35.7	2.66	3 8.5	Therm. bar. = 11. Therm. Air = + 8.55.
8 observations . .	1 41.6	2.78	3 12.7	Temp. de l'eau = + 7.7. Mer descendante. Horizon excellent et parfaitement terminé dans ces deux séries.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7529.
8 observations . .	+ 0 26.9	0.77	1 41.4	Therm. bar. = + 9.8. Therm. Air + 8.6. Tempér. de l'eau + 7.7. Mer descendante depuis long-temps.

Dans toutes ces expériences la mer étoit *plus froide* que la couche d'air qui reposoit sur sa surface ; aussi la réfraction a-t-elle été extraordinairement forte. En calculant directement chacune des dépressions observées, on trouve pour $\frac{m\varphi}{4s}$ les valeurs suivantes que nous réunissons dans un même tableau pour pouvoir les comparer plus facilement.

Au premier étage. Première série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}179295$;	$as = 10^{m}54$.	Mer fortement montante. Hor. bien tranché.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}210295$;	$as = 10{\cdot}06$.	Mer montante.
Troisième série Au retour	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}216343$;	$as = 9{\cdot}09$.	Mer presque étale. Elle commence à desc.
Sur le sable. Première et seconde série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} > 0{\cdot}5$;	$as = 0{\cdot}77$.	Mer fortement montante.
Au troisième étage. Première série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}157008$;	$as = 16{\cdot}23$.	Mer descendante.
Sur la terrasse. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}141741$;	$as = 20{\cdot}91$.	Mer descendante.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}141388$;	$as = 20{\cdot}95$.	Mer descendante.
Sur le chenal. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}371202$;	$as = 2{\cdot}66$.	Mer descendante plus fortement.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}361098$;	$as = 2{\cdot}78$.	Mer descendante plus fortement.
Sur le sable. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0{\cdot}464583$;	$as = 0{\cdot}77 +$	

Ces observations indiquent que la valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$ n'est point constante pour ces diverses hauteurs, et qu'elle va en diminuant à mesure que la hauteur augmente.

Cet effet n'est point dû à la forme que prend la mer lorsqu'elle monte ou lorsqu'elle descend ; car les dépressions observées sur le chenal et sur le sable donnent des réfractions très-fortes, soit que la mer monte, soit qu'elle descende.

L'accroissement extraordinaire de $\frac{m\varphi}{4s}$ paroît n'avoir lieu que jusqu'à une certaine hauteur peu différente de celle du premier étage, c'est-à-dire de 9 ou 10 mètres ;

car en combinant les observations faites au-dessus de cette hauteur $\frac{m\varphi}{4s}$ devient à peu près constant. En effet on trouve

Premier étage (3e série) — 3e étage .	$\frac{m\varphi}{4s} = 0.08147 = \frac{1}{12.27}$
Premier étage (*Idem*) . . . terrasse. .	$\frac{m\varphi}{4s} = 0.08456 = \frac{1}{11.82}$
Moyenne	$\frac{m\varphi}{2s} = 0.08301 = \frac{1}{12.04}$

Ces deux valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ sont assez peu distantes l'une de l'autre et de leur valeur moyenne pour que leur écart puisse être attribué aux erreurs des observations. On doit en conclure qu'au-delà du premier étage la densité de l'air décroissoit suivant une progression arithmétique, comme cela a lieu ordinairement. Mais au-dessous de cette hauteur la variation de la densité étoit beaucoup plus rapide; car en combinant, par exemple, les observations du premier étage avec celles qui ont été faites sur le chenal, on en tire $\frac{m\varphi}{4s} = 0.15202 = \frac{1}{6.5}$ plus forte que les précédentes. C'est donc aussi pour cela qu'au commencement des expériences, en se plaçant très-près de la surface de la mer, la réfraction étoit assez forte pour donner un *maximum* par en haut. D'après les rapprochemens que nous venons de faire il est évident que tous ces phénomènes résultent de ce que la température de la mer étoit plus basse que celle de l'air.

La vision par des secondes branches, lorsqu'on observe l'horizon apparent de la mer, étoit un phénomène

fort curieux à constater, nous avons cherché l'occasion de la répéter. Elle s'est présentée le lendemain même des observations précédentes; car, suivant l'expérience que nous en fîmes, la température de la mer étoit encore plus froide que celle de l'air. Malheureusement le nombre de degrés indiqué par le thermomètre dans cette expérience ayant été perdu, nous pouvons seulement assurer que la différence étoit certainement dans le sens que nous indiquons ici. En conséquence nous nous transportâmes à diverses places sur la laisse de basse mer, et nous fîmes les observations suivantes :

Dépressions de l'horizon apparent de la mer, observées le 5 février 1809, la mer étant plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Dans le chenal, sur le sable. 4 observations . .	— 6″06	Mètres. 0.71	+ 1′37″5	Baromètre = 0.7513. Therm. bar. 12.0. Therm. Air + 8.6. Mer plus froide que l'air; montante fortement.
Après cette observation il est tombé de la pluie. On a recommencé, une heure après, dans une autre place.				
Sur le sable.				Baromètre = 0.7509. Therm. bar. = + 10.9. Therm. Air = + 8.5.
1re série. 6 observ.	— 11″34	0.66	1′ 34″8	
2e . . . 6 observ.	— 16.99	0.64	1 33.2	

Toutes ces observations indiquent que la vision se faisoit par une seconde branche dont le *maximum* étoit

au-dessus du niveau de l'observateur. Quoique les observations du 4 février indiquassent clairement que l'effet étoit indépendant de la forme de la mer montante, on voulut encore en faire une nouvelle épreuve. On retourna donc le lendemain matin au bord de la mer, lorsqu'elle descendoit encore, et bien long-temps avant qu'elle commençât à monter on fit les observations suivantes.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 6 février 1809, la mer étant plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable. 1re série. 8 observ.	+0'47"88	Mètres. 0.77	1' 41" 4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.2. Température de la mer près de la surface + 6.5.
2e . . . 8 observ.	0 27.11	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.2.
3e . . . 8 observ.	0 13.57	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.7.
4e . . . 8 observ.	0 33.50	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air + 9.0.

L'horizon étoit parfaitement net, bien tranché et sans ondulations. Toutes les observations faites à la mer des-

cendante donnent des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ extrêmement fortes, car on trouve :

Première série. La mer. . . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.42731$

Seconde série . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.47700$

Troisième série. . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.49382$

Quatrième série . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.45912$

Moyenne des quatre séries . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.46432$

En remarquant les petites différences qui existent entre ces valeurs, il ne faut pas oublier qu'il suffit d'un rayon de soleil ou d'un coup de vent un peu plus chaud ou un peu plus froid pour changer considérablement la la valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$.

Toutes ces observations ayant été faites à la mer descendante, il est impossible d'attribuer la grande valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$ à une autre cause qu'à ce que la température de la mer étoit plus froide que celle de l'air, ainsi que cela avoit eu lieu dans les jours précédens. Quant à la forme de la mer, les circonstances étoient les mêmes que dans les observations du 26 décembre 1808, qui avoient donné des dépressions si fortes. La place où nous observions étoit la même aussi; mais dans les observations du 26 décembre la mer étoit plus chaude que l'air de plusieurs degrés.

Quelques jours après les observations précédentes le temps changea; l'air devint plus froid que la mer, et nous

en profitâmes pour observer de grandes dépressions. La cause qui rendoit la dépression forte ou foible nous étoit si familière que nous pouvions facilement reconnoître les circonstances favorables à l'observation et prévoir le résultat que nous devions obtenir; il suffisoit pour cela de comparer le thermomètre plongé dans l'air avec le thermomètre plongé dans la mer.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 8 *février* 1809. *Mer plus chaude que l'air.*

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètres.		Baromètre = 0.7604. Therm. bar. = + 3.0 Therm. Air = + 1°. Sur le bord de la mer. Barom. = 0.7620. Therm. bar. = + 3°. Temp. de l'eau = + 4°. Mer basse, presque au *minimum*.
6 observations . .	8′ 50″4	13.66	7′ 7″3	
6 observations . .	8 39.7	13.66	7 7.3	
Moyenne . .	8 45.1	13.66	7 7.3	
Sur le sable.				
8 observations . .	2 1.0	0.75	1 40.1	Baromètre = 0.7603. Therm. bar. = ... Therm. Air à hauteur d'homme + 0.6. — Près du sable + 1.5. Horizon chargé de vagues et difficile à observer. Mer montante.
6 observations . .	1 42.0	0.75	1 40.1	Baromètre = 0.7603. Therm. bar. = ... Therm. Air à hauteur d'homme + 1°. — Près du sable + 1.6. Mer montante.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage, au retour.		Mètres.		Baromètre = 0.7595. Therm. bar. = + 3.8. Therm. Air = + 0.85. Tempér. de l'eau + 4°. Mer montante.
8 observations . .	7′ 7″4	12.01	6′ 40″7	
8 observations . .	7 27.4	12.01	6 40.7	
Moyenne . .	7 17.4	12.01	6 40.7	
Troisième étage.				Baromètre = 0.7584. Therm. bar. = + 4°. Therm. Air = + 1.35. Mer fortement montante.
8 observations . .	8 48.7	18.295	8 14.5	
8 observations . .	8 19.7	18.125	8 12.2	
Moyenne . .	8 34.20	18.21	8 13.4	

Dans toutes ces observations qui ont été faites à la mer montante, on remarque une dépression de l'horizon plus grande que la dépression vraie. Ce n'est donc point la forme de la mer montante qui occasionne les grandes élévations de l'horizon observées dans les jours précédens.

Ici la mer étoit plus chaude que l'air. C'est la cause de l'excès de la dépression observée. La température de la mer est restée sensiblement la même dans tout l'intervalle des observations; mais celle de l'air, qui étoit d'abord à — 0.5, s'est élevée graduellement jusqu'à + 1.4 avec la marche du jour. La dépression a donc dû diminuer, comme on le remarque dans les observations faites sur le rivage et au premier étage, avant et après le retour.

Si l'on calcule le coefficient de la réfraction par les dépressions précédentes, on trouvera que la réfraction négative s'élève à peu près jusqu'au premier étage, c'est-

à-dire à 10 ou 12 mètres, car en combinant les observations du premier avec celles du troisième, on trouve encore pour $\frac{m\varphi}{4s}$ une valeur fort petite, mais positive, qui est $0.058998 = \frac{1}{16.95}$. Au-dessous de cette hauteur $\frac{m\varphi}{4s}$ deviendroit négatif.

Quelques jours après les expériences précédentes le temps changea de nouveau ; la mer redevint plus froide que l'air, et l'on en profita pour observer de très-petites dépressions de l'horizon apparent.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 10 février 1809. Mer plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètr.		Baromètre = 0.7483.
1re série. 8 observ.	4′ 58″1	11.97	6′ 39″8	Therm. bar. = + 10.2.
2e . . . 8 observ.	5 9.0	12.09	6 41.8	Therm. Air = + 9.8.
Moyenne . .	5 3.5	12.03	6 40.8	Température de l'eau + 5°5. Mer descendante.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7497.
1re série. 8 observ.	− 1 17.94	0.77	+ 1 41.4	Therm. bar. = + 13.7.
2e . . . 8 observ.	− 1 19.99	0.77	1 41.4	Therm. Air = + 11.55
Moyenne . .	− 1 18.96	0.77	1 41.4	Mer déjà très-basse, mais descendant encore très-sensiblement. Horizon excellent, sans ondulations et sans vagues. Proximité de la pluie.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage, au retour.		Mètr		Baromètre = 0.74810. Therm. bar. = + 12. Therm. Air = + 8.75. Mer presque au *minimum*; horizon superbe; observations faites entre des intervalles de pluie.
1re série. 8 observ.	+5′ 33″ 21	13.22	7′ 0″4	
2e . . . 8 observ.	5 36.86	13.22	7 0.4	
Moyenne . .	5 35.03	13.22	7 0.4	
Troisième étage.				Baromètre = 0.7471. Therm. bar. = + 10.9. Therm. Air = + 8.75. Mer sensiblement au *minimum*; bon horizon. Tempér. de l'eau dans le port + 4°6.
1re série. 8 observ.	7 5.7	20.38	8 41.9	
2e . . . 8 observ.	6 51.6	20.38	8 41.9	
Moyenne . .	6 58.6	20.38	8 41.9	
Sur la tour.				Baromètre = 7437. Therm. bar. = + 13°. Therm. Air = + 10.4. Mer déjà bien descendue.
1re série. 6 observ.	12 51.8	60.32	15 9.3	
2e . . . 8 observ.	12 58.8	60.32	15 9.3	
Moyenne . .	12 55.3	60.32	15 9.3	

On voit dans ces observations que la réfraction a toujours été positive et extraordinairement forte. Aussi la mer étoit-elle plus froide que l'air de plusieurs degrés. Si l'on calcule immédiatement les dépressions observées dans les stations les plus basses, on trouve

Premier étage. La mer . . . . $\frac{m\phi}{4s} = 0.20456$

Le sable . . . . $\frac{m\phi}{4s} => 0.5$

Premier étage, au retour. . . . . . . $\frac{m\phi}{4s} = 0.29863$

Ces réfractions sont extrêmement fortes. Maintenant

si l'on combine les observations consécutives on trouve

Premier étage et troisième	$\frac{m\varphi}{4s}$	$= 0{\cdot}17067$
Troisième étage et tour.	$\frac{m\varphi}{4s}$	$= 0{\cdot}12082$

La diminution du coefficient de la réfraction étoit donc encore sensible au-dessus du troisième étage, c'est-à-dire au-dessus de 12 mètres. Ainsi ce jour-là la trajectoire étoit toute concave vers la surface de la mer; mais sa courbure étoit beaucoup plus rapide dans les stations inférieures, à cause de l'influence de cette surface.

Dans les expériences que je viens de rapporter on voit que les rayons lumineux menés dans l'atmosphère sous des inclinaisons très-petites, éprouvent en s'approchant de la surface terrestre des perturbations considérables produites par l'influence de cette surface sur la température des couches inférieures de l'air. Cette influence s'affoiblissant avec la distance, devient ordinairement insensible à une petite hauteur au-dessus de laquelle la densité de l'air décroît régulièrement en progression arithmétique; ce qui donne aux rayons une courbure dirigée vers la surface terrestre. Mais, dans la partie inférieure, la trajectoire peut être plus ou moins concave ou convexe, selon la température du sol : elle peut ainsi éprouver dans son cours plusieurs inflexions successives; et, contre l'usage généralement reçu par les astronomes, il arrivera bien rarement que la courbure déterminée dans la partie supérieure soit encore applicable aux plus petites hauteurs.

De là résultent plusieurs conséquences utiles. La première concerne les marins. Lorsqu'ils prennent hauteur

en se servant de l'horizon de la mer, ils doivent souvent éprouver les effets de ces réfractions extraordinaires, et pour peu que la mer soit plus froide ou plus chaude que l'air, ils peuvent aisément avoir sur leur latitude des erreurs de 3 ou 4 minutes. Par les mêmes causes la latitude observée à bord d'un canot pourra différer très-sensiblement de la latitude observée sur le pont d'un bâtiment élevé. Cela est arrivé plusieurs fois à la Nouvelle-Hollande, dans l'expédition du capitaine Baudin, sans que l'on pût se rendre raison d'une pareille discordance, et malgré tous les soins que l'on prenoit pour l'éviter. M. Wollaston a proposé un moyen d'y remédier en observant la distance des deux horizons opposés, ce qui détermine en effet la réfraction au moment où l'on observe ; mais on n'a pas toujours la possibilité de faire cette observation, principalement dans les attérages où cependant la nécessité d'une latitude exacte est la plus grande. Dans tous les cas, il suffit d'observer la température de l'air et celle de la mer, pour savoir dans quel sens doit se trouver l'erreur que l'on peut avoir à redouter. Mais lorsqu'on est à terre il existe un moyen constant et toujours applicable pour les éviter, c'est d'observer avec un horizon artificiel placé à 3 ou 4 mètres de hauteur ; car l'effet du décroissement extraordinaire des densités étant déjà fort affoibli à cette élévation, et le plus souvent insensible, le rayon visuel n'a plus à parcourir que des couches soumises à la loi ordinaire des réfractions.

On sent également que les mêmes causes doivent altérer les hauteurs des stations calculées d'après la dé-

pression apparente de l'horizon de la mer; car si la mer est plus chaude que l'air, auquel cas la partie inférieure de la trajectoire sera concave vers la surface terrestre, la dépression observée sera plus grande que dans l'état ordinaire de l'atmosphère. Par conséquent la hauteur calculée d'après la réfraction moyenne sera trop forte; ce sera le contraire si la mer est plus froide que l'air. Pour mettre ceci en évidence nous avons calculé ainsi les hauteurs des stations où nous avons observé à Dunkerque, en employant pour le coefficient de la réfraction terrestre la valeur moyenne 0.08 donnée par M. Delambre dans le second volume de la *Méridienne*. Voici le tableau de ces résultats :

26 *décembre* 1808. *Mer plus chaude que l'air.*

STATIONS.	DÉPRESSION apparente observée.	HAUTEUR calculée.	HAUTEUR mesurée.
		Mètres.	Mètres.
Sur le sable	4′ 54″7	7.69	0.61
Sur l'estacade	7 5.3	15.99	7.47
Premier étage	8 3.4	20.65	13.45
Troisième étage	9 8.2	26.56	20.45

16 *janvier* 1809. *Mer plus chaude que l'air.*

STATIONS.	DÉPRESSION apparente observée.	HAUTEUR calculée.	HAUTEUR mesurée.
Sur le sable	1 54.2	1.15	0.73
Premier étage	7 22.0	17.23	9.26
Troisième étage	8 58.5	25.63	16.37
Terrasse	9 42.3	29.97	21.07
Sur la tour	14 30.0	66.90	62.35

Toutes ces observations donnent des hauteurs beaucoup trop fortes; en voici d'autres qui ont été faites lorsque la mer étoit plus froide que l'air. Elles donnent des hauteurs beaucoup trop foibles.

4 *février* 1809. *Mer plus froide que l'air.*

STATIONS.	DÉPRESSION apparente observée.	HAUTEUR calculée.	HAUTEUR mesurée.
		Mètres.	Mètres.
Sur le sable	0' 26" 9	0.06	0.77
Sur le port	1 38.6	0.69	2.72
Premier étage	4 22.5	6.09	9.09
Troisième étage	6 25.8	13.15	16.23
Terrasse.	7 27.8	17.72	20.95
10 *février* 1809. *Mer plus froide que l'air.*			
Premier étage	5 3.5	8.14	12.03
Troisième étage	6 58.6	15.49	20.38
La tour	12 55.3	53.13	60.32

La différence entre les hauteurs mesurées et calculées varie avec l'élévation de la station au-dessus du niveau de la mer. Pour bien connoître la cause de cette variation reprenons la formule

$$2\,s = m\varphi + (tang^2.\ I' - tang^2.\ I).\ cos^2.\ I$$

Supposons que la station inférieure I réponde à la limite où commence la réfraction extraordinaire, en sorte que

dans toutes les couches supérieures la densité décroisse en progression arithmétique. Soit $s_{,}$ la hauteur de cette station inférieure au-dessus du niveau de la mer, I étant la dépression en ce point, on aura

$$2\, s' = m_{,}\varphi_{,} + tang^2.\, I$$

Cette équation ajoutée à la précédente donne

$$2\,(s + s_{,}) = m\varphi + m_{,}\varphi_{,} + tang^2.\, I'.\, cos^2.\, I + tang^2.\, I.\, sin^2.\, I$$

Les produits $tang^2.\, I'.\, sin^2.\, I$ et $tang^2.\, I.\, sin^2.\, I$ peuvent être négligés sans aucune erreur sensible dans les petites hauteurs où s'arrête ordinairement la densité extraordinaire. De plus, en nommant q le coefficient de la réfraction terrestre entre les deux stations, et $q_{,}$ la quantité analogue, depuis la station inférieure jusqu'au niveau de la mer, on a

$$m\varphi = 4\, sq;\quad m_{,}\varphi_{,} = 4\, s_{,}q_{,}$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$2\,(s + s_{,}) = 4\, sq + 4\, s_{,}q_{,} + tang^2.\, I'$$

d'où l'on tire

$$s + s_{,} = \frac{\frac{1}{2}\, tang^2.\, I'}{1 - 2\,q} - \frac{2\,(q - q_{,})\, s_{,}}{1 - 2\,q}$$

$s + s_{,}$ est la hauteur de la station supérieure au-dessus du niveau de la mer. Le premier terme $\frac{\frac{1}{2}\, tang^2.\, I'}{1 - 2\,q}$ donne la hauteur telle qu'on la trouveroit en la calculant im-

médiatement d'après la dépression observée, et telle qu'elle seroit en effet si le décroissement en progression arithmétique s'étendoit jusqu'au niveau de la mer. Le second terme en $s_{,}$ donne la correction qu'il faut faire à ce premier calcul, à cause du décroissement extraordinaire des densités qui a lieu jusqu'à la hauteur $s_{,}$. On voit que, pour un même état de l'air, la correction est constante à toutes les hauteurs, et l'on peut aisément vérifier ce résultat sur les dépressions que nous avons rapportées. Par exemple, le 16 janvier l'erreur du premier terme est constamment égale à 12.38 mètres, soit qu'on la calcule sur la tour, la terrasse ou le troisième étage de la maison. Mais pour obtenir cette constante il faut employer dans le calcul la véritable valeur de q telle que les observations la donnent pour le jour où l'on observe; sans cela les erreurs du premier terme, qui sont variables avec la hauteur, masquent la variabilité du second. C'est ce qui est arrivé dans les hauteurs calculées précédemment, en prenant pour q la valeur moyenne 0.08 qui est donnée par M. Delambre. Par exemple, dans les observations du 16 janvier on avoit réellement $q = 0.118214$. Le dénominateur $1 - 2q$ étoit donc réellement 0.763572 au lieu de 992 que nous avons supposé. L'emploi de cette valeur, en affoiblissant le premier terme, diminuoit son erreur propre, et d'autant plus que I' étoit plus considérable. C'est pourquoi les hauteurs ainsi calculées s'écartent de moins en moins des véritables à mesure que l'on s'élève depuis le bord de la mer jusqu'à la tour. Un peu au-dessus de cette

dernière le calcul auroit été d'accord avec l'observation, mais en s'élevant davantage, l'erreur produite par le coefficient q l'auroit emporté sur la correction du second terme; et les hauteurs seroient devenues trop foibles, de trop fortes qu'elles paroissoient précédemment.

La cause que nous venons d'indiquer ici a dû nécessairement agir avec une intensité plus ou moins grande dans les nombreuses observations de la mer que MM. Méchain et Delambre ont consignées dans le IIe volume de la Méridienne; mais le défaut d'observations thermométriques aux deux extrémités de la colonne d'air ne permet pas de tirer parti de ces observations. On peut néanmoins, dans certains cas extrêmes, montrer évidemment la source des erreurs qu'elles comportent. Ainsi l'observation de dépression faite à Montalet devoit nécessairement donner une trop forte hauteur, et c'est ce qui est arrivé.

On doit encore attribuer à l'inégalité des températures et à la rapidité de leur décroissement, un phénomène observé par Cook, dans l'hémisphère austral, le 30 janvier 1774. « On découvrit le matin une île de glace » qui s'étendoit à l'est et à l'ouest, à une telle distance » qu'on n'en voyoit pas les limites du haut des mâts. » De loin cette île paroissoit très-haute et semblable » à une masse solide, avec des parties montueuses très- » élevées, dans l'intérieur. Mais quand on s'en fut » approché, on trouva que le bord, qui auparavant » paroissoit à pic et formé d'une seule masse, dépassoit » à peine le niveau de la mer, et étoit formé de petits » morceaux de glace, parmi lesquels il s'en trouvoit

» d'autres un peu plus considérables. On apercevoit en-
» core des parties montueuses plus loin dans l'intérieur,
» mais c'étoit probablement aussi une illusion causée par
» la grande force réfringente de l'atmosphère près de
» l'horizon dans ces froides contrées ». Cette conjecture me paroît très-vraisemblable, car suivant le journal tenu à bord de la *Résolution*, le thermomètre dans l'air étoit ce matin-là précisément à la température de la glace fondante. Il est donc bien probable que la surface de la glace avoit une température plus basse que celle de l'air, alors les parties de cette surface les plus éloignées du bâtiment ont pu devenir visibles par de secondes branches qui avoient leur *maximum* au-dessus du niveau de l'observateur, et cet effet qui n'avoit lieu que sur la glace, devoit élever en apparence son bord au-dessus du niveau de la mer. C'est ainsi que dans des cas semblables nous avons vu à Dunkerque l'horizon apparent de la mer au-dessus du plan horizontal mené par notre œil. Dans l'observation de Cook l'horizon apparent étoit terminé par des rayons venus de la surface de la glace, et c'étoit sans doute par cette élévation extraordinaire des trajectoires que le plateau de glace sembloit se prolonger au-delà des limites de l'horizon. Quant aux parties montueuses, elles pouvoient être produites en parties par des élévations réelles, ou par des portions d'îles de glaces plus éloignées que la première et qui devenoient visibles au-dessus d'elles par des trajectoires plus élevées.

C'est sans doute par une cause tout-à-fait semblable que, dans l'opération de la méridienne en France, le

clocher de Sauti, placé au milieu des bois, se voyoit de très-loin et indiquoit toujours une forte réfraction. Les observations se faisoient dans l'été, et la fraîcheur des bois refroidissant les couches d'air situées au-dessus de leur surface devoient produire absolument le même effet que l'île de glace dans l'observation de Cook.

Le 31 décembre 1773, Cook avoit observé dans les mêmes parages un phénomène analogue, « tandis qu'on » prenoit la hauteur méridienne du soleil une averse de » neige vint de l'est et passa devant le vaisseau. En même » temps une grande île de glace qui se trouvoit bien en » deçà de l'horizon visible et directement sous le soleil, » fut entièrement cachée par cet horizon qui pourtant » paroissoit tout aussi distinct qu'il a coutume de l'être » dans des temps nébuleux. Quand l'averse fut passée » on revit l'île de glace en deçà de l'horizon comme aupa- » ravant. Le thermomètre de l'air marquoit + 1.7 de la » division centésimale ». Il est extrêmement probable que la neige venant des régions supérieures de l'atmosphère, avoit une température beaucoup plus froide, et l'abaissement subit que sa chute produisoit dans les couches d'air inférieures situées entre le vaisseau et l'île, peut avoir été la cause d'une réfraction extraordinaire qui aura rendu visibles par en haut et par une seconde branche, des points de la surface de la mer situés en avant de l'île de glace. Ce qui confirme cette conjecture, c'est qu'après l'averse, le disque du soleil ne se trouva plus en contact avec l'horizon apparent, et encore moins avec le sommet de l'île de glace, dans la lunette du

sextant avec lequel on prenoit hauteur. Il fallut abaisser ce disque d'une quantité égale à son diamètre, c'est-à-dire de 32′ pour le faire toucher au sommet de l'île, qui devoit être encore plus bas que l'horizon extraordinaire. Par conséquent cet horizon en se formant s'étoit élevé tout à coup de plus de 32′ au-dessus du véritable, et comme la dépression ordinaire à bord de la *Résolution* n'étoit que de 4′.2″, il n'est pas douteux que l'horizon extraordinaire s'élevoit au-dessus du plan horizontal des observateurs, d'où il suit qu'il étoit vu par des secondes branches de trajectoire qui avoient un *maximum* au-dessus de ce même plan.

En général, Cook remarque qu'il a eu souvent, dans ces hautes latitudes, l'occasion d'observer l'effet des réfractions extraordinaires en prenant des hauteurs au-dessus de l'horizon de la mer avec le sextant de Halley. Il attribue à cette cause, et aux variations arrivées des réfractions terrestres, la différence qu'il a constamment trouvée entre les longitudes observées le matin et le soir. Des écarts semblables se sont présentés dans la dernière expédition du capitaine Baudin à la Nouvelle Hollande, et sans doute elles étoient dues aux variations subites et multipliées de la température dans ces parages. Si maintenant nous venons à donner aux rayons lumineux une marche serpentante, ce qui peut avoir lieu dans l'atmosphère, comme nous l'avons précédemment prouvé par le raisonnement et par des expériences, nous verrons naître de ces inflexions une foule de phénomènes d'optique aussi curieux que variés. Pour nous borner ici à un

cas très-simple, concevons deux états opposés de l'air, tels que dans les couches inférieures la trajectoire soit convexe vers la mer tandis qu'à une certaine hauteur elle devient concave, ce dont nous avons déjà rapporté plusieurs exemples. Supposons de plus que cette seconde réfraction, qui se fait dans le sens ordinaire, soit assez forte pour donner aux trajectoires un *maximum* par en haut, ce dont nous avons également reconnu la possibilité; alors il arrivera que des objets naturellement cachés par la rondeur de la terre, et même invisibles dans les cas les plus forts de la réfraction ordinaire, pourront être aperçus au moyen de ces courbes serpentantes, comme le représente la *fig.* 23, où O est l'observateur et M l'objet. Il arrivera même qu'étant vus de cette manière ils paroîtront très-élevés au-dessus de l'horizon de l'observateur et par conséquent très-rapprochés de lui; car si, par le point M par exemple, on mène une circonférence de cercle MM' concentrique à la terre, et terminée à la dernière branche de la trajectoire, l'objet M sera comme s'il étoit rapproché à la distance AD' en conservant toujours sa même hauteur. On a beaucoup d'exemples de ces élévations extraordinaires des objets lointains, et l'on en trouve même un fort remarquable dans les *Transactions philosophiques* pour 1798. Du bord de la mer à Hastings on voyoit distinctement la côte de France à la distance de 30 ou 40 milles, et du haut d'une colline on voyoit jusqu'à Dieppe les bateaux de pêcheurs français. Je ne donne ici la double réflexion des rayons que comme un moyen de produire ces apparitions extraordi-

naires ; mais elles pourroient l'être encore de beaucoup d'autres manières, et même par un simple accroissement de la réfraction ordinaire dans les petites inclinaisons, en supposant l'air plus chaud que la mer, seulement de quelques degrés, comme le prouvent les expériences que j'ai rapportées plus haut. Cela conviendroit particulièrement à l'observation rapportée dans les *Transactions philosophiques ;* car l'observateur, M. Latham, remarque que le jour avoit été extraordinairement chaud et parfaitement calme. Malheureusement il ne rapporte pas les températures de l'eau et de l'air qui suffiroient pour décider la question.

Si ces réfractions extraordinaires, produites par les inflexions des trajectoires, agissoient aussi latéralement dans le sens horizontal, leur influence jeteroit des incertitudes continuelles sur les opérations géodésiques. Heureusement nous avons eu l'occasion de nous assurer que cette influence est absolument nulle, du moins par les temps calmes ; car les angles de position entre les objets, observés par Arago et moi, dans les cas les plus marqués de la réfraction extraordinaire, ne diffèrent pas du tout de ceux que nous avons trouvés entre les mêmes objets dans d'autres circonstances où l'atmosphère étoit assujettie aux lois ordinaires d'équilibre. La différence n'a pas été d'une seconde, même dans le cas des images multiples observées au Desierto par Arago et moi, et depuis par lui seul à Cullera. Mais je suis très-porté à croire qu'il peut se produire des réfractions latérales quand l'atmosphère est violemment agitée ; car M. Delambre rapporte qu'il a vu

une fois un signal passer d'un côté à l'autre du fil vertical de sa lunette et se tenir quelques instans dans cette position. Dans l'été lorsque l'on observe des objets éloignés terminés par des lignes droites verticales, par exemple, des maisons ou des clochers, on voit fréquemment ces lignes éprouver des ondulations qui les font serpenter autour du fil de la lunette ; et nous avons vu, Arago et moi, un cas très-frappant à l'île de Formentera, et observant une chapelle située dans l'île d'Yviza. Or, que sont ces ondulations, sinon des réfractions latérales produites par l'agitation de l'air ? Ainsi dans les opérations géodésiques très-exactes, il sera toujours utile d'éviter même le soupçon d'une pareille influence ; et l'on y parviendra en choisissant pour stations des montagnes élevées, et assez peu distantes pour que les rayons visuels menés de l'une à l'autre restent toujours fort au-dessus du niveau des plaines qui les séparent. Nous avons eu cet avantage dans nos opérations d'Espagne, car même dans les côtés de notre grand triangle la corde de l'arc terrestre passoit à plusieurs centaines de mètres au-dessus du niveau de la mer. Et si cette élévation ne nous a pas empêché d'avoir des réfractions extraordinaires, du moins nous sommes assurés par là qu'elles ne sont pas dues à l'influence du sol, mais à un état particulier de superposition des couches d'air ; état qui ne pouvant constituer un équilibre stable, et devant ainsi céder à la cause de mouvement la plus légère, ne peut absolument exister que dans un calme parfait de l'atmosphère, et par conséquent dans des cas où les réfractions latérales ne sont nulle-

ment à craindre. Mais il n'en a pas été de même dans la partie de la méridienne qui traverse la France : on a été souvent obligé d'y prendre pour stations des clochers, des tours ou des collines peu élevées. Alors les rayons visuels, menés d'une station à l'autre, ont fréquemment rasé la surface du sol, dans les grands froids de l'hiver et dans les grandes chaleurs de l'été. C'est-là sans doute la cause qui produit des variations si excessives dans les coëfficiens de la réfraction terrestre que Delambre a calculés d'après ces observations. Au lieu que ces variations auroient été beaucoup moins sensibles si les rayons visuels eussent échappé à l'influence du sol. D'après ces remarques, il me semble que l'on ne peut attribuer qu'une foible confiance au nivellement de l'Océan et de la Méditerranée, conclu de toutes les mesures de distances réciproques faites sur l'arc qui va de Montjouy à Dunkerque. Car on ne sauroit, dans cette circonstance, compter sur une compensation mutuelle des erreurs, puisque cette compensation n'est favorable à l'exactitude que dans les résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et non pas dans la somme des observations mêmes, qui comporte toujours une erreur du même ordre au moins que celles qui affectent en particulier chaque observation.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la marche individuelle de chaque trajectoire, et les inflexions diverses dont elle est susceptible. Il faut maintenant passer à l'examen de leurs intersections successives afin d'en déduire la forme des caustiques et le nombre des images qui peuvent en résulter.

Sous ce rapport nous avons peu de chose à ajouter aux considérations que nous avons exposées précédemment en traitant des couches planes. La courbure de la terre ne fait qu'ajouter un terme à celui qui dépend de la différence des températures, et ce terme très-foible par lui-même, n'a plus d'effet sensible dès que la différence des températures est un peu considérable. D'où l'on peut conclure que dans le très-grand nombre des cas il n'influera point sur la forme générale des caustiques, mais seulement sur les détails particuliers à chaque loi de décroissement, détails que nous ne saurions déterminer ici, puisqu'ils sont aussi variés que ces lois elles-mêmes.

D'après les principes établis dans le IV[e] volume de la *Mécanique céleste*, pour le cas des couches sphériques, si l'on nomme (ϱ) la densité de l'air au point où est situé l'observateur, θ la distance au zénith observée en ce même point, ϱ la densité de l'air au point où l'objet se trouve sur une première branche des trajectoires et au-dessus du niveau de l'observateur; si, de plus, on nomme a et r les rayons menés du centre de la terre à l'observateur et à l'objet, l'équation générale d'une première branche des trajectoires sera

$$dv = \frac{\frac{a.\,dr}{r^2}.\ sin.\ \theta.\ \sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)}}{\sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.\varrho-\left[1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)\right]\frac{a^2}{r^2}.\ sin^2.\ \theta}}$$

Soit, comme précédemment,

$$\frac{\frac{4K}{n^2}.(\varrho)}{1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)} = m; \quad \frac{(\varrho)-\varrho}{(\varrho)} = \varphi(s); \quad \frac{a}{r} = 1 - s$$

nous aurons, en ne négligeant point s^2,

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - m\varphi + (2\ s - s^2).\ sin^2.\ \theta}}$$

Ceci suppose l'objet plus élevé que l'observateur ou vu par en haut. Si, au contraire, il étoit vu par en bas, quoique toujours par une première branche, comme cela a lieu quand la mer est plus chaude que l'air, il faudroit supposer que le rayon r décroît lorsque v augmente; ce qui donneroit le signe négatif au second membre de l'équation différentielle, et l'on auroit alors

$$dv = -\frac{\frac{a.\ dr}{r^2}.\ sin.\ \theta.\sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)}}{\sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.\varrho - \left[1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)\right]\frac{a^2}{r^2}.\ sin^2.\ \theta}}$$

mais comme il faudroit aussi faire $\frac{a}{r} = 1 + s$, il s'ensuit que l'on auroit

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - m\varphi - (2\ s + s^2).\ sin^2.\ \theta}}$$

Alors, pour que les angles θ ne deviennent pas obtus, il faut les compter depuis le pied de la verticale, en sorte qu'ils soient le complément de la dépression.

Il arrivera souvent que le terme $m\varphi$, qui dépend de l'inégalité des températures, sera très-considérable relativement au terme $(2\ s + s^2).\ sin^2.\ \theta$, qui dépend de a courbure de la terre. Alors, si l'on se borne à con-

sidérer des points de la trajectoire très-peu élevés au-dessus les uns des autres, on pourra négliger ce second terme par rapport au premier, et l'on aura simplement

$$dv = \frac{ds. \sin. \theta}{\sqrt{\cos^2. \theta - m\varphi}}$$

Si l'on fait $adv = dx$, $ads = dz$, x et z pourront être considérés comme des coordonnées rectilignes, l'une horizontale, l'autre verticale, et l'équation sera la même que dans le cas des couches planes.

En général lorsqu'on se borne à des valeurs de s fort petites, chaque loi de densité qui donne au terme $m\varphi$ une certaine valeur dans le cas des couches sphériques, produit absolument le même effet que si l'on construisoit les trajectoires avec un décroissement de densité exprimé par $m\varphi - (2\,s + s^2)$, en supposant les couches planes, et qu'on appliquât ensuite l'axe des abscisses ar sur la circonférence d'un grand cercle de la surface terrestre; d'où l'on voit que si la courbure de la terre change quelque chose aux détails des phénomènes relatifs à chaque loi particulière de décroissement, elle ne détruit point les considérations générales que nous avons exposées relativement à toutes les lois possibles touchant la formation des caustiques et la manière dont les images multiples des objets peuvent être donnés par les secondes branches des trajectoires, ou peuvent devenir invisibles par leur situation sous la caustique qui limite l'espace où l'on peut les apercevoir.

Cependant l'effet de cette courbure produit ici une

modification générale qui n'avoit pas lieu dans le cas des couches planes. Alors deux trajectoires infiniment voisines, menées par l'œil de l'observateur, se coupoient nécessairement une autre fois dans leurs secondes branches, quelle que fût la loi des densités, pourvu qu'elle fût toujours décroissante et indéfinie. Mais ici, à cause de l'opposition des termes $m\varphi$ et $2\, s.\, sin^2.\, \theta$, lorsque la densité décroît à mesure qu'on s'élève, il peut arriver, si celui-ci l'emporte, que les trajectoires divergent au lieu de converger, la courbure de la terre ayant plus d'influence pour les écarter les unes des autres que la différence des températures n'en a pour les rapprocher. Alors il ne peut plus se former de caustiques ni d'images multiples. Cela a lieu ainsi communément dans l'état stable de l'atmosphère, comme on va le voir.

Dans ce cas les densités à de petites hauteurs décroissent sensiblement en progression arithmétique. Supposons donc en général

$$m.\left[\frac{(\rho)-\rho}{(\rho)}\right]=4\,\beta.\,s$$

les s étant considérées comme positives au-dessus de l'observateur. Quand les hauteurs seront très-petites, s représentera l'élévation des points de la trajectoire au-dessus du niveau de l'observateur, et la quantité constante β sera le coefficient de la réfraction terrestre. Cette loi s'accordera donc avec l'état stable de l'atmosphère près de la surface de la terre où les phénomènes nous

intéressent principalement. Substituant les valeurs précédentes dans l'équation différentielle, elle devient

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2\ s.\ (2\ \beta - sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}.$$

et elle a pour intégrale

$$tang.\ (V - v) = sin.\ \theta.\ \frac{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2\ s.\ (2\ \beta - sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}{s.\ sin^2.\ \theta + (2\ \beta - sin^2.\ \theta)}$$

V étant une constante. Comme il faut que s et V commencent ensemble, il faut qu'ils deviennent tous deux nuls en même temps; ce qui donne

$$tang.\ V = \frac{sin.\ \theta.\ cos.\ \theta}{2\ \beta - sin^2.\ \theta}$$

Si l'on fait

$$C = \frac{2\ \beta - sin^2.\ \theta}{cos.\ V.\ sin^2.\ \theta} \quad \text{et} \quad s = s' + C\ (1 - cos.\ V)$$

l'équation de la trajectoire devient

$$tang.\ (V - v) = \frac{\sqrt{-2\ s'C - s'^2}}{s' + C}$$

Maintenant en la résolvant par rapport à s', et mettant pour s' sa valeur en r, elle donne

$$r = \frac{a}{1 + C.\ cos.\ V - C.\ cos.\ (V - v)}$$

L'orbite décrite par la molécule lumineuse est donc une section conique dont le centre de la terre occupe un des foyers. En nommant A le demi-grand axe de

cette section conique, e le rapport de son excentricité au demi-grand axe, on trouve

$$A = \frac{2\beta a}{4\beta - 1}; \quad e = \frac{\sqrt{(2\beta - \sin^2.\theta)^2 + \sin^2.\theta.\cos^2.\theta}}{2\beta}$$

Ainsi, dans chaque loi de réfraction, le grand axe de toutes les trajectoires est le même; mais l'excentricité est variable avec la distance au zénith. Les trajectoires sont des ellipses lorsque 4β est plus grand que 1, ce sont des paraboles lorsque $4\beta = 1$, et des hyperboles lorsque 4β est moindre que 1. Dans ce dernier cas le centre de la terre est le foyer intérieur de la branche hyperbolique.

La simplicité du résultat auquel nous venons de parvenir étoit facile à prévoir, d'après la loi de densité que nous avons choisie. En effet il est visible qu'elle donne

$$-\frac{m}{(\varrho)}.\frac{d\varphi}{dr} = \frac{4\beta}{r^2}$$

La force attractive $\frac{d\varphi}{dr}$ qui sollicite la molécule lumineuse dans chaque point de la trajectoire, étant réciproque au carré de la distance, le mouvement de cette molécule est le même que celui des corps célestes autour du soleil. L'égalité des grands axes tient à ce que toutes les molécules lumineuses arrivent à l'œil de l'observateur avec la même vitesse parce qu'elles se trouvent alors dans la même couche d'air.

Considérons en particulier la trajectoire correspon-

dante à $\theta = 90^{o}$; c'est elle qui donne la réfraction horizontale. Cette supposition donne $V = 0$, et ensuite

$$r = \frac{a}{2\beta - (2\beta - 1).\cos. v}$$

$v = 0$ donne $r = a$, comme cela devoit être, puisque la trajectoire passe par l'œil de l'observateur; mais $v = 180^{o}$ donne $r = \frac{a}{4\beta - 1}$. Cette valeur est plus petite ou plus grande que a, selon que 2β est plus grand ou plus petit que 1. Dans le premier cas la trajectoire a son apogée à l'observateur; dans le second, elle a son périgée en ce point. Si $2\beta = 1$, les deux rayons sont égaux, et la trajectoire est un cercle concentrique à la terre.

Jusqu'ici nous avons considéré le cours entier des trajectoires dans toute l'étendue que leur donne la formule mathématique. Mais, pour appliquer ces résultats à la nature, même dans la loi de décroissement que nous avons considérée, il faut arrêter la trajectoire à la distance de la terre où la densité de l'atmosphère devient nulle; et à partir de ce point il faut la considérer comme une ligne droite indéfinie, prolongée suivant la direction de la dernière tangente. Ceci est analogue à ce que nous avons remarqué relativement aux couches planes, lorsque nous avons déterminé dans ces couches la limite de la réflexion. Or, puisque la loi des densités que nous avons supposée, est

$$m.\left[\frac{(\rho) - \rho}{(\rho)}\right] = 4\beta s$$

Lorsque la densité ϱ devient nulle, c'est-à-dire à la sortie de la trajectoire, on a $s = \frac{m}{4\beta}$ ou $r = \frac{a}{1 - \frac{m}{4\beta}}$; et comme l'expression générale du rayon vecteur des trajectoires est

$$r = \frac{a}{1 + C.\cos. V - C.\cos.(V - v)}$$

il s'ensuit que la trajectoire lumineuse, considérée à partir de l'œil de l'observateur, sortira de l'atmosphère quand on aura

$$\cos.(V - v) = \cos. V + \frac{m}{4\beta. C}$$

Considérons en particulier la trajectoire qui donne la réfraction horizontale. Pour cette trajectoire, la distance apparente au zénith $\theta = 90°$; $V = 0$ et $C = 2\beta - 1$; par conséquent au point de sortie on aura

$$\cos. v = 1 + \frac{m}{4\beta.(2\beta - 1)}$$

On voit d'abord que si 2β est plus grand que 1, v sera imaginaire, et par conséquent la trajectoire ne sortira point de l'atmosphère. Cela doit être, puisque dans ce cas elle a son apogée à l'observateur; de sorte que dans tous les autres points elle s'approche du centre au lieu de s'en éloigner. Si $2\beta = 1$, v est encore imaginaire; et en effet la trajectoire est un cercle. Mais lorsque 2β commence à être moindre que 1, les valeurs de v ne commencent pas encore à être réelles,

puisque *cos.* v passant par l'infini quand $2\beta = 1$, commence par prendre des valeurs négatives très-grandes. La réalité de v ne commence donc qu'au-dessous d'une certaine limite de β qui est donnée par l'équation

$$\beta.\ (2\beta - 1) = -\frac{m}{8}$$

Ce qui répond à $v = 180°$. Alors l'apogée de la trajectoire horizontale est situé à la limite même de l'atmosphère.

L'une des deux valeurs de β est

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1-m}}{4} \text{ et elle donne } r = \frac{a}{\sqrt{1-m}}$$

L'autre est inadmissible, parce qu'elle donneroit r négative. En général, pour que le rayon vecteur, au point de sortie, fasse un angle v avec la verticale de l'observateur, il faut qu'on ait

$$\beta = \tfrac{1}{4}.\left(1 + \sqrt{1 - \frac{m}{\sin^2.\ \frac{1}{2}v}}\right)$$

On voit donc qu'en donnant au coefficient β des valeurs convenables, la trajectoire horizontale peut sortir de l'atmosphère sous tel angle que l'on voudra, depuis $v = 180°$ jusqu'à l'angle déterminé par l'équation $\sin.\ \frac{1}{2}v = \sqrt{m}$. Par conséquent la réfraction horizontale, au lieu de rester toujours très-petite, peut devenir très-considérable ; il peut même se faire que la molécule lumineuse, ne sortant jamais de l'atmosphère, devienne un satellite de la terre. On sent que ces résultats ne sont pas bornés à la trajectoire horizontale, mais qu'ils peuvent avoir lieu également pour d'autres distances au zénith sous

certains limites. Lorsqu'on veut les borner à des distances au zénith très-peu différentes de 90°, et faire décrire aux trajectoires des ellipses très-peu différentes du cercle, ces trajectoires ne traverseront que des couches très-peu distantes les unes des autres. Alors les valeurs de s peuvent être considérées comme exprimant des différences de niveau; et la loi des densités qui fait circuler la lumière, n'est que la loi ordinaire de décroissement rendue seulement un peu plus rapide.

N'est-ce pas à des inflexions de ce genre qu'il faut rapporter la durée extraordinaire du crépuscule, observée par Saussure sur le col du Géant où ce phénomène étoit visible pendant toute la nuit, quoique le soleil descendît à plus de 45 degrés au-dessous de l'horizon. Car, pour appliquer à ce cas l'explication ordinaire du crépuscule, il faudroit supposer qu'à plus de cent vingt lieues de hauteur au-dessus de la surface de la terre l'atmosphère est encore assez dense pour réfléchir une lumière sensible, et qu'il le seroit encore après avoir traversé les couches inférieures, pour arriver jusqu'à nos yeux, deux circonstances qu'il est bien difficile d'admettre. Et cela ne serviroit encore de rien pour expliquer cette lueur pâle, mais distincte, observée aussi par Saussure tout autour de l'horizon, dans les mêmes circonstances; phénomène que M. de Humboldt a revu et remarqué pendant son séjour sur le volcan d'Antisana. Au lieu que ces résultats se conçoivent facilement si on les attribue à l'inflexion et en quelque sorte à la circulation de la lumière autour de la terre, sinon en vertu du dé-

croissement de densité que nous avons supposé, du moins en vertu de quelque autre loi qui pourroit exister dans les hautes couches de l'atmosphère dont la température est peu variable, et qui seroit également capable de faire circuler la lumière; ce qui peut arriver d'une infinité de façons différentes. Enfin, des considérations du même genre ne peuvent-elles pas avoir rendu possible la fameuse observation des Hollandais à la Nouvelle-Zemble, observation qui n'a jamais été ni expliquée ni refutée d'une manière satisfaisante, mais qui, d'après la théorie précédente, n'a aucune difficulté.

Cherchons maintenant à déterminer la forme de la caustique produite par les intersections successives de toutes les trajectoires. Reprenons la formule

$$r = \frac{a}{1 + C.\cos. V - C.\cos.(v - V)}$$

qui, en faisant $v = 2u$, peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{a}{1 + 2C.\sin. u.\sin.(u - V)}$$

ou, en substituant pour C sa valeur $\frac{1}{\sin. V.\,\text{tang.}\,\theta}$,

$$r = \frac{a}{1 + 2\sin. u \frac{\sin.(u - V)}{\sin. V.\,\text{tang.}\,\theta}}$$

Pour exprimer la condition des intersections consécutives, il faut différencier cette équation en faisant varier θ seul, u et v restant les mêmes; ce qui donne

$$\frac{d.\left[\frac{\sin.(u - V)}{\sin. V.\,\text{tang.}\,\theta}\right]}{d\theta} = 0$$

ou, en développant et prenant la valeur de *tang. u*,

$$tang.\, u = \frac{tang^2.\, V}{\frac{dV}{d\theta}.\, \frac{sin.\, \theta.\, cos.\, \theta}{cos^2.\, V} + tang.\, V}$$

d'où l'on tire enfin, en mettant pour *V* sa valeur,

$$tang.\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{tang.\, \theta}{4\,\beta}$$

Cette équation fait connoître l'arc *v* après lequel se coupent deux trajectoires consécutives menées sous l'angle θ. En y joignant les suivantes :

$$r = \frac{a}{1 + 2\, C.\, sin.\left(\frac{v}{2}\right).\, sin.\left(\frac{v}{2} - V\right)}$$

$$tang.\, V = \frac{sin.\, \theta.\, cos.\, \theta}{(2\,\beta - sin^2.\, \theta)}\,; \quad C = \frac{1}{sin.\, V.\, tang.\, \theta}$$

on aura une détermination complète de tous les élémens de la caustique.

Si l'on cherche l'expression de *r* en θ, au moyen de ces équations, on trouve

$$r = \frac{a.\,(16\,\beta^2.\, cos^2.\, \theta + sin^2.\, \theta)}{(4\,\beta - 1).\,(4\,\beta.\, cos^2.\, \theta + sin^2.\, \theta)}$$

Ainsi lorsque $4\,\beta$ est moindre que 1, la valeur de *r* devient constamment négative et impossible ; par conséquent la caustique est imaginaire. C'est le cas de la réfraction ordinaire où β est une fraction fort petite peu différente de $\frac{1}{11}$; par conséquent on ne doit jamais voir de doubles images lorsque cet état a lieu.

Il est facile de sentir pourquoi la condition de $4\beta > 1$ est nécessaire pour la formation de la caustique : c'est qu'elle donne des trajectoires elliptiques, au lieu que de moindres valeurs de β donnent des paraboles ou des hyperboles qui ne peuvent pas se couper.

Au moyen de la valeur de *tang.* θ, qui est $4\beta.\ tang.\ \frac{v}{2}$, on peut éliminer θ de l'expression précédente de r, et alors on trouve

$$r = \frac{8\,a.\,\beta}{(4\,\beta - 1).\,[4\,\beta + 1 - (4\,\beta - 1).\,\cos.\,v]}$$

La caustique formée par l'intersection de toutes les trajectoires est donc une ellipse dont le centre de la terre occupe un des foyers. Le grand axe de cette ellipse est $a\,\frac{(4\,\beta + 1)}{4\,\beta - 1}$, son excentricité est $\frac{a}{2}$, et par conséquent le rapport de cette excentricité au demi-grand axe est $\frac{(4\,\beta - 1)}{4\,\beta + 1}$. Celui-ci est dirigé suivant la verticale menée du centre de la terre à l'observateur, et l'apogée est à son zénith.

La partie du phénomène qui nous intéresse spécialement est celle qui répond à des distances au zénith peu différentes de 90°. Développons les formules précédentes dans cette supposition. On a d'abord en général

$$tang.\ \frac{v}{2} = \frac{tang.\ \theta}{4\,\beta}$$

v étant l'arc après lequel se coupent deux trajectoires consécutives. Lorsque $\theta = 90°$ on a $v = 180°$, et en

général, pour des hauteurs très-petites, v diffère peu de cette valeur; car si l'on fait $\theta = 90° - h$, h étant la hauteur apparente supposée très-petite, on a, en se bornant aux quantités de cet ordre,

$$v = 180° - 8\,\beta h$$

ce qui donne pour r la valeur

$$r = \frac{a}{4\,\beta - 1}.\,[1 + 4\,\beta.\,(4\,\beta - 1).\,h^2]$$

De sorte qu'en négligeant h^2 on a $r = const.$ La portion de la caustique qui répond aux très-petites hauteurs apparentes est donc, à fort peu près, un arc de cercle concentrique à la terre, et les points de tangence des trajectoires sur cette caustique sont situés, à fort peu près, à 180° de distance du zénith de l'observateur.

Or nous avons déjà plusieurs fois remarqué que les images directes sont données par des trajectoires dont le point de tangence sur la caustique est situé au-delà de l'objet, par rapport à l'observateur, et qu'au contraire les images renversées sont données par des trajectoires dont le point de tangence sur la caustique est situé entre l'observateur et l'objet. Ici cette dernière circonstance manquera toujours lorsque les hauteurs apparentes seront peu considérables, à cause de l'éloignement infini des points de tangence; et par conséquent lorsqu'on verra ainsi les objets par en haut, sous des hauteurs très-petites, on n'apercevra jamais d'images renversées, dans la loi que nous examinons.

C'est en effet ce que nous avons remarqué à Dunkerque, non pas sans quelque surprise, dans les cas où la mer plus froide que l'air, rendoit les objets visibles par en haut. Cette élévation étoit tellement sensible qu'on s'en apercevoit même sans le secours des instrumens. Lorsqu'on alloit s'asseoir sur le rivage, on sembloit alors être dans un fond autour duquel, suivant une pente douce, s'élevoit la mer fortement azurée, surtout au large, et terminée par un horizon si net, si bien tranché, si exempt de vagues, que le fil horizontal du cercle n'y pouvoit pas rendre sensible la plus petite ondulation. Cependant des barques de pêcheurs qui étoient au large, et des bâtimens qui s'éloignoient du port, ne présentoient qu'une seule image directe et très-nette, sans aucune apparence de renversement. Nous fîmes d'autant plus d'attention à cette particularité que n'ayant point encore calculé ce cas d'exagération de la réfraction ordinaire, j'ignorois que le renversement fût impossible sous ces petites inclinaisons : on en a vu la raison tout-à-l'heure. On remarquera en outre que, dans les cas où nous nous sommes trouvés, l'horizon apparent s'est élevé fort peu au-dessus du plan horizontal mené par notre œil ; par conséquent l'effet de la réfraction terrestre à cette hauteur étoit fort peu différent de celui de la courbure de la terre. Les trajectoires menées sous ces petites inclinaisons devoient donc raser pendant long-temps la surface de la mer avant de pénétrer dans son intérieur, et pour de très-petites différences d'inclinaison initiale, les points où elles rencontroient cette

surface étoient fort éloignés les uns des autres. Il suit de là que des portions très-étendues de la mer étoient vues sous des angles très-petits, principalement dans les distances au zénith peu différentes de 90°. C'est ce qui produisoit cette teinte si forte, ce bleu sombre de la mer, surtout à l'horizon; et comme cet horizon lui-même étoit déterminé par la hauteur de la couche d'air où la réflexion cessoit d'être possible, il s'ensuit qu'on devoit le voir bien tranché, bien terminé, et tout-à-fait exempt des ondulations accidentelles de la mer, dont le seul effet étoit de faire envoyer les mêmes trajectoires par d'autres points physiques des eaux, sans changer les inclinaisons sous lesquelles ces trajectoires parvenoient à l'observateur, en vertu de leur réflexion dans la couche d'air qui ne changeoit point pour cela de densité ni de température.

L'analyse que nous venons d'exposer s'appliqueroit également au cas où la densité de l'air, au lieu de décroître de bas en haut, comme nous le supposions tout-à-l'heure, décroîtroit au contraire de haut en bas, suivant la même loi. Ceci suppose la mer plus chaude que l'air. En prenant alors les s positives au-dessous de l'observateur, et supposant toujours

$$m. \left[\frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}\right] = 4\,\beta s$$

l'équation différentielle devient

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2s.\ (2\,\beta + sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}$$

dont l'intégrale est

$$tang.(V-v)=sin.\,\theta.\frac{\sqrt{cos^2.\,\theta-2\,s.\,(2\,\beta+sin^2.\,\theta)-s^2.\,sin^2.\,\theta}}{s.\,sin^2.\,\theta+2\,\beta+sin^2.\,\theta}$$

V étant une constante; et comme il faut que v et s commencent ensemble, il s'ensuit qu'on aura

$$tang.\ V=\frac{sin.\,\theta.\ cos.\,\theta}{2\,\beta+sin^2.\,\theta}$$

Ces formules auroient pu se déduire de celles de la page 191, en faisant dans ces dernières β et s négatives, changeant le signe du radical et supposant θ plus grand que 90°; ce qui rend $cos.\ \theta$ négatif. Ici les angles θ ne sont plus comptés à partir du zénith, mais à partir du nadir. Si donc, en suivant cette analogie, on fait

$$C=\frac{2\,\beta+sin^2.\,\theta}{sin^2.\,\theta.\ cos.\ V}$$

et que l'on ait soin de remarquer que $\frac{a}{r}=1+s$, on trouvera

$$r=\frac{a}{1-C.\ cos.\ V+C.\ cos.\ (V-v)}$$

$C.\ cos.\ V$ étant égal à $1+\frac{2\,\beta}{sin^2.\,\theta}$, par conséquent plus grand que l'unité, on voit que la trajectoire est constamment une branche d'hyperbole qui tourne sa convexité vers la surface terrestre, et dont le centre de la terre occupe le foyer extérieur. En nommant A le demi-grand axe de cette hyperbole, e le rapport de son excentricité au demi-grand axe, on a

$$A=\frac{2\,\beta a}{4\,\beta+1};\quad e=\frac{\sqrt{(2\,\beta+sin^2.\,\theta)^2+sin^2.\,\theta.\ cos^2.\,\theta}}{2\,\beta}$$

Maintenant si, en suivant la marche de la page 196, on cherche l'équation de la caustique, on aura d'abord, comme précédemment, pour condition des intersections successives,

$$d. \frac{\left(\frac{sin.\ (u - V)}{sin.\ V.\ tang.\ \theta}\right)}{d\theta} = 0$$

d'où l'on tire

$$tang.\ \frac{v}{2} = \frac{tang.\ \theta}{4\ \beta}$$

Cette valeur de $tang.\ \frac{v}{2}$ étant substituée dans celle de r, il vient

$$r = \frac{a.\ (16\ \beta^2.\ cos^2.\ \theta + sin^2.\ \theta)}{(4\ \beta + 1).\ (4\ \beta.\ cos^2.\ \theta - sin^2.\ \theta)}$$

et enfin, en éliminant θ,

$$r = \frac{8\ a\beta}{(4\ \beta + 1).\ [1 - 4\ \beta + (1 + 4\ \beta).\ cos.\ v]}$$

Cette valeur se déduira de celle de la page 199, en y faisant β négative.

On voit par ces expressions de r que la caustique est toujours une branche d'hyperbole dont le grand axe est dirigé suivant la verticale de l'observateur, et dont le centre de la terre occupe un des foyers. Lorsque $4\ \beta$ est moindre que l'unité, la caustique tourne sa concavité vers ce centre, qui est alors son foyer intérieur. Au contraire, lorsque $4\ \beta$ surpasse 1, la caustique, tourne sa convexité vers le centre de la terre, qui devient son foyer extérieur. Dans le premier cas le grand axe est $\frac{a.\ (1 - 4\ \beta)}{1 + 4\ \beta}$, son excentricité est $\frac{a}{2}$, et le rapport de l'ex-

centricité au demi-grand axe, $\frac{1+4\beta}{1-4\beta}$. Dans le second, le grand axe est $a\frac{4\beta-1}{4\beta+1}$, et le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, $\frac{4\beta+1}{4\beta-1}$. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, $4\beta=1$, et la caustique devient une ligne droite perpendiculaire à la verticale de l'observateur, et menée par le milieu du rayon terrestre qui lui correspond.

La valeur de r devient infinie lorsqu'on a (1)

$$tang.\ \theta = \sqrt{4\beta} \quad \text{ou} \quad tang.\ \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{4\beta}}$$

Des valeurs de θ plus considérables rendroient r négative et par conséquent impossible. Les trajectoires comprises entre $\theta=0$ et θ égal à la valeur précédente seront donc les seules qui pourront se couper, par conséquent elles seules pourront former une caustique et envoyer ces doubles images, mais toutes celles qui répondront à des valeurs de θ plus grandes, par conséquent plus approchantes de l'horizon, divergeront à partir de l'œil de l'observateur et ne se rencontreront jamais. Si $4\beta=1$, $\theta=45^\circ$, $v=90^\circ$, la limite des trajectoires qui se coupent répond donc alors à celle qui, en arrivant à l'œil, fait un angle de 45° avec la verticale. D'où l'on voit que pour que la caustique puisse avoir lieu dans les hauteurs apparentes très-petites, par conséquent pour des valeurs

(1) Il faut se rappeler que les angles θ sont comptés depuis le nadir autour de la verticale, et de $\theta=0$ à $\theta=90^\circ$.

de *tang.* θ très-considérables, il faut que $4\,\beta$ soit lui-même un très-grand nombre, c'est-à-dire que l'effet de la réfraction soit extrêmement considérable par rapport à celui de la courbure de la terre. Ainsi, plus $4\,\beta$ sera grand, plus les images renversées pourront approcher de la ligne horizontale menée par l'œil de l'observateur. Mais elles resteront toujours au-dessous de cette ligne; car, quelque grand que l'on suppose β, l'intersection cessera toujours d'être possible pour les trajectoires relativement auxquelles on aura $\theta = 90°$, puisque pour atteindre cette limite il faudroit que β fût infini. D'ailleurs ceci n'empêchera pas que des objets situés au-dessus de la ligne horizontale puissent être rencontrés par des secondes branches de trajectoires, et vus renversés; seulement leur image paroîtra au-dessous de la ligne horizontale. La limite analogue dans les couches planes étoit donnée par la trajectoire parallèle aux couches; mais ici la courbure de la terre rend déjà l'intersection des trajectoires impossible avant qu'elles aient atteint l'horizontalité.

Si donc nous supposons que le cercle CM (*fig.* 24) représente la circonférence de la terre, O l'observateur, OMH la trajectoire limite tangente en M à la surface des eaux. Soit L le point de tangence de cette trajectoire sur la caustique représentée par LT, et menons enfin la trajectoire OmT'' tangente à la caustique à l'infini, il est sensible par ce qui précède, 1°. que tous les points situés au-dessous de MLT seront complètement invisibles pour l'observateur; 2°. ceux qui seront compris dans l'espace

mixtiligne $LmTT'$ enverront de doubles images, une supérieure qui sera droite, une inférieure qui sera renversée; enfin au-dessus de la trajectoire OmT'', il n'y aura plus de doubles images mais un simple abaissement des objets.

Et par une analogie qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé précédemment pour les couches planes, dans le cas de la progression arithmétique, si l'on suppose $\theta = 45^\circ$, on trouve $v = a. \frac{16\,\beta^2 + 1}{16\,\beta^2 - 1}$, de sorte que si β est extrêmement considérable, en sorte qu'on puisse négliger l'unité vis-à-vis de $16\,\beta^2$, la trajectoire menée sous l'inclinaison de 45° touchera la caustique au niveau de l'observateur.

Quoique la loi que nous venons d'examiner soit particulière, et par conséquent ne puisse pas avoir en général l'air atmosphérique, cependant la considération de cette loi nous aura toujours été utile pour faire sentir les modifications introduites dans cette théorie par la courbure de la terre, modifications qui disparoissent lorsque l'effet de la réfraction peut être considéré comme infini relativement à cette courbure. Or c'est ce qui arrivera très-souvent, car dans la réfraction ordinaire où $\beta = \frac{1}{11}$, une élévation de 200 mètres répond à une variation de température à peu près égale à un degré centésimal, et dans cette circonstance $4\,\beta$ surpasse déjà $\frac{1}{3}$; au lieu que dans le cas d'une réfraction extraordinaire produite par l'excès de chaleur de la surface de la mer sur l'air environnant, des différences de hauteur égales à quelques centimètres, ou moins encore répondent quel-

quefois à des différences de température de plusieurs degrés, ce qui rend la valeur de β trois ou quatre mille plus considérable si on la calcule toujours de la même manière ; il devra donc souvent arriver que la convexité de la terre puisse être négligée relativement à une si forte réfraction.

En appliquant donc ici les considérations générales que nous avons exposées dans le cas des couches planes, on verra se reproduire des résultats analogues touchant les diverses formes que peuvent prendre les caustiques, et les inflexions qu'elles peuvent subir selon la loi de superposition des densités. Ainsi sans répéter ici les détails des lois particulières que nous avons examinées alors, nous nous bornerons à rappeler les résultats de celles qui se trouveront avoir une application immédiate à quelque phénomène observé.

Généralement soit O l'observateur élevé dela quantité, OA au-dessus de la surface de la mer, *fig.* 25. Soit OMT la trajectoire limite tangente en M à cette surface; le point M sera le dernier point de la mer que l'on pourra apercevoir. Si les trajectoires menées au-dessus de OM ne se coupent point dans leurs secondes branches, il n'y aura point de renversement, mais un simple abaissement des objets, et tout l'espace TMH sera invisible. Le soleil et les autres astres se coucheront à l'horizon apparent de la mer sur la trajectoire limite OMT, et les rayons qu'ils enverront à cette époque éprouveront une dépression plus grande que celle de l'horizon vrai qui auroit lieu indépendamment de la réfraction.

Mais si, par la nature du changement des densités les trajectoires successives se coupent dans leurs secondes branches, il se formera au-delà du point M une caustique ML qui commencera par couper cette trajectoire elle-même à une certaine hauteur au-dessus du niveau de la mer; après quoi elle ira continuellement en s'élevant à mesure qu'elle s'éloignera de l'observateur, jusqu'à ce qu'enfin elle soit terminée par la dernière des trajectoires pour laquelle l'intersection est possible. Mais avant de parvenir à ce terme, elle pourra subir des inflexions, des rebroussemens, et former ainsi autant de branches susceptibles de multiplier les images, comme nous l'avons remarqué dans le cas des couches planes.

Si l'on suppose que la température de la mer soit partout la même autour de l'observateur, les mêmes phénomènes se produiront dans tous les verticaux menés par son œil. On les représentera en faisant tourner tout le système précédent autour de la verticale CO. L'arc AM engendrera la surface visible de la mer, le point de tangence M décrira un cercle horizontal qui sera la limite apparente de cette surface et que l'on prendra pour l'horizon vrai; enfin la caustique ML engendrera une surface de révolution au-dessous de laquelle on ne pourra voir aucun objet, et au contraire tous ceux qui seront compris entre cette surface et celle qu'engendre la trajectoire limite MN paroîtront doublés.

Il suit delà que l'observateur ne verra point l'horizon réel de la mer, il prendra pour cet horizon le cercle décrit par le point M. Si la vue n'est limitée par aucun obstacle,

les points du ciel ou de l'atmosphère, compris dans l'espace *TLM*, enverront aussi leur double image; mais si le temps est serein et sans nuages, ces deux images n'offrant aucun rapport de symétrie, ne pourront point être distinguées, la plus basse paroîtra la continuation de l'autre, et le ciel semblera reposer sur le faux horizon.

Si, au contraire, la caustique, en se prolongeant, remontre des objets opaques, par exemple des îles éloignées, la partie de ces îles qui s'élevera au-dessus d'elle, et qui sera cependant au-dessous de la trajectoire limite paroîtra doublée. Si le sommet de l'île est plus haut que cette trajectoire, sa base apparente, ou plutôt l'image renversée qui lui sert de base, paroîtra reposer sur l'horizon. Mais si ce sommet est plus bas que la trajectoire limite, l'image renversée du ciel s'apercevra au-dessous de l'île qui semblera suspendue en l'air avec son image renversée. Les résultats de ces diverses circonstances sont absolument conformes à ceux que nous avons observés sur le sable à Dunkerque, lorsque nous placions un homme armé d'une perche, à divers éloignemens.

Mais ici la dimension des objets dans le sens latéral donne lieu à un nouveau phénomène. Nous avons prouvé que la surface caustique s'élève à mesure qu'elle s'éloigne. Les extrémités latérales de l'objet étant plus éloignées de l'observateur que son centre, seront donc coupées par la caustique à une plus grande hauteur. S'il est très-peu large la différence sera insensible, et il paroîtra tout entier élevé dans le ciel, à-peu-près également. Mais si l'on observe uue île assez grande, dont les contours répon-

dront à des points beaucoup plus éloignés que le milieu, la différence de hauteur de la caustique a ces divers éloignemens pour devenir sensible, et les extrémités latérales de l'île paroîtront relevés comme un bec, ainsi que le présente la *fig.* 26. Il pourra même arriver, par l'effet de cette circonstance, que les bords d'une île soient relevés en l'air, tandis que son milieu, c'est-à-dire la partie la plus voisine de l'observateur, paroîtra reposer sur la surface des eaux. Mais si les différences de température augmentent et que le point de tangence de la trajectoire limite se rapproche de l'observateur, ou ce qui revient au même, si l'observateur s'abaisse, la trajectoire limite pourra s'élever au-dessus du sommet de l'île qui sera alors entièrement suspendue dans l'air.

Quoique ces résultats soient des conséquences nécessaires et très-simples de notre théorie, nous avons cependant eu soin de les vérifier à Dunkerque, en observant ainsi une estacade très-prolongée qui s'étendoit horizontalement dans une direction perpendiculaire au rayon visuel mené à son milieu. En nous baissant sur le sable assez pour amener la caustique à la hauteur de cette estacade, le milieu en paroissoit simplement double comme à l'ordinaire, mais les bords sembloient relevés et amincis comme un bec, conformément à la description que nous venons de donner. D'ailleurs on voyoit toujours deux images distinctes même à ces extrémités, au lieu que cela n'arrive pas toujours, du moins en apparence, quand on observe des îles très-peu au-dessus de l'horizon de la mer. Mais cela tient à ce que l'image renversée se trouve

alors réduite à une dimension infiniment petite, comme je le prouverai plus loin, et par conséquent cela ne porte aucune atteinte à la théorie que je viens d'exposer.

Il est presque superflu de prouver que dans les circonstances où l'on observe ces phénomènes la réfraction est négative, cependant je ne négligerai point de le faire, puisque cela me donnera lieu de rapporter des observations très-précises faites par M. de Humboldt en Amérique, et qu'il a bien voulu me communiquer.

Ces observations ont été faites à Cumana, avec un quart de cercle de Bird. L'instrument, soigneusement vérifié par le niveau et le fil de plomb, étoit solidement placé sur un mur très-massif. L'objectif de la lunette étoit à 24 pieds 11 pouces ou 8.094 mètres au-dessus du niveau de la mer. L'erreur de la collimation étoit de 8′ 40″, additive aux distances zénithales. Elle avoit été déterminée exactement par la comparaison avec un sextant de Ramsden bien vérifié.

Les objets observés étoient des îles placées à 8 ou 9 milles de distances, chaque mille étant de 950 toises ou une minute de degrés. Afin qu'aucun accident n'influât sur ces angles, M. de Humboldt, avant de diriger sa lunette sur les îles, mesuroit l'élévation apparente d'un objet voisin, que sa proximité et son élévation rendoient capables d'être affecté par les changemens des réfractions horizontales.

Nous réunirons les observations de M. de Humboldt dans le tableau suivant.

Observations de M. Humboldt, faites à Cumana.

DATES DES OBSERVATIONS.	SOMMET de l'île Boracha.	SOMMET de l'île Picuita.	BASE OU PIED de l'île Picuita.	HORIZON de la mer.
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
2 sept. 11h du matin . . .	89 55 33	90 5 23	90 7 5	Non observé.
2 . . 6h du soir. . . .	89 55 33	90 5 23	90 6 19	Non observé.
3 . . 7h du matin . . .	89 55 33	90 4 23	90 7 6	90 7 43
3 . . 6h du soir. . . .	89 55 47	90 4 27	Non observé.	Non observé.
4 . . 5h $\frac{1}{4}$ du soir. . . .	89 55 47	90 4 36	90 6 52	90 6 48
5 . . crépuscule	89 56 0	90 4 33	90 6 44	90 7 34
6h du soir ⊙ à 4°	89 56 0	90 4 36	90 6 48	90 6 51
Dans le crépuscule. . . .	. . . .	90 4 55	. . . .	90 6 10
Plus tard.	. . . .	90 4 36	. . . .	90 6 57
24 . . . 9h du matin . .	89 56 0	90 6 48	. . . .	90 14 17

La première remarque qui se présente en examinant ces observations, c'est que les plus grandes variations correspondent aux plus petites hauteurs apparentes. Ces variations sont peu sensibles pour le sommet de la Boracha. Elles le sont davantage pour le sommet de la Picuita qui est plus basse; elles le sont surtout à l'horizon apparent

Observations de M. Humboldt, faites à Cumana.

Températ. à l'air, en degrés de Réaumur.	Hygromètre de Deluc.	Cyanomètre de Saussure.	CIRCONSTANCES ATMOSPHÉRIQUES.
D. M.	D.	D.	
22 6	42.0	19.0	Suspension; le ciel tout bleu; du soleil.
20 0	45.0	. . . . . .	Suspension; temps couvert.
21 0	43.0	. . . . . .	
21 7	49.0	. . . . . .	Couvert; proximité de la pluie.
22 5	41.0	. . . . . .	Couvert, mais très-transparent. Point de suspension.
21 0	45.0	. . . . . .	Suspension.
22 8	36.0	. . . . . .	Suspension foible, qui devient nulle au coucher du soleil.
. . . .	. . . .	. . . . . .	Suspension nulle, dépression changée.
. . . .	. . . .	. . . . . .	Horizon oscillant.
21 5	32.0	. . . . . .	Suspension très-remarquable, la plus forte qu'ait observée Humboldt. Sécheresse excessive; la Boracha toute en l'air, quoiqu'elle ait plus de 1° 10′ de large; de petites barques de pêcheurs nageant en l'air et vues doubles; la Picuita double aussi ce jour-là, à plusieurs reprises.

de la mer. Commençons donc par discuter les observations qui se rapportent à cet horizon.

La hauteur de l'observateur au-dessus du niveau de la mer étant de 8.094 mètres, la dépression vraie de l'horizon, indépendamment de toute réfraction, devroit être de 5′ 29″, c'est-à-dire plus foible que toutes les précédentes,

par conséquent, dans tous ces cas, la réfraction a été négative, et les trajectoires décrites par les rayons lumineux étoient, au moins dans leur partie inférieure, convexes vers la surface des eaux.

Les phénomènes de la suspension ont eu lieu dans leur plus grande intensité le 24 septembre, c'est le seul jour où l'on ait observé le renversement, mais aussi c'est le jour où la dépression de l'horizon a été la plus grande, ce qui est conforme à la théorie.

En effet, conservant les dénominations de la page 152, la tangente de la dépression de l'horizon apparent, pour de très-petites hauteurs, est donnée par la formule

$$tang.\ I' = \sqrt{2\ s - m.\left(\frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}\right)}$$

Et comme, dans le cas actuel, la densité (ϱ), dans la station inférieure, est moindre que dans la supérieure, la dépression apparente est plus grande que la dépression vraie dont la tangente seroit exprimée par $\sqrt{2\ s}$. Lorsque l'angle I augmente, (r) et r restant les mêmes, c'est que la différence $\varrho - (\varrho)$ des densités extrêmes devient plus considérable, et alors, comme on l'a démontré plus haut, les effets du mirage doivent devenir sensibles pour les objets plus rapprochés, et l'espace où le renversement est possible se trouve agrandi.

On doit remarquer encore que la base apparente de l'île Picuita ne s'est pas toujours trouvée au-dessus de l'horizon apparent de la mer. Elle est quelquefois descen-

due à la même hauteur, par exemple, le 5 septembre, au coucher du soleil. Alors l'île a dû paroître reposer sur l'horizon. Quelquefois même la base de l'île a paru au-dessous de l'horizon apparent de la mer, comme le 4 septembre, alors on a dû apercevoir la surface de la mer un peu au-delà de l'île. Dans tous ces cas les trajectoires des rayons lumineux étoient convexes vers la mer, au moins dans leur partie inférieure, comme la dépression de l'horizon le prouve; mais le point de tangence de la trajectoire limite sur la surface de la mer étoit plus ou moins éloigné de l'observateur, et c'est ce qui produisoit les variétés observées dans la suspension des îles, qui se trouvoient tantôt au-delà de cette limite, tantôt en deçà.

On peut faire des remarques semblables sur les observations de Legentil dans l'Inde. Pendant tout un hiver cet astronome vit le soleil se lever *au-dessus* de l'horizon apparent de la mer, d'une quantité qu'il estimoit à 4 ou 5′ de degré. Selon notre théorie, le soleil se levoit alors au-dessus de la caustique qui couvroit les extrémités de la mer, et ce phénomène ne pouvoit avoir lieu sans que l'horizon apparent de la mer fût abaissé au-dessous du véritable. C'est ausi ce qui avoit lieu réellement. Car Legentil donne sa hauteur au-dessus du niveau de la mer de 46 pieds ou un peu moins de 15 mètres. Pour cette hauteur, la dépression de l'horizon vrai est de 7′ 27″.

Or la dépression apparente observée par Legentil, à plusieurs reprises et dans plusieurs jours différens, à l'instant du lever du soleil, étoit	10′ 10″
Erreur de collimation moins la demi-épaisseur du fil	— 1′ 58″
Dépression apparente de l'horizon de la mer à l'instant du lever du soleil.	8′ 52″
Dépression calculée	7′ 27″
Excès de la dépression apparente	1′ 25″

Et cet excès de la dépression apparente devroit être encore plus considérable, si on pouvoit en ôter la partie de la trajectoire soumise à la réfraction ordinaire qui, d'après nos observations de Dunkerque, devoit être déjà très-sensible à la hauteur de 46 pieds. Ainsi, dans ces circonstances, on peut affirmer que la réfraction étoit négative, dans les couches d'air inférieures très-voisines de la surface des eaux.

Legentil a constamment observé qu'à l'instant même du lever du soleil, lorsque le premier rayon de cet astre commençoit à paroître, l'horizon apparent de la mer s'abaissoit subitement d'environ 36″. Ceci semble indiquer un accroissement subit de température dans la couche d'air contigue à la surface des eaux. Pour expliquer ce phénomène, il faut remarquer que les rayons solaires en traversant l'atmosphère ne sont pas tous absorbés par les molécules qui la composent; une partie même sous forme de chaleur rayonnante, paroît traverser l'atmosphère sans obstacle sensible jusqu'à ce qu'elle rencontre un corps liquide ou solide, capable de l'absorber. Or, à l'instant où le soleil paroît sur l'horizon, ces deux causes se réunissent pour élever d'une petite quantité la

température de la couche supérieure de la mer, et celle-ci à son tour doit échauffer un peu la couche d'air qui lui est contigue. De là résulte une plus grande différence entre la température des couches supérieures et inférieures de l'air, et par conséquent un abaissement de l'horizon apparent.

Les variations de température qui se produisent au lever et au coucher du soleil doivent être très-fréquentes et très bizarres, car elles doivent dépendre du plus ou moins de transparence de l'air, de la quantité des vapeurs aqueuses qui y sont suspendues sous forme de brouillard et de plusieurs autres causes accidentelles. Aussi M. de Humboldt y a-t-il observé de grandes variations.

Par exemple dans l'extrait de ses observations, du 5 septembre, je trouve cette remarque. « Au coucher du » soleil même la Picuita Baissa, ne fut plus suspendue, » mais la dépression changea beaucoup :

» Au moment du coucher	90° 6′ 33″
» Dans le crépuscule	90° 6′ 10″
» Plus tard	90° 6′ 57″

Il n'y a pas d'erreur dans ces observations, ajoute M. Humboldt, car le signal de vérification resta à la même hauteur tandis que l'horizon dansoit. Ces variations furent encore plus sensibles le 24 septembre le jour où le mirage fut aussi le plus sensible, car l'horizon dansoit trois ou quatre fois dans une heure de 90°. 7′. 44″ à 90° 10′ 32″, sans que les instrumens météorologiques indiquassent aucune variation.

Lorsque Legentil observoit à Pondichéry, il remarqua

que les phénomènes de réfractions extraordinaires qui accompagnoient le lever du soleil et dont nous parlerons tout à l'heure, n'avoient jamais lieu que pendant l'hiver; l'été, le soleil se levoit à l'horizon même de la mer sans présenter aucun de ces phénomènes. La raison de cette différence est sensible. La température de la mer loin des côtes représente à peu près, dans tous les pays, la température moyenne de l'air pendant toute l'année. Ainsi, la mer en été doit être communément plus froide que l'air; en hiver elle doit être plus chaude. C'est ce que M. Woltman a constaté à Cuxhaven, par des observations suivies, qui avoient pour objet l'influence de ce fait sur les réfractions extraordinaires. Ceci doit être vrai surtout sous le climat de l'Inde, où la température est si égale et éprouve des variations si lentes. Or, en été, l'air étant plus chaud que la mer, la densité des couches d'air doit décroître de bas en haut, dans le sens ordinaire, même dans les couches inférieures qui sont contigues à la mer; alors le phénomène des doubles images, ou même celui de la suspension ne doit pas se produire. Le soleil doit se lever à l'horizon même de la mer qui n'est autre que l'horizon vrai prolongé et élevé par la réfraction.

Au contraire en hiver le contact des eaux réchauffant la couche inférieure de l'atmosphère, y produira les phénomènes de réfraction extraordinaire que nous avons décrits dans ce mémoire, et l'horizon apparent s'abaisse au-dessous de l'horizon vrai comme nous l'avons dit.

Nous pouvons donc considérer à Pondichéry, l'horizon

d'été comme l'horizon véritable. La différence de 5 ou 6 degrés de Réaumur qui existe entre la température de l'été et celle de l'hiver, selon le témoignage de Legentil, doit y produire un petit changement qui élevera cet horizon de 43 où 44″. Or, Legentil a trouvé que, pendant l'été, le bord supérieur du soleil, employoit 59 secondes de temps depuis l'instant de sa première apparition jusqu'à l'instant de son contact avec le fil horizontal du quart de cercle placé sur 0° 0′, tandis que dans l'hiver il n'employoit que 35 secondes pour parvenir au même fil. La différence 24 secondes de temps exprime donc, à fort peu près, l'excès d'élévation du point où le soleil paroissoit en hiver, parce qu'à Pondichéry les parallèles décrits par cet astre sont très peu obliques à l'horizon. Or ces 24 secondes de temps répondent à 5′ 17″ de degré; car selon les observations de Legentil, le soleil dont le diamètre est en janvier de 32′ 36″, employoit communément pour se lever 2′ 28″; or, 5′ 17″ sont beaucoup plus que ne pourroit produire la réfraction ordinaire pour une diminution de température de 5 ou 6 degrés de Réaumur. Il est donc prouvé par là qu'en effet le soleil se levoit sur la caustique et au-dessus de la surface même de la mer, conformément à notre théorie.

On voit aussi que ces circonstances supposent nécessairement une trajectoire convexe, vers la mer dans les points où elle s'approche de sa surface. Par conséquent la réfraction totale conclue de ces observations, faites en hiver, doit être trop petite; aussi, en les calculant, M. Delambre a-t-il trouvé :

Réfraction horizontale par les réfractions d'été où les réfractions ordinaires sont seules agissantes	34′ 12″
Par les observ. d'hiver affectées de la réfraction extraordinaire . .	32′ 26″
Différence	1′ 46″

C'est-à-dire que les premières sont plus fortes. M. Delambre en fait la remarque et s'en étonne avec raison; mais la cause en est évidente d'après notre théorie.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'époque de l'apparition du soleil et la hauteur à laquelle il commence à paroître sur l'horizon; mais les mêmes causes doivent influer sur les apparences que son disque présente quand il se lève et quand il se couche. Tant que cet astre se trouvera au-dessus de la trajectoire limite, il n'enverra qu'une seule image qui sera directe, mais aussitôt que son bord inférieur touchera la trajectoire limite, on commencera à voir en *M* (*fig.* 27), c'est-à-dire à l'horizon apparent, un point brillant qui sera le commencement de la réflexion. Ce point sera l'image du point le plus bas du disque du soleil, et sera placé dans le même vertical que lui. A mesure que le bord du soleil pénétrera dans l'espace où la réflexion est possible, l'image réfléchie de ce bord augmentera, et il se formera en *M* un segment semblable, mais renversé, et cet effet continuant toujours, on croira voir un second soleil sortir de l'horizon et aller au devant du véritable (*fig.* 28). Ces deux soleils s'atteindront et viendront en contact lorsque le véritable atteindra la surface caustique au-dessous de laquelle les objets cessent d'être aperçus (*fig.* 29).

Alors les phénomènes changeront. A mesure que le vrai soleil pénétrera dans cette surface, il paroîtra s'échancrer par son bord inférieur et se réunir à l'autre soleil. Leur commune section ne sera pas une ligne droite, mais une ligne courbe, convexe vers la terre et relevée par ses extrémités, de sorte que le faux soleil paroîtra refluer à droite et à gauche sur le véritable (*fig.* 30 et 31). Ces phénomènes continueront jusqu'à ce que le bord supérieur du soleil vrai atteigne la trajectoire limite ; alors le bord inférieur du faux soleil sera entièrement formé et paroîtra tangent à l'horizon. Le soleil vrai descendant toujours, son bord supérieur s'abaissera au-dessous de la trajectoire limite ; alors le bord inférieur du faux soleil, image du bord supérieur réel, paroîtra quitter l'horizon pour continuer à s'élever et à se pénétrer avec l'autre (*fig.* 32). Par suite de cette pénétration mutuelle, les deux soleils iront en diminuant de grandeur. Enfin quand ils seront totalement réunis, ils ne formeront plus qu'un point lumineux arrondi, qui disparoîtra subitement sur la surface caustique et par conséquent au-dessus du faux horizon, que l'on prendra pour l'horizon réel. Ces apparences sont tout-à-fait semblables à celles de l'homme représenté dans la figure 9.

Les mêmes phénomènes se reproduiront en sens contraire au lever du soleil. Cet astre ne commencera à être sensible, que lorsque ses premiers rayons deviendront tangens à la surface caustique. Alors on apercevra un point brillant qui paroîtra tout à coup au-dessus de l'ho-

rizon apparent de la mer, et à une certaine distance de l'horizon. Ce point sera accompagné de son image réfléchie : il sera réellement double ; mais ces deux images se touchant sur la surface caustique, on ne pourra pas les distinguer l'une de l'autre. Le soleil continuant à se lever, le point lumineux s'agrandira. Le bord supérieur du disque commencera à se former, en même temps l'image réfléchie de ce bord augmentera et s'approchera de l'horizon de la mer, Mais le vrai soleil s'élevant toujours, son bord inférieur finira par se détacher de la surface caustique. A cet instant le vrai et le faux soleil se dédoubleront. Le disque apparent inférieur et le disque réel supérieur continueront à se séparer. Le premier paroîtra refluer à droite et à gauche vers l'horison de la mer. Enfin ils se quitteront tout-à-fait. Le point de leur séparation se trouvant sur la surface réfléchissante, sera plus haut que l'horizon apparent de la mer ; et tandis que le soleil vrai continuera à s'élever, après cette séparation, son image renversée s'abaissant, offrira l'apparence d'un second soleil, qui rentrera sous l'horizon apparent de la mer.

Ces phénomènes que nous venons de déduire de la théorie, ont été observés par Le Gentil, à Pondichéry dans l'Inde, et en France sur les côtes de Normandie. Il les a suivis à Pondichéry pendant un hiver entier avec beaucoup d'attention, sans pouvoir en découvrir la cause, quoiqu'il en mesurât toutes les circonstances avec la pendule et le quart de cercle. Il étoit naturel, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il ne les vît point dans l'été, lors

que la chaleur de l'air est plus grande que celle de la mer, et qu'il les ait observés pendant l'hiver, lorsque la chaleur de la mer surpasse celle de l'air. La constance et l'égalité du climat de l'Inde, en laissant à cette cause toute son influence, faisoient qu'il les voyoit tous les jours, tandis qu'ils doivent être moins constans dans nos climats où les variations de l'atmosphère peuvent les amener en toute saison. Aussi ne les observa-t-il que deux fois sur les côtes de Normandie, pendant un assez long séjour. Legentil a décrit ces phénomènes avec beaucoup de détail *dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour* 1774 *et* 1789; et quiconque voudra comparer sa description à la nôtre, les trouvera d'accord en tout point. Ce qui étonnoit surtout Le Gentil, c'étoit de voir le soleil, en hiver, se lever constamment au-dessus de l'horizon de la mer, *comme s'il sortoit du chaos*, ce sont ses expressions; et sur ce fait qu'il avoit observé tant de fois, il établissoit les hypothèses les plus bizarres, supposant que, pendant l'hiver, l'air contigu à la surface de la mer éprouve une condensation si forte, qu'il arrête la lumière du soleil, et forme comme un second horizon faux, plus élevé que le véritable d'une quantité qui à Pondichéry étoit de 4 ou 5 minutes de degré. Il avoit même remarqué que la réfraction ordinaire sur ce faux horizon, étoit moindre qu'à l'horizon véritable, et il en tiroit des conséquences contre l'observation des Hollandois dans la nouvelle Zemble. Mais ces phénomènes s'expliquent par notre théorie, comme on vient de le voir, sans aucune difficulté, et le second horizon de Le-

gentil, loin d'être formé par de l'air condensé, l'est au contraire par de l'air raréfié, qui forme sur la surface de la mer une enveloppe au-dessous de laquelle aucun point ne peut être aperçu.

Ces phénomènes ont aussi été aperçus par le second Cassini, en allant de Portosino à Livourne. Les figures que j'en ai données dans le mémoire, sont exactement calquées sur celles que nous avons trouvées dans les manuscrits déposés à l'Observatoire. De sorte que par cela même on peut encore juger que pour expliquer ces phénomènes, je n'ai eu besoin d'y faire aucune altération.

Si les différences de densité des couches atmosphériques restoient constantes pendant que le soleil s'abaisse, le temps qui s'écoule entre l'instant où la réflexion commence, et celui où les deux images se touchent, seroit égal au temps qu'emploieroit le bord inférieur du faux soleil pour remonter de l'horizon apparent jusqu'au soleil vrai. Mais à cause des variations continuelles qui surviennent dans la température de l'air inférieur à l'instant du coucher du soleil, ce rapport ne peut point s'observer. Car, par l'effet de ces variations, la dépression de l'horizon apparent de la mer, ou plutôt du point que l'on prend pour cet horizon, doit changer sans cesse avec de grandes irrégularités. C'est aussi ce que Legentil a remarqué dans ses observations de l'Inde. La seule apparition du premier rayon solaire, faisoit baisser l'horizon apparent d'une quantité qui alloit quelquefois jusqu'à 36 secondes de degré. Le contraire arrive le soir lorsque le soleil se

couche, et l'horizon apparent s'élève avec de grandes irrégularités. C'est ce que l'on voit dans les observations de M. de Humboldt à Cumana, où ces changemens étoient si bizarres que, suivant son expression, il sembloit que l'horizon dansoit. Cette grande influence des rayons solaires sur la température des couches inférieures de l'air au lever et au coucher du soleil, paroît s'accorder avec une observation bien curieuse de Saussure, c'est que la plus grande différence entre le thermomètre à l'ombre et le thermomètre au soleil ont lieu le matin et le soir.

Il peut même arriver, par l'effet de ces irrégularités, que le phénomène des doubles images commence à se produire sans qu'il continue jusqu'à la fin, c'est-à-dire, par exemple, que le soir la seconde image peut commencer à se former, et ne pas se former entièrement. Considérons, par exemple, le cas où le faux soleil réuni par le haut au soleil véritable, ne forme plus avec lui qu'un seul disque arrondi dans sa partie supérieure, et coupé inférieurement par l'horizon apparent de la mer. (Voyez *fig*. 32.) Ce cas arrivera le soir, lorsque le bord supérieur du vrai soleil, descendant vers la mer, n'a pas encore atteint la trajectoire limite, et ne donne pas encore de double image, ce qui fait que le faux soleil semble encore coupé par l'horizon. Si alors, par l'effet de l'abaissement subit de la température, l'horizon apparent se relève jusqu'à atteindre l'horizon vrai, le bord supérieur du vrai soleil n'atteindra point la trajectoire limite qui s'abaissera devant lui,

l'image réfléchie de ce bord ne se formera donc pas, et le disque réel accompagné de la portion de son image réfléchie dont l'étendue diminue sans cesse, viendront disparoître ensemble, aux limites de l'horizon, revenu lui-même à sa véritable hauteur. Ce cas paroît être un de ceux que Legentil a observés sur les côtes de Normandie, car il vit deux jours de suite, au coucher du soleil, l'image du bord inférieur se former au-dessous du disque réel, à l'horizon même de la mer, puis venir, en se levant, se réunir à lui, et le tout diminuant peu-à-peu, disparoître à l'horizon même de la mer sans aucune image réfléchie du second bord. Ce ne fut que le troisième jour que l'on vit aussi cette dernière image; mais aussi sa disparution totale se fit au-dessus de l'horizon apparent de la mer, conformément à notre théorie. Il est fâcheux que Legentil n'ait pas mesuré les hauteurs de l'horizon apparent de la mer dans ces diverses circonstances. Il est bien probable que, dans le cas où la seconde image parût complète, il auroit trouvé l'horizon apparent plus abaissé que les jours précédens où cette image ne se formoit point; et ces jours-là, sans doute, il auroit vu l'horizon apparent s'élever graduellement en revenant à l'horizon vrai.

Enfin, lorsque l'on observe des réfractions extraordinaires produites par les causes que nous venons d'assigner, il peut et il doit souvent arriver que la couche d'air inférieure qui repose sur la surface de la mer, n'a pas partout la même densité. En effet, la profondeur plus ou moins considérable de la mer, les courans, les agita-

tions locales de l'air, et mille autres causes analogues, doivent troubler sans cesse et détruire cet état d'uniformité, de température et de sphéricité des couches que nous avons supposé. Ces circonstances, en compliquant la forme des caustiques, et les rendant variables d'un instant à l'autre, doivent varier aussi les images de mille manières, multiplier leur nombre et produire une infinité d'accidens bizarres de réfractions extraordinaires, qui seront surtout sensibles vers le coucher du soleil, au moment où cet astre est près de quitter l'horizon. Tels sont, par exemple, ceux que l'on voit rapportés dans les *fig.* 33, 34 et 35. La première série a été observée par Cassini le fils, au lever du soleil, le 17 décembre 1698, et calquée sur ses dessins, que nous avons retrouvés à l'Observatoire. Les deux autres ont été observées par Mathieu et moi, à Dunkerque, au coucher du soleil. Cet allongement subit du bord inférieur qui commence le phénomène (*fig.* 34 *bis*) et qui fait ressembler le soleil à une poire, répond à l'instant où il entre dans les couches de réfraction négative où les trajectoires ne se coupent point encore, mais abaissent seulement les objets. Plus tard, le bord inférieur arrive dans l'espace où se fait le renversement, et, selon la forme de la caustique, il donne des images doubles ou multiples. En même temps le haut du disque, inégalement abaissé par la réfraction négative, se déprime sur les bords plus qu'à son sommet, et prend la forme d'un toit, comme le montre la *fig.* 35. Enfin, lorsque le disque presque entier s'est plongé sous la caustique et qu'il n'en reste plus au-dessus qu'une

portion très-petite, cette portion, agitée par les ondulations de la couche inférieure, éprouve des oscillations excessives qui tantôt l'augmentent, la diminuent ou la font en partie disparoître, jusqu'à ce qu'enfin arrivée elle-même dans la couche inférieure, et présentant l'apparence rapportée dans la *fig.* 35 *g*, elle s'évanouit comme une vapeur lumineuse semblable aux légers nuages que le soleil dore encore de ses rayons quand il a déjà disparu pour nous.

Je crois pouvoir expliquer par la même théorie les phénomènes des triples images, observés par M. Vince et dont j'ai déjà parlé plus haut. Quand je dis expliquer, j'entends ramener ces phénomènes à une même cause, à une même forme de caustique, telle que la disposition des images, et leur marche relative quand elles s'abaissent ou qu'elles s'élèvent, soient des conséquences nécessaires de la forme supposée. Car admettre, comme l'a fait M. Vince, autant de lois différentes de densité qu'il y a d'images visibles, ne me paroît point une explication satisfaisante, puisque les mouvemens respectifs des images restent arbitraires; tandis que, d'après la description qu'il en donne, ces mouvemens avoient entre eux des rapports déterminés.

Malheureusement M. Vince n'a pas observé l'élément le plus nécessaire pour l'explication de ces phénomènes, je veux dire la dépression apparente de l'horizon de la mer. De sorte que l'on ne peut pas affirmer *a priori*, si les trajectoires, dans leur partie inférieure, étoient concaves ou convexes vers la surface des eaux. Cependant

je crois pouvoir conclure qu'elles étoient convexes d'après plusieurs raisons que je vais développer.

M. Vince remarque dans son Mémoire que le jour où les phénomènes parurent, la chaleur avoit été excessive : c'étoit le 1er avril 1798. En observant pour ce jour-là la marche du thermomètre observé à Londres, on voit en effet qu'à 7 heures du matin le thermomètre extérieur marquoit 64° de Fareinheit ou 17.78 de l'échelle centésimale, tandis qu'à 2 heures il marquoit 82° de Fareinheit ou 27.78. La plus forte chaleur du jour fut de 28.33, par conséquent peu différente de la précédente; et le lendemain le thermomètre ne s'éleva pas à beaucoup près à la même hauteur. Ainsi, pendant l'observation du phénomène, qui se fit depuis 4 heures $\frac{1}{2}$ du soir jusqu'à 8 heures, la température de l'air devoit avoir considérablement diminué, surtout dans les couches supérieures, par l'effet de l'abaissement du soleil. Mais la surface de la mer n'avoit pas dû se refroidir aussi vite. Elle pouvoit donc alors et devoit probablement se trouver plus chaude que l'air, ce qui donne des trajectoires convexes dans leur partie inférieure, et une densité croissante du bas en haut, jusqu'à une petite hauteur ; après quoi l'influence de la mer devenant moins sensible, la densité devoit aller de nouveau en diminuant comme à l'ordinaire, et probablement suivant une loi beaucoup plus rapide, tant à cause de l'abaissement subit de la température, qu'à cause de la chute des vapeurs aqueuses qui devoit en résulter, et qui par leur accumulation et par le froid qu'elles produisoient en se

précipitant pouvoient contribuer à augmenter la réfraction dans les couches qu'elles traversoient. Ces conjectures sont confirmées par plusieurs remarques de M. Vince lui-même. Il a vu plusieurs fois des images partielles de la mer se montrer, par places, au-dessus de l'horizon apparent. Tantôt elles paroissoient ou disparoissoient tout-à-coup, ou bien elles se mouvoient parallèlement à l'horizon avec beaucoup de rapidité. Ces portions de la mer qui se découvroient ainsi, pour quelques instans, semblent bien indiquer qu'elles n'étoient auparavant cachées que par la surface caustique qui s'étendoit au-dessus d'elle, et qui s'abaissoit ou s'entr'ouvroit par l'effet de quelque variation atmosphérique. M. Vince remarque aussi qu'à une certaine époque de l'observation, il a vu un épais brouillard se mouvoir le long de l'horizon avec beaucoup de rapidité, en offrant des ondulations semblables à celles de la fumée d'une cheminée. Mais ce prétendu brouillard que M. Vince suppose venu de l'autre côté de l'horizon, et qu'il imagine être une cause de ces réfractions extraordinaires n'étoit, si je ne me trompe, rien autre chose que les vagues mêmes de la mer, qui, dans leurs ondulations, élevoient de temps en temps leurs sommets jusqu'à la hauteur de la caustique de manière à y produire les images vagues d'un brouillard nuageux. Dans nos observations de Dunkerque, nous avons souvent, M. Mathieu et moi, aperçu de pareilles images qui sont représentées *fig.* 36, et les premières fois que nous les vîmes nous ne pouvions absolument nous expliquer ce qui pouvoit les occasionner, ni comment elles se

montroient ainsi au-dessus de l'horizon apparent. Mais en suivant cet horizon depuis le large où il étoit moins abaissé par la réfraction extraordinaire qui n'étoit dans toute sa force que sur le sable, nous découvrîmes enfin que ces apparences nuageuses n'étoient que le prolongement de l'horizon même, et qu'elles se montroient dans les points où la caustique, par l'effet des ondulations du sol, s'élevoit presque à la hauteur de cet horizon. Dans la figure citée HH' est l'horizon de la mer au large, hh' est l'horizon apparent sur le sable, formant avec un saut brusque la continuation du précédent. Souvent aussi une autre cause produisoit des apparences vaporeuses, semblables à des nuages jaunâtres suspendus dans l'air (voyez *fig.* 60). C'étoient des sommets de dunes qui s'élevant très-peu au-dessus de la caustique présentoient outre leur image directe une image renversée, dont les contours arrondis paroissant suspendus dans l'air complétoient pleinement l'illusion. Mais ces images de sable étoient immobiles, excepté dans les portions de leurs bords qui se trouvant à la hauteur de la caustique, participoient aux ondulations continuelles de la couche d'air inférieure, au lieu que les images d'eau produites par les vagues de la mer étoient mobiles comme elles et sembloient continuellement agitées.

Je tire encore des observations mêmes une autre preuve que les trajectoires n'étoient pas convexes dans toute l'étendue de leur cours, comme cela auroit eu lieu s'il n'y avoit eu dans l'air qu'un seul état de densité décroissante de haut en bas. Cette preuve consiste en ce que les

deux images supérieures dont la plus haute étoit directe et l'autre renversée, ont été plusieurs fois complètes, c'est-dire que le vaisseau y étoit représenté tout entier depuis le sommet des mâts jusqu'au corps même du bâtiment. Or, d'après les expériences que nous avons faites sur le sable à Dunkerque, si ces deux images eussent été données par des trajectoires entièrement convexes vers la mer, ces trajectoires eussent nécessairement formé une caustique qui se seroit élevée au-dessus de la surface de la mer à mesure qu'elle s'éloignoit de l'observateur. Cette caustique auroit donc caché de plus en plus les parties inférieures du vaisseau à mesure qu'il s'éloignoit, et par conséquent les deux images de ce vaisseau n'auroient pas été complètes, non plus que celles de l'homme représenté dans la *fig.* 9.

On peut encore prouver par les observations de M. Vince que la caustique n'étoit pas formée d'une branche unique, mais de deux branches distinctes réunies par un point de rebroussement et dont la plus basse alloit continuellement en s'approchant de la surface de la mer à mesure qu'elle s'éloignoit de l'observateur. Car puisque M. Vince a vu des images complètes de vaisseaux qui se touchoient par le corps même du bâtiment, il falloit bien qu'alors le vaisseau reposât sur la caustique; et comme il en a vu aussi d'autres qui se touchoient par le sommet des mâts, il falloit bien qu'alors le vaisseau se trouvât sous la caustique et la touchât par le sommet de ses mâts. Enfin, puisque les images d'un même vaisseau données par ces deux branches s'écartoient continuellement l'une de l'autre, à

mesure que le vaisseau s'éloignoit, les deux branches de la caustique s'éloignoient donc aussi l'une de l'autre; ce qui indique une forme semblable à celle de la *fig.* 21 ou à toute autre analogue qui seroit donnée par la combinaison de deux décroissemens de densité contraires.

Cette conséquence déduite immédiatement des observations, s'accordant avec l'état décroissant de la température, et avec toutes les apparences que nous avons discutées, je crois pouvoir admettre comme une chose très-probable que, par l'excès de chaleur de la mer, à l'époque où a observé M. Vince, les couches inférieures de l'air se trouvoient dans un état de densité croissante de bas en haut, jusqu'à une petite hauteur, au-dessus de laquelle les densités alloient de nouveau en décroissant par suite de l'abaissement de la température, avec assez de rapidité pour donner des images par en haut. D'après les élévations données par M. Vince, nous devons placer l'observateur dans ces couches supérieures, car il dit avoir observé le phénomène à 25 et à 80 pieds de hauteur. Nous avons déjà examiné précédemment les combinaisons de ces deux états contraires, et l'on a vu qu'elle explique très-aisément les images multiples observées au Desierto de las Palmas et à Cullera, phénomènes qui paroissent avoir le plus grand rapport avec ceux que M. Vince a décrits. Nous supposerons donc, conformément à l'endroit cité, que la caustique avoit une forme VRV', *fig.* 38, analogue à celle de la *fig.* 21. Soit AMH la circonférence de la terre, O l'observateur, OMV la trajectoire limite tangente à la sur-

face de la mer. Il s'agit d'examiner les phénomènes résultans de cette loi.

Considérons d'abord un vaisseau placé en *SQ* un peu au-delà de l'horizon apparent, et supposons que cette portion soit très-voisine du point de rebroussement *R*. La trajectoire limite *OMV* coupera la partie inférieure du vaisseau par sa seconde branche et tout ce qui se trouvera au-dessous de cette branche sera invisible directement, mais la partie supérieure enverra par la branche de caustique *TV*, une image (*A*) qui sera droite puisqu'elle sera donnée par des trajectoires qui se coupent au-delà de l'objet. Cette image terminée inférieurement par la trajectoire limite *OMV* paroîtra reposer sur l'horizon. En même temps la partie *SP* du sommet des mâts, qui s'élevera au-dessus de l'autre branche *RV'* de la caustique pourra envoyer par les arcs *TR* et *RP* une image (*B*) renversée plus élevée que la précédente, et une image droite (*C*) encore plus haute par l'arc *PV'*. A mesure que le vaisseau s'éloignera, la seconde branche de la trajectoire limite le coupera à une plus grande hauteur. Ainsi la partie visible de *SQ* diminuera successivement, comme si (*A*) descendoit sous l'horizon : en même temps (*B*) et (*C*) paroîtront monter, parce que les trajectoires qui les donnent ayant leurs points de tangence sur des points plus bas de l'arc *RV'* s'éleveront davantage dans le milieu supérieur. Enfin si le vaisseau s'éloignoit toujours, la branche inférieure *RV'* de la caustique s'abaissant de plus en plus vers la mer, l'image (*A*) sera réduite au sommet des mâts ; les deux images

(*B*) et (*C*) seront complètes ou presque complètes et reposant sur la même caustique se toucheront toujours; et si la branche RV' rase d'assez près la surface de la mer, les points communs aux deux images pourront faire partie du corps même du bâtiment. Alors les deux images (*B*) et (*C*) sembleront se toucher par la quille; mais en même temps elles paroîtront fort élevées au-dessus de (*A*) et sembleront suspendues dans le ciel. C'est ce que représente la *fig.* 39 qui est précisément la *fig.* 1 de M. Vince.

Supposons maintenant que, par l'effet de quelque variation atmosphérique ou par un défaut de sphéricité des couches, il y ait quelque partie de l'espace où la branche inférieure RV' de la caustique pénètre l'intérieur de la mer. Alors si le vaisseau est plus éloigné que cette limite, les deux images (*B*) et (*C*) ne reposeront plus sur la caustique qui les donne; par conséquent elles se sépareront, en restant toujours élevées au-dessus de l'horizon apparent, et l'on verra la mer entre deux. C'est le cas de la *fig.* 41 qui est la *fig.* 4 de M. Vince, et les mouvemens qu'il a observés dans les images, ainsi que leur accroissement successif, sont aussi conformes à ce qui précède.

La supposition que nous venons de faire sur la non sphéricité des couches n'est point gratuite, car M. Vince remarque que des vaisseaux également élevés au-dessus de l'horizon apparent présentoient des apparences très-diverses, souvent plusieurs images, comme nous venons de le dire, quelquefois deux seulement, l'inférieure constamment droite, la supérieure renversée, d'autrefois

enfin on n'en apercevoit qu'une seule directe et reposant sur l'horizon. Les côtes de Calais qui présentoient aussi des phénomènes analogues, offroient aussi les mêmes variétés, quelquefois on les voyoit doubles, un instant après elles étoient invisibles. Toutes ces apparences sont contraires à l'idée d'une sphéricité parfaite des couches d'air qui produisoient ces phénomènes, et l'on conçoit en effet qu'étant le résultat d'un équilibre non stable, ils peuvent difficilement s'accorder avec une forme constante.

Le voisinage des terres qui s'échauffe toujours plus que la surface de la mer est une cause très-propre à altérer ainsi la sphéricité des couches d'égale densité. Les observations de M. de Humboldt à Cumana, en offrent un exemple remarquable. En observant la suspension d'une grande île appelée *la Boracha*, il a constamment remarqué que les deux bords de cette île étoient inégalement relevés. Du côté nord la partie suspendue avoit plus de cinq minutes de longueur, dans le sens horizontal; du côté sud elle avoit à peine 2'. Mais aussi le côté nord regarde l'Océan, tandis que le côté sud regarde le Continent et est très-rapproché de la petite île *Picuita*. Par suite de cette disposition la température de l'air du côté nord de l'île en temps calme, est plus basse que du côté sud, suivant M. de Humboldt, de 1 ou 2 degrés. Mais la température des eaux qui baignoient les rivages étoit à-peu-près la même des deux côtés de l'île. Ainsi lorsque la mer étoit plus chaude que l'air dans ces parages, la différence des températures extrêmes de l'eau et de l'air devoit être toujours moindre du côté sud que du

côté nord, d'où résulte une moindre réfraction négative, et par conséquent une plus petite suspension.

De même, dans les observations de M. Vince, le décroissement de la température au-dessus des terres au lieu où il étoit placé, devoit être moins rapide qu'au dessus de la surface de l'Océan. Cette circonstance ou d'autres variétés locales pouvoient empêcher quelques-unes des trajectoires menées au-dessus de l'observateur, d'avoir leur *maximum* en avant de lui, tandis que d'autres plus élevées et devant avoir leur *maximum* plus loin que les précédentes, au-dessus de la surface de la mer, finissoient par l'atteindre, et redescendoient ensuite dans les couches inférieures. Si cet effet avoit lieu, il devoit faire évanouir la portion de caustique correspondante aux trajectoires dont il s'agit, c'est-à-dire une partie de la branche RV'. Alors l'image droite supérieure (C) ne pouvoit pas se former d'abord, mais seulement quand le vaisseau étoit assez éloigné pour que les trajectoires dirigées vers V' tombassent sur une portion de caustique réelle, au lieu que l'image (B) se formoit encore, par des trajectoires plus basses, au moyen de l'arc antérieur RP et de son prolongement suivant la trajectoire tangente en P. On devoit donc alors ne voir que deux images, l'une (A) inférieure et droite reposant sur l'horizon, l'autre (B) supérieure à la première et renversée. C'est le cas des *fig.* 40 et 40 *bis*, qui répondent aux *fig.* 2 et 3 de M. Vince. Comme les deux images se touchent, il falloit que la branche de caustique PRV se trouvât à peu près à la hauteur du sommet des mâts; mais ces figures elles-mêmes montrent que les couches d'égale densité n'étoient pas

sphériques, puisque dans la première où l'image (*B*) est déjà toute formée, (*A*) repose encore tout entier sur l'horizon apparent, tandis que dans la seconde où (*A*) est déjà descendu sous l'horizon, l'image (*B*) ne commence qu'à se former. Cette image, suivant la remarque de M. Vince, paroissoit et disparoissoit successivement, découvrant tantôt une plus grande partie du sommet du mât, tantôt une moindre. Il sembloit qu'elle s'élançât de bas en haut avec beaucoup de rapidité comme le rayon d'une aurore boréale. Ces remarques conviennent tout-à-fait à la position que nous attribuons au vaisseau près du pont *R* de rebroussement de la caustique, point dont la situation doit être variable dans une atmosphère ondulante. De plus dans cette *fig.* 40 *bis*, l'image supérieure (*B*) resta en contact avec (*A*) jusqu'à ce qu'elle fût formée complètement, et elle ne s'en sépara qu'après. Cela indique que la branche de caustique *RV* étoit à fort peu près circulaire dans cette étendue, et qu'ensuite elle alloit en s'élevant au-dessus de la surface des eaux, comme l'exige la marche des trajectoires. Enfin si, dans la *fig.* 41 on suppose un abaissement de la température, le point de contact de la trajectoire limite sur la mer s'éloigne de l'observateur, la seconde branche de cette trajectoire rencontre (*A*) à une moindre hauteur, de sorte qu'il semble monter sur l'horizon. En même temps l'image supérieure s'évanouit par l'effet de la même cause, on perd d'abord de vue le sommet des mâts, puis la quille, puis la mer, tandis que (*B*) donné par des trajectoires plus basses, s'abaisse vers (*A*) et vers l'horizon. C'est ainsi que la *fig.* 41 s'est défaite d'après les observations de M. Vince. Mais comme

nous n'avons malheureusement aucune mesure exacte du phénomène, nous devons borner ici ces considérations, et si nous avons pu tenter d'expliquer généralement les circonstances qui paroissent principales, ce seroit nous hasarder beaucoup que d'entreprendre aussi d'expliquer des variétés sur lesquelles nous n'avons aucuns renseignemens précis. Les deux remarques sur lesquelles M. Vince insiste le plus, sont, 1°. que ces phénomènes n'avoient lieu que pour les vaisseaux situés de l'autre côté de l'horizon; 2°. que plus (*A*) descendoit graduellement sous l'horizon, plus les images (*B*) et (*C*) paroissoient davantage et montoient; réciproquement, lorsque (*A*) montoit (*B*) et (*C*) descendoient. Ces deux circonstances générales sont, je crois, expliquées par ce qui précède d'une manière simple, et conformes à ce que d'autres expériences nous ont appris sur des phénomènes semblables. Le reste, par le défaut de données précises, n'est qu'une hypothèse propre à représenter les faits.

Rapports des dimensions des images. Explication de la suspension.

J'ai réuni dans ce paragraphe un grand nombre de phénomènes curieux que nous avons observés, M. Mathieu et moi, à Dunkerque, et dont nous avons pris des mesures exactes avec le seul répétiteur. Je les rapporterai dans l'ordre où ils se sont présentés à nous et tels que nous les avons décrits sur les lieux. J'essaierai, en les exposant, de montrer leurs rapports avec la théorie que j'ai

établie dans ce mémoire, et j'y ajouterai quelques développemens pour les phénomènes que nous n'avons pas encore considérés.

Lorsque nous aperçûmes pour la première fois ces phénomènes de réfraction extraordinaire, nous étions placés sur le sable, au niveau de la haute mer, un peu au sud du Risban. En regardant l'horizon dans l'ouest le rayon visuel passoit sur des plages sablonneuses qui formoient le prolongement de celle où nous nous trouvions. La vue, de ce côté, étoit terminée par une foule d'objets tels que des clochers, des maisons, des arbres, des dunes sablonneuses.

Étant sur le sable on apercevoit distinctement tous ces objets; mais au-dessous d'eux on apercevoit une ligne blanche horizontale très-distincte et en tout semblable à la lumière du ciel; ce qui produisoit le même effet que si les objets eussent été suspendus dans l'air : on ne voyoit distinctement au-dessous d'eux aucune image renversée.

La *fig.* 42, représente les phénomènes qui avoient lieu lorsque l'œil étoit élevé à 61 centimètres au-dessus du niveau du sol, à l'endroit où nous nous trouvions. *A* est un clocher sur la gauche, le plus voisin de nous; il n'étoit nullement suspendu, et l'on voyoit distinctement avec la lunette les maisons et les arbres jusqu'à son pied.

B est un autre clocher à droite du précédent dont on voyoit le sommet *B* et la partie *BB'*; mais entre *B'* et l'horizon apparent il y avoit l'intervalle aérien *FH* de

la couleur du ciel, mais plus brillant. La partie *BB'* étoit très-ondulante, surtout en *B'*, et en général les ondulations sur le sol étoient excessives. L'image *BB'* n'offroit qu'une masse obscure, noirâtre, bien terminée par le haut et sur les bords, mais sans distinction de parties qui pussent faire juger si une portion de cette image étoit le renversement de l'autre. *C* étoit une autre aiguille de clocher très-allongée; *aaaa* sont des têtes d'arbres qui paroissent aussi sans pieds.

Telles étoient les apparences qui avoient lieu lorsque l'œil étoit élevé à 61 centimètres au-dessus du sol environnant; mais ces apparences changeoient avec l'élévation de l'œil.

Par exemple, si l'on se levoit debout, l'œil étant environt à 1.8 mètre au-dessus du sol, on découvroit une plus grande partie des objets *B C*. Leur pied n'étoit plus suspendu en l'air, mais sur des terres qui auparavant étoient invisibles, et qui à leur tour sembloient suspendues au-dessus de l'horizon apparent dont elles étoient séparées par l'intervalle aérien *FH*. (Voyez *fig.* 43) En s'abaissant de nouveau les mêmes apparences se reproduisoient dans un ordre inverse. Les objets perdoient peu à peu de leur pied, et les terres qui leur servoient de base disparoissoient pour ne laisser voir que les apparences de la *fig.* 42. Cela étoit surtout sensible pour le petit édifice *D* qui se voyoit ainsi très-distinctement, dans le cas de la *fig.* 43; mais qui, lorsque l'œil s'approchoit du sol, se perdoit peu à peu, jusqu'à ce qu'il fût noyé dans la mer aérienne qui paroissoit au-dessus de l'horizon.

Ces changemens d'aspect produits pas les changemens de hauteur de l'œil s'expliquent aisément par la théorie exposée dans ce Mémoire. Lorsque l'œil s'abaisse, le point de tangence de la trajectoire limite sur le sol se rapproche de l'observateur, la caustique continue ou discontinue qui commence toujours à ce point de tangence se rapproche aussi ; et comme elle va continuellement et s'élevant sur le sol à mesure qu'elle s'éloigne, elle atteint alors et couvre des objets qui se trouvoient précédemment au-dessus d'elles, lorsqu'elle sortoit du sol dans un point plus éloigné. Si ensuite l'observateur s'élève de nouveau, le point de tangence de la trajectoire limite sur le sol et l'origine de la caustique s'éloignent. Alors les mêmes apparences doivent donc se reproduire en sens inverse, et l'on revoit des objets qui s'étoient précédemment cachés.

J'ai eu l'occasion de faire une observation de ce genre sur la Méditerranée, dans le port de Dénia, étant à bord d'un petit chébeck algérien. Assis sur le pont de ce chébeck, je voyois au large des bâtimens à la voile, qui présentoient au-dessous d'eux une image renversée. Cette image n'étoit point entière ; elle ne comprenoit que le corps du bâtiment et la partie inférieure des voiles. Enfin elle étoit nettement coupée par l'horizon apparent, de sorte que le vaisseau et son image tronquée paroissoient reposer dessus. Mais si, au lieu de rester assis, je me levois peu à peu, en tenant toujours ma lunette dirigée sur le vaisseau, je voyois peu à peu l'horizon apparent s'éloigner, atteindre successivement et faire disparoître les diverses parties de l'image renversée, s'élever

enfin jusqu'au corps du bâtiment, et même le dépasser d'une quantité très-notable. Alors on n'en voyoit plus qu'une seule image droite, située en deçà de l'horizon apparent. Mais en s'abaissant de nouveau l'horizon s'abaissoit aussi, et la seconde image reparoissoit. Ces changemens s'expliquent sans difficulté par le mouvement de translation de la caustique dans le sens horizontal.

Dans nos observations de Dunkerque, la disparition des terres ne se faisoit pas d'une manière aussi régulièrement horizontale; mais elles se fendoient pour ainsi dire et disparoissoient plus tôt dans certains points que dans d'autres, sans doute en raison des ondulations du sol; et peut être aussi en raison des inégalités de la température, qui pouvoit n'être pas la même dans toutes les couches d'air situées à la même hauteur.

Lorsque la hauteur de l'œil étoit de 61 centimètres (*fig.* 42), les images *aaa* des arbres ne se montroient pas constamment, mais par intervalles. Tantôt elles paroissoient tout-à-coup au niveau de la ligne *FF*, tantôt elles s'abaissoient et s'évanouissoient aussi tout-à-coup. Ces apparences changèrent aussi à mesure que la mer en se retirant, abandonnoit, sur ses bords, des plages sablonneuses qui s'échauffoient aux rayons du soleil, avec une évaporation et des ondulations excessives. On voyoit, au moyen de la lunette, des vagues venir de la mer, s'avancer vers le sable, et aller mourir, non pas en s'abaissant à la manière ordinaire, mais en se perdant et s'évanouissant sous la caustique, formée dans l'océan aérien. C'est ce que représentent les *fig.* 36 et 37. Nous

vîmes aussi des oiseaux de mer, qui d'abord ne donnoient qu'une image simple et droite, envoyer ensuite une seconde image renversée, à mesure que, dans leur vol, ils s'approchoient de l'horizon apparent, et qu'ils étoient près de s'y plonger. C'est ce que représente la *fig.* 44. Ces images ne se voyoient jamais en deçà de l'horizon apparent, mais au-delà. Toutes ces apparences s'expliquent d'elles-mêmes d'après notre théorie.

Quelquefois aussi il arrivoit que les oiseaux se perdoient subitement avant d'avoir présenté de doubles images. Nous avons plus d'une fois observé cette particularité. Sans doute alors ils se plongeoient dans la partie de la trajectoire limite, comprise entre le sol et le point où commence la caustique formée par les intersections des trajectoires plus élevées. En effet, dans cette première portion de la trajectoire limite, il y a disparition sans renversement. C'étoit, au reste, un spectacle curieux que celui de ces nuées d'oiseaux qui, s'approchant avec rapidité de l'horizon, doubloient tout-à-coup leur nombre. leur marche et leurs mouvemens.

Un peu à droite des objets terrestres que nous avons décrits, nous vîmes aussi les apparences suivantes qui se maintinrent pendant tout le temps des observations. (Voyez *fig.* 45).

C'étoit comme une espèce d'île où l'on distinguoit une flèche très-allongée, que l'on a désigné par *G* dans la figure et qui étoit sans doute un clocher. Près d'elle, sur la gauche on voyoit un autre clocher moins aigu, qui est désigné par *E*. La partie inférieure présentoit une con-

formité de contours frappante avec la partie supérieure. Il y avoit en E' et G' deux prolongemens correspondans aux deux élévations F, G, et le tout étoit suspendu dans le ciel. D'après ces rapports de forme il paroissoit bien que l'image inférieure étoit le renversement de l'autre, et que cette apparence d'une île jaunâtre et élevée étoit produite par des sommets de dunes qui s'élevoient au-dessus de la caustique cc, évidemment indiquée par le contact des deux images.

Au coucher du soleil les phénomènes cessèrent. Il n'y eut plus de renversement, ni de suspension sensible.

Le mauvais tems ne permit pas de revoir ces phénomènes avant le 7 mars. Nous les observâmes dans un lieu voisin du précédent, mais sur un terrain plus bas, que le reflux abandonne au pied même et à la gauche du Risban. Ces circonstances étoient plus favorables à cause de l'abaissement de l'œil, et parce que le rayon visuel rasoit plus long-temps et de plus près la surface sablonneuse, avant de parvenir aux objets éloignés. Lorsque nous arrivâmes le matin dans cet endroit, toute la côte dans l'ouest, qui nous avoit paru seulement suspendue la veille, l'étoit plus fortement, et présentoit, outre l'image directe, une image renversée ; les objets situés au-dessus des dunes, particulièrement le grand clocher à gauche, se voyoient aussi renversés. Mais il y avoit cette différence, que l'image renversée des dunes étoit suspendue en l'air, tandis que l'image renversée du clocher, descendoit plus bas, presque jusqu'à l'horizon apparent, qu'elle touchoit quelquefois, et dont quelquefois elle paroissoit un peu séparée. La partie inférieure de cette image étoit

extrêmement vague, indistincte, mal terminée et très-applatie, tandis que celle des sommets des dunes étoit très-nette et avoit ses contours bien tranchés. Du reste il n'y avoit pas la moindre apparence de perspective aérienne : le clocher paroissoit comme un plan obscur sur le fond du ciel. Ces apparences, dessinées exactement sur les lieux, sont représentées dans la *fig.* 46.

La correspondance des contours faisoit juger d'une manière très-précise la ligne de contact cc' des deux images directes et renversées. Cette ligne indique évidemment la section des dunes par la surface caustique, section qui étant parcourue par le fil transversal de la lunette, paroissoit sensiblement horizontale, sans doute à cause du grand éloignement des objets. Le sommet des dunes seul s'élevant au-dessus de la caustique, leur pied étoit invisible, comme la partie inférieure de l'homme, représentée dans la planche 2. De plus, nous avons montré par l'expérience, que, dans ce cas, des portions d'égale hauteur dans l'image directe, donnent dans le renversement, des images d'autant plus petites, que ces parties elles-mêmes sont plus élevées au-dessus de l'horizon apparent. Voilà pourquoi l'image renversée de la pointe du clocher étoit beaucoup plus applatie que celle du sommet des dunes. En mesurant les distances zénithales des diverses portions de l'image au moyen du cercle répétiteur, nous trouvâmes les résultats suivans (1).

---

(1) Les circonstances météorologiques de ces observations et des suivantes ont été rapportées dans le tableau de la page 32, pour le 7 mars.

Dépression de l'horizon apparent de la mer, au large	2′ 52″33 . .	4 observ.
Dépression de l'hor. appar. AA' sur le sable .	6′ 42″66 . .	6 observ.
Distance du sommet E du clocher au zénith . . 90° —	7′ 54″25 . .	6 observ.
Ce qui donne le diamètre apparent de AB . .	14′ 36″91	

En mesurant séparément AC et BC on a trouvé :

AC.	5′ 41″80 . .	5 observ.
BC.	8′ 54″60 . .	5 observ.
Ce qui donne, comme précédemment . . .	14′ 36″40	

On voit que l'image directe BC surpasse beaucoup l'image renversée AC, ce qui doit être en effet d'après ce que nous avons vu précédemment. De plus, la somme des deux distances $AC + BC = 14' \, 36''40$, ce qui confirme la hauteur de E mesurée directement. Mais comme E' n'étoit pas toujours nettement séparé de l'horizon, on pouvoit craindre que l'image renversée du clocher ne fût pas complète ; c'est pourquoi nous aurons recours, pour établir cette circonstance, aux observations des jours suivans.

Par une opération trigonométrique exacte, nous avons trouvé la distance du clocher au point de notre station, égale à 8384 mètres. On a déjà vu que le terrain n'étoit pas de niveau, et que la pente de sa surface où tomboit l'horizon apparent, dans cette observation et dans les suivantes, s'élevoit suivant une inclinaison de 1′ 15″ en s'éloignant de l'observateur.

Toutes les terres qui, la veille, se voyoient suspendues dans le nord-ouest, avoient disparu aujourd'hui et étoient devenues complétement invisibles. Elles étoient donc

entrées sous la caustique, et cessoient d'être aperçues.

C'est sans doute pour cela que la première fois on apercevoit par intervalles des arbres et d'autres petits objets qui se montroient tout-à-coup, et tout-à-coup disparoissoient pour se remontrer ensuite. Il paroît bien que la caustique passoit alors à fort peu près à cette hauteur, et que tantôt elle étoit au-dessus, tantôt au-dessous, par l'effet des continuelles variations qu'elle éprouvoit.

Nous fîmes ce jour-là, sur l'horizon de la mer, une remarque analogue à celles que j'ai déjà rapportées. En mettant le fil horizontal du cercle sur cet horizon au nord, et au large, on le voyoit bien terminé, comme à l'ordinaire; mais en donnant au cercle un mouvement azimuthal, et ramenant peu à peu la lunette du nord à l'ouest, sans changer son inclinaison, la netteté de l'horizon s'affoiblissoit de plus en plus. Enfin la mer disparoissoit entièrement, l'horizon n'étoit plus indiqué que par une espèce d'ondulation vague, comme le représente la *fig.* 37; et au-dessous, sur le sable, on voyoit un autre horizon apparent, bien net et bien tranché. Pour concevoir la raison de ces apparences, il suffit de savoir que dans cette dernière direction, la surface du sable étoit plus élevée que du côté du nord.

Le lendemain du jour précédent, le temps fut encore plus favorable. C'est ce jour-là que nous avons mesuré les ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite, ainsi que je l'ai rapporté dans la page 78. La température de l'air sur le sable étoit plus élevée que la veille, tandis qu'à un mètre de hauteur elle étoit un peu plus basse.

Le baromètre étoit aussi plus élevé de 3 millimètres. Aussi les phénomènes du renversement étoient bien plus considérables. Les dunes situées en avant du clocher, avoient complétement disparu, elles s'étoient plongées sous la caustique. Quelquefois pourtant leurs sommets les plus élevés s'élevoient jusqu'à son niveau, comme une ligne de vapeur, et leur apparition sur le milieu du clocher, indiquoit exactement le point où la caustique le coupoit. Voyez *fig.* 47 et 48. Cette caustique étoit donc plus élevée que la veille, puisqu'elle cachoit des objets qui étoient alors visibles, mais aussi l'horizon apparent étoit plus bas, par conséquent plus rapproché de l'observateur, ce qui est conforme à notre théorie; du reste il n'y avoit pas plus de perspective aérienne que la veille. Voici les dimensions des images observées au cercle répétiteur :

Dépression apparente de l'horizon AA', *fig.* 47 . .	6′ 57″42 . .	6 observ.
Longueur de AC	7′ 48″72 . .	4 observ.
Longueur de BC	8′ 34″16 . .	4 observ.
Distance de E' à l'horizon apparent AA'	2′ 13″6	
Dist. du sommet E du clocher au zén. conclue, 90° —	9′ 25″46	

Remarquons d'abord que le sommet du clocher étoit plus élevé que la veille de 31″. Cela tient à l'accroissement de la densité dans les couches supérieures : d'où résulte un accroissement de la réfraction terrestre qui agissoit seule sur le sommet E; néanmoins la distance BC de ce sommet à la caustique est plus petite que la veille, parce que la caustique s'est élevée d'une quantité plus considérable.

On voit par ces mesures, que l'image directe BC surpasse AC, c'est-à-dire, surpasse la distance de la caustique à l'horizon apparent. Or le point E', image renversée du sommet du clocher, ne descend pas jusqu'à cet horizon. Par conséquent l'image renversée est bien plus courte que l'image directe, et d'après les mesures précédentes, la différence est de 2′ 59″, ce qui est conforme aux résultats que les expériences avec la règle verticale, page 79, avoient fait prévoir.

D'après les mesures précédentes, on trouve encore que le point C, intersection de la caustique, est élevé de 51″30 au-dessus du niveau de l'observateur. Or, puisqu'à la hauteur de l'observateur, et même à une hauteur beaucoup moindre, la densité et la température étoient sensiblement constantes; il étoit impossible, si les couches eussent été horizontales, que la caustique s'élevât au-dessus du niveau de l'observateur. Puis donc que cette élévation s'observoit réellement, il falloit que le terrain allât en s'élevant à mesure qu'il s'éloignoit de l'observateur; ce que le nivellement a vérifié. L'inclinaison propre du terrain s'ajoutant alors à celle du rayon lumineux, relevoit, comme nous l'avons dit plus haut, les secondes branches des trajectoires, et c'eût été réellement au-dessus de cette inclinaison totale qu'il auroit fallu prendre les hauteurs apparentes, pour connoître leurs véritables valeurs, relativement au phénomène que nous examinons.

La grande influence de l'inclinaison du terrain sur ces apparences, se montra plus évidemment encore dans une expérience que nous fîmes le 10 mars à la même

station. Ce jour-là les différences des températures extrêmes étoient très-foibles, comme le montre le tableau de la page 32, et le renversement du clocher n'étoit pas complet. Mais, à cause du peu d'agitation de l'air résultant de cette foible différence de température, la partie de l'image qui étoit renversée, et celle des sommets des dunes qui se projetoient en avant, étoit d'une netteté extrême, et la perspective aérienne étoit assez bien conservée pour que l'on pût distinguer les saillies des objets. (Voyez *fig.* 49.) En plaçant successivement le cercle à la hauteur de 1^m15 et à 0^m61 on prit les dépressions du clocher et de la caustique, et l'on eut les résultats suivans :

Hauteur du cercle, 1.15; distance de l'horizon apparent *AA'* au zénith	3' 56"52
Distance du sommet *E* du clocher au zénith	90° — 8' 20"
Distance de l'intersection *C* de la caustique au zénith . .	90° + 0' 30"
Donc, distance angulaire du sommet du clocher à la caustique	8' 50"
Hauteur du cercle, 0.61; distance du sommet *E* du clocher au zénith	90° — 8' 14"
Distance de l'intersection *B* de la caustique au zénith . .	90° — 1' 33"
Donc, distance angulaire du sommet du clocher à la caustique	6' 41"

La partie du clocher qui s'élevoit au-dessus de la caustique, étoit donc moindre quand l'observateur étoit plus abaissé, c'est-à-dire qu'alors la caustique rencontroit le clocher plus haut. C'est l'effet du rapprochement de l'origine de la caustique, peut-être aussi des inflexions

occasionnées dans cette courbe par les ondulations du terrain et des couches d'air échauffé qui en recouvroient la surface.

Les observations précédentes étoient plus que suffisantes pour constater les généralités du phénomène ; elles en fixoient même les détails avec autant de précision que le comporte l'irrégularité des circonstances dont ces observations dépendent. Mais nous devions encore examiner la marche même du phénomène, de quelle manière il commence, et de quelle manière il finit. Nous en avons heureusement trouvé l'occasion le 19 mars, et cette occasion a été si complète, qu'elle a suffi pour fixer toutes nos idées, et pour nous découvrir la véritable cause du phénomène singulier, et peut-être le plus fréquent de tous, où l'on observe une simple suspension des objets éloignés, sans image renversée sensible.

Ce jour-là on avoit pour circonstances météorologiques :

Thermomètre sur le sable et au soleil .	+ 13.4	Baromètre	= 0.76474
Sur le sable et à l'ombre	11.8	Therm. du barom.	14.3
A 1^m15 et à l'ombre	11.3		
Température de la mer près du rivage .	+ 7.8	Mer plus froide que l'air.	

Nous nous plaçâmes d'abord dans notre station ordinaire, le centre du cercle étant à 1.15 au dessus du sol. La dépression de l'horizon apparent sur le sable étoit de 4′ 27″16. Le clocher étoit en partie renversé, comme le représente la *fig.* 50. L'élévation apparente de la caustique au-dessus de notre niveau, n'étoit que de 8″. Tous ces résultats indiquent un renversement très-foible, ce qui

s'accorde avec le peu de différence des températures. Cependant d'autres objets éloignés, un clocher peu élevé, des sommets de dunes, etc. étoient complétement renversés et suspendus en l'air.

Nous fûmes bientôt obligés de quitter notre station à cause de la mer montante, qui venoit la couvrir, et nous allâmes nous établir dans un endroit plus élevé, où nous savions que le flux n'arrivoit pas. Les phénomènes de la suspension et du renversement étoient moins sensibles qu'en bas, et même ils n'avoient plus lieu pour quelques objets situés sur notre gauche; mais ils l'étoient encore assez, pour qu'on ne pût les méconnoître principalement sur les dunes et sur les terres éloignées dans l'ouest, dont les contours se répétoient dans leurs images renversées. Ces objets diversement éloignés de la mer, nous offroient des termes de comparaison, pour suivre la marche des modifications que la mer alloit y apporter, en couvrant la surface du sable et abaissant sa température. En effet, la température de la surface de la mer, sur le bord, n'étant que de 7°8, étoit beaucoup plus basse que celle de la surface du sable, et même que celle de l'air à notre hauteur, laquelle étoit peu différente de 12°. Aussi l'horizon apparent observé sur la surface de la mer, dans le nord et au large, n'étoit-il pas déprimé, mais *élevé* de 2″ secondes au-dessus de l'horizontale menée par notre œil; et pourtant dans notre nouvelle station, le cercle étoit de $1^{m}49$ au-dessus du sol, qui se trouvoit lui-même au niveau de la haute mer. Cela posé, voici la marche du phénomène telle qu'elle se trouve consignée dans notre

registre, d'après la description faite sur les lieux. La mer, en montant, commence d'abord par couvrir le sable et les objets situés à notre droite et vers le large. Alors, pour ces objets, la suspension diminue. L'image renversée s'amincit, en restant toutefois complète, car elle ne descend pas jusqu'à l'horizon apparent. Elle s'applatit ainsi continuellement à mesure que la mer monte davantage ; les contours sont moins arrondis, moins marqués ; elle est bientôt terminée inférieurement par une ligne qui n'offre plus que de légères sinuosités, qui devient ensuite parallèle à cet horizon, et finit par se confondre avec lui. Le décroissement progressif de l'image est extrêmement sensible et facile à observer. On voit ainsi l'horizon apparent s'élever peu à peu sur notre droite, et atteindre les objets suspendus ; ceux qui se trouvent plus à notre gauche, et plus éloignés de la mer, présentent encore une suspension assez forte, et des images renversées dont les contours sont très-sensibles, quoiqu'elles soient déjà diminuées. Pour ces derniers objets la suspension et le renversement ont toujours eu lieu, soit que la mer ne couvrît pas entièrement la partie du sol sur laquelle passoient les rayons visuels menés de nos yeux à ces points, soit qu'elle ne les couvrît que d'une couche d'eau peu épaisse et déjà échauffée par le contact du sable sur lequel elle avoit dû passer auparavant. Mais en allant vers le large, les images renversées sont devenues tellement minces qu'on ne peut plus en distinguer les contours, quoiqu'elles soient encore suspendues sensiblement. Cette élévation successive de l'horizon est fidè-

lement représentée dans la *fig.* 51 qui a été dessinée sur les lieux mêmes, à la vue des objets. Quoique l'inflexion singulière de l'horizon apparent fût visible à l'œil, nous en avons pris des mesures qui la constatent, et qui ne laissent aucun doute sur ce point. En effet, les dépressions de l'horizon, observées dans les diverses parties de sa courbure, n'étoient pas les mêmes, car on avoit au même instant :

Élévation de l'horizon appar. au large,	+ 0′ 0″99	6 obs.	Hor. excellent.
Dépression de l'horizon apparent en *A*.	2′ 25″39		

la dépression de l'horizon en *B* étoit bien plus grande encore; car une partie du télégraphe *T* avoit son image renversée au dessus de l'horizon apparent, et cependant le sommet *B* des dunes au pied de ce télégraphe, n'excédoit que de 26″ la hauteur de l'horizon de la mer au large. On mettoit sur cet horizon le fil transversal de la lunette, et faisant ensuite tourner le cercle sans changer son inclinaison, on voyoit l'horizon apparent se détacher peu à peu, et s'abaisser au-dessous du fil, et au plus grand abaissement, en *B*, le fil se trouvoit tangent au sommet de la côte sur laquelle le télégraphe paroissoit. En *A*, la distance de l'horizon apparent aux dunes, est égale à l'épaisseur du fil. Les *fig.* 52, 53, 54 et 55 représentent des portions de côtes dont les images renversées sont plus ou moins applaties et ont des contours plus ou moins sentis, selon leur proximité de la mer.

Ces apparences de suspension sans renversement sensible, ont duré autant que la présence de la mer sur la portion de la plage étendue dans la direction des ob-

jets. A mesure que la mer, en se retirant, a découvert la surface du sable, nous avons vu se reproduire dans un ordre inverse, tous les phénomènes que nous avions observés, lorsqu'elle montoit : la suspension augmentoit, ou plutôt l'horizon apparent s'abaissoit, les images renversées commençoient à arrondir leurs contours, et grandissoient successivement; mais l'horizon de la mer au large, conserva toujours la hauteur qui convenoit à la basse température des eaux. Après que le renversement eut reparu et que la mer se fut beaucoup abaissée au-dessous de notre niveau, nous trouvâmes la dépression au large seulement de 0″94; ce qui correspond bien à la grande élévation que nous avons observée précédemment.

Les observations que nous venons de rapporter montrent clairement que, dans le phénomène de la suspension, l'image renversée existe toujours, mais qu'elle est seulement réduite à une épaisseur infiniment petite. La marche des rayons visuels confirme cette vérité ; car la ligne aérienne qui s'aperçoit au-dessous des objets, ne peut être que l'image renversée du ciel qui est au-dessus. Or si le ciel est vu renversé, le sommet de l'objet doit l'être aussi par les mêmes rayons; par conséquent l'objet a nécessairement son image renversée au-dessous de lui; et si on ne l'aperçoit pas, c'est parce que les dimensions de cette image sont insensibles dans le sens vertical.

Ce phénomène qui jusqu'ici n'avoit pas été expliqué, se trouve donc ainsi résolu de la manière la plus simple. Nous en avons vu encore plusieurs autres exemples que nous n'avons pas négligé de recueillir, et qui s'accordent

parfaitement avec ce qui précède, comme cela devoit nécessairement arriver. Telles sont les apparences représentées dans les *fig.* 56, 57; ce sont des images du même clocher que nous avons observé tant de fois, mais elles sont vues de plus bas, l'œil étant seulement $0^{m}99$ au-dessus du sol. Je dois aussi avertir qu'elles sont observées de diverses places; car les ondulations du sol contribuent certainement à modifier les apparences qu'on observe par la réflexion sur sa surface. Ainsi l'image 56, qui est déjà applatie, est vue de notre station ordinaire. Mais l'image 57 est vue d'un endroit différent. Ici l'image inférieure est infiniment applatie, et le clocher paroît simplement suspendu par sa base. Mais en s'élevant peu à peu sur le sol, on voyoit cette image s'agrandir et s'alonger jusqu'à l'horizon, quoique celui-ci s'abaissât en même temps. Cependant un observateur placé de manière à ne voir que l'image 57, auroit certainement pensé qu'il n'y avoit aucune espèce de renversement. Nous avons aussi observé de ce point le sommet d'une maison dont les cheminées inégalement élevées, présentoient dans leur renversement des longueurs presque égales, comme on le voit dans la *fig.* 58; ce qui est conforme aux expériences faites avec la règle verticale, et représentées dans la *fig.* 10.

Dans ce même point, une petite cabane éloignée de 4236 mètres, nous présenta trois images, deux droites et une renversée entre les deux autres. Voyez *fig.* 59. Mais l'image inférieure étoit extrêmement applatie et c'étoit le sens de sa convexité seule qui indiquoit sa direction.

Peut-être les ondulations du terrein contribuoient-elles à ce phénomène, en multipliant les branches de la caustique.

Cette même maison, vue de notre première station, nous a pendant long-temps embarrassés par les singuliers aspects qu'elle présentoit; se projetant sur un groupe de dunes sablonneuses, éloignées de 5704 mètres, elle s'élevoit dans l'air avec elles par l'effet du mirage, et le tout formoit dans le ciel un nuage jaunâtre, avec des contours bien terminés, et dans son milieu une sorte de tache ovale avec des bords noirs.

Nous ne pouvions absolument concevoir ce qui produisoit de si singulières apparences, ni comment une portion de dune arrondie pouvoit ainsi présenter une ombre, même dans la partie tournée du côté du soleil. Mais enfin, en observant les modifications de ces aspects bizarres, nous découvrîmes que le prétendu nuage étoit formé par des sommets de dunes suspendues en l'air avec leur image renversée au-dessous, et que la tache noire n'étoit autre chose que le devant d'une maison dont le toit avancé portoit une ombre précisément du côté où nous la soupçonnions le moins, d'après la supposition que c'étoit un corps arrondi. On voit par là combien les objets sont défigurés, combien les jugemens sont incertains dans ces circonstances où l'œil est privé des indications de la perspective aérienne, absolument détruite par les excessives ondulations de l'air. Toutes ces apparences sont représentées dans les *fig.* 60, 61 et 62, avec les modifications successives qu'elles ont éprouvées et qui nous ont fait enfin reconnoître le prestige. On voit

que les contours de l'image inférieure s'aplatissent de plus en plus à mesure que, par l'abaissement de la température, elle descend sur l'horizon : ce qui s'accorde avec les autres résultats que je viens de rapporter.

C'est sans doute à cette diminution excessive de l'image inférieure qu'il faut attribuer tous les phénomènes de suspension, sans renversement sensible, qui s'observent souvent à la mer sur des objets très-bas et très-éloignés, tels que des îles ou des vaisseaux. Nous en avons rapporté des exemples observés par M. de Humboldt en Amérique. Nous avons vu des apparences semblables, M. Mathieu et moi, sur la tour de Dunkerque, en observant, avec une lunette, un navire à la voile à une grande distance, un jour que l'horizon étoit assez clair, quoique légèrement vaporeux. Ce navire étoit entièrement suspendu en l'air, à une hauteur très-petite, mais cependant sensible, au-dessus de l'horizon apparent. Mais, malgré toute l'attention possible, on n'y reconnoissoit point d'image renversée : sans doute cette image existoit, mais elle se trouvoit réduite à des dimensions infiniment petites, comme dans les cas précédens.

Pour montrer en général comment cela peut se faire, supposons, comme dans nos expériences de Dunkerque, *fig.* 11, que la variation de densité n'a lieu que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle l'observateur se trouve placé; et supposons encore, conformément à ces apparences, que la caustique s'élève aussi au-dessus des couches de densité variables, à la distance où se trouvent les objets dont on observe le renversement. Cela posé, si, par l'œil de l'observateur et dans la couche de den-

sité constante, on mène une ligne droite qui servira d'axe des x, un rayon visuel parti de l'œil, en faisant un angle I avec cet axe, pénétrera dans les couches de densité variables, s'y repliera et en sortira ensuite, en se relevant, pour rencontrer de nouveau l'axe des x à une distance A qui sera fonction de I, de la forme des couches et de la variation de la densité. Si les couches sont planes, le rayon émergent coupera encore l'axe des x sous le même angle I que le rayon incident; mais si les couches ont une courbure quelconque, comme on doit l'admettre en général, le rayon réfléchi fera avec l'axe un angle I' différent de I, mais fonction de cette quantité. Ainsi, en rapportant tout à des coordonnées rectangulaires x et z, l'équation du rayon émergent, devenu ainsi rectiligne au-dessus de l'axe des x, sera

$$x = A + \frac{z}{tang.\ I'}$$

les z étant pris positivement au-dessus de l'axe des x. Supposons que ce rayon ainsi prolongé rencontre un certain point d'un objet éloigné situé pareillement au-dessus de l'axe des x, dans les couches de densité constante. Si nous considérons un autre point du même objet situé infiniment près du premier, dans la même verticale, ou, pour parler plus exactement, à la même distance de l'axe des z, x restera le même; mais l'angle d'incidence I variera, et par suite l'amplitude A, l'angle d'émergence I' et la hauteur z, c'est-à-dire que l'on aura

$$o = \frac{dA}{dI} - \frac{z}{sin^2.\ I'} \cdot \frac{dI'}{dI} + \frac{1}{tang.\ I'} \cdot \frac{dz}{dI}$$

Soit z' la hauteur à laquelle le premier rayon émer-

gent vient toucher la caustique, ce sera aussi dans ce point qu'il se coupera avec le rayon infiniment voisin, et la condition des intersections sera

$$o = \frac{dA}{dI} - \frac{z'}{\sin^2. I'} \cdot \frac{dI'}{dI}$$

Ceci suppose que l'intersection des deux rayons consécutifs se fait dans la couche de densité constante, comme cela est arrivé dans les observations de Dunkerque où la caustique atteignoit et surpassoit des objets fort élevés au-dessus du sol. Maintenant si l'on fait

$$z = z' + h$$

en combinant les deux équations précédentes, on aura

$$o = -\frac{h}{\sin^2. I'} \cdot \frac{dI'}{dI} + \frac{1}{\tang. I'} \cdot \frac{dz}{dI}$$

ce qui donne

$$dI = \frac{\sin. 2 I'}{2 h. \left(\frac{dI'}{dI}\right)} dz$$

Ce qui nous intéresse spécialement ce sont les images renversées. Dans ce cas il faudra que les trajectoires se coupent avant l'objet : par conséquent le point de tangence de deux trajectoires consécutives sera au-dessous de l'ordonnée z, par conséquent h sera positif.

De plus, nous supposons, comme dans les observations de Dunkerque, que les intersections se font au-dessus de la couche de densité variable. Alors I' augmente quand I augmente, et par conséquent $\frac{dI'}{dI}$ est positif. D'après cela, en examinant la valeur de dI que nous venons de trouver, on découvre les propriétés suivantes :

1°. Le coefficient $\dfrac{\sin. 2\, I'}{2\, h. \dfrac{dI'}{dI}}$ est positif; ainsi dI est de même signe que dz, et I croît en même temps que z.

2°. A partir de la même ligne horizontale, c'est-à-dire des mêmes valeurs de I et de h, on voit que les dI sont proportionnels aux dz. Ainsi les différences de hauteur qui existent dans l'image directe se retrouveront dans les contours de l'image renversée.

Quant aux rapports de l'image renversée avec l'image directe, ils dépendent du coefficient $\dfrac{\sin. 2\, I'}{2\, h. \dfrac{dI'}{dI}}$. Par exemple, si les couches sont planes, $I' = I$, et l'on a

$$dI = \frac{\sin. 2 I}{2\, h} \cdot dz$$

Considérons une ligne circulaire et horizontale concentrique à l'observateur, et menée à la hauteur z. Par une certaine température, tous les points situés sur ce cercle répondront à une même valeur de I, et les contours de l'image seront plus ou moins prononcés, suivant que le rapport $\frac{dI}{dz}$ sera plus ou moins considérable.

Mais supposons que la température s'abaisse. Alors la caustique s'abaisse vers le sol, et h augmente en même temps que I diminue. Par ces deux raisons le rapport de dI à dz devient moindre et l'image renversée s'applatit. Enfin, lorsque $I = 0$, dI est nul quel que soit dz; alors le bas de l'image renversée devient rectiligne, et son épaisseur est infiniment petite. C'est le cas de la suspension sans renversement apparent.

Enfin, pour n'omettre aucun des phénomènes de réfraction extraordinaire dont j'ai pu avoir connoissance, je terminerai ce mémoire par une observation que nous avons faite à Dunkerque M. Mathieu et moi : c'est qu'il arrive fort souvent de voir sur la mer plusieurs horizons très-distincts les uns au-dessus des autres, avec des intervalles aériens qui les séparent. Quelquefois on voit ces intervalles se former sous les yeux, lorsqu'on observe attentivement. La partie la plus voisine de l'observateur devient foncée, la plus éloignée pâlit et enfin disparoît. Ce phénomène est rarement durable, et les horizons interposés varient de nombre et de place sans aucune loi. Le phénomène est quelquefois si marqué que l'on peut prendre hauteur au-dessus d'un horizon ou de l'autre. On en voit, *fig.* 59 *bis*, un des exemples les plus nets que nous ayons observés. Il y avoit ce jour-là deux horizons bien distincts, et sur le plus éloigné on voyoit une barque qui ne présentoit point d'image renversée; quelquefois cette barque étoit elle-même un peu suspendue en l'air. D'après les distances au zénith mesurées au cercle répétiteur, on avoit :

Dépression de l'horizon inférieur *AA'* . . .	3' 5"4 . .	6 observations.
Dépression de l'horizon supérieur *aa'* . . .	0' 52"6 . .	6 observations.
Dépression de la partie infér. de la barque, quand elle se détache de l'horizon supérieur .	0' 41"8 . .	4 observations.

Le centre du cercle étoit à $1^{m}.15$ au-dessus du sol, comme à l'ordinaire, et notre hauteur au-dessus du niveau de la mer n'étoit guère plus considérable. La petite dépression de l'horizon supérieur indique une réfraction

positive fort considérable, tandis que la dépression de l'horizon inférieur indique une réfraction négative. Sans doute ces différences sont produites par de petites variations locales de pression ou de température qui se font sur la surface de la mer, et qui courbent diversement le rayon lumineux. Les bancs de sable extrêmement multipliés sur les côtes de Dunkerque, et dont quelques-uns mêmes se découvrent au loin à la marée basse, peuvent avoir une grande influence sur ces phénomènes, en modifiant la température de l'eau qui les recouvre, et qui, lorsqu'elle est peu profonde, doit s'échauffer davantage par les rayons du soleil, comme on l'observe généralement. Un souffle de vent plus ou moins froid qui s'excitera dans un endroit et non non pas dans un autre, comme cela arrive souvent, peut encore produire des apparences de ce genre, et c'est à cela sans doute qu'il faut attribuer la multiplicité des zones plus ou moins colorées et celle des horizons apparens que l'on aperçoit ordinairement sur la surface de la mer dans les temps variables : ces apparences passagères sont encore des phénomènes produits par la réfraction.

Je ne finirois point si je voulois examiner en détail tous les accidens de ce genre que la nature présente à un observateur attentif. Mon but sera rempli si j'ai réussi à montrer que ces phénomènes si nombreux et si variés ne sont que de simples jeux de la lumière produits par les inflexions des rayons dans les différentes couches d'air.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

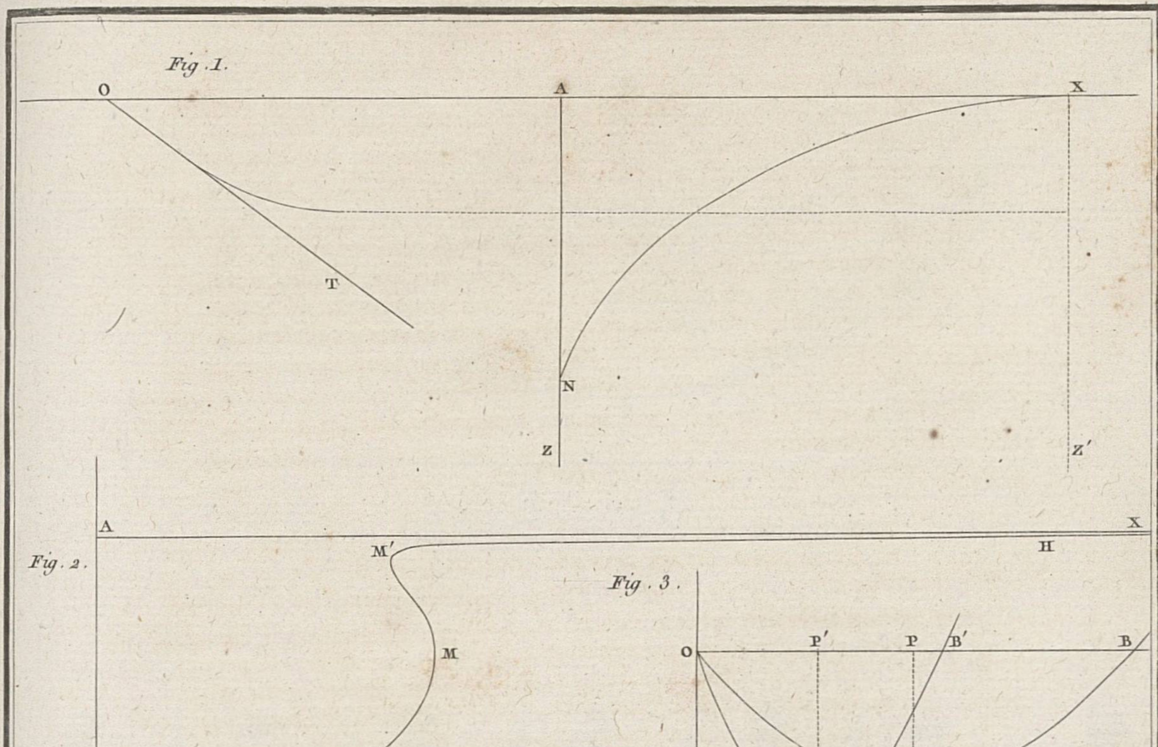

Fig. 1.
O
A
X
T
N
Z
Z′
Fig. 2.
A
X
M′
H
M
Z
Fig. 3.
O
P′
P
B′
B
M
M′
Fig. 4.
O
P
P′
B
B′
M
M′
Fig. 5.
O
P
B
M
M′
Fig. 6.
O
P′
P
B′
B
M
M′

Fig. 7.

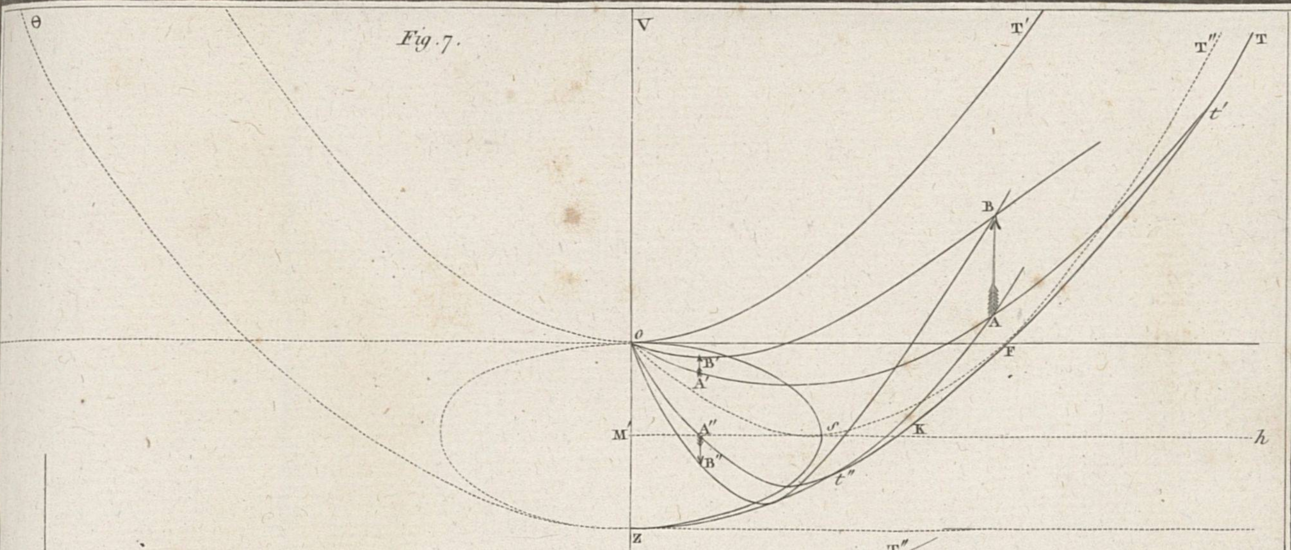


Fig. 8.

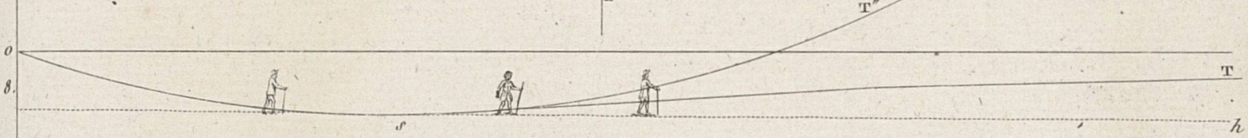


Fig. 9.

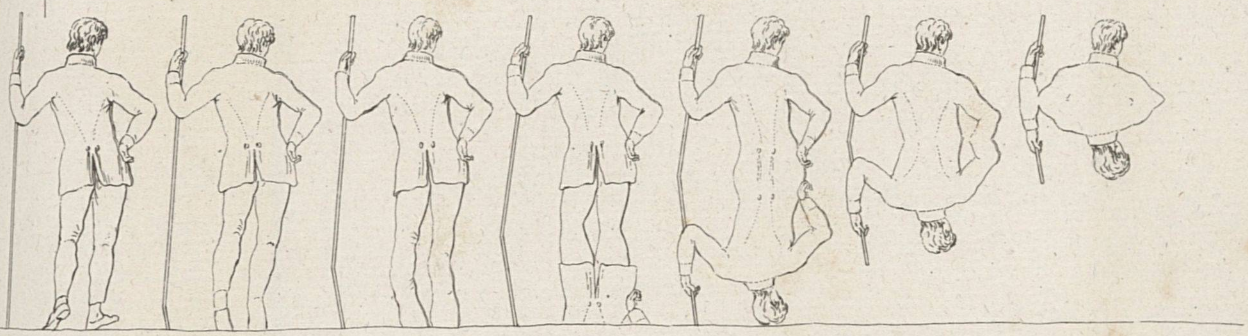
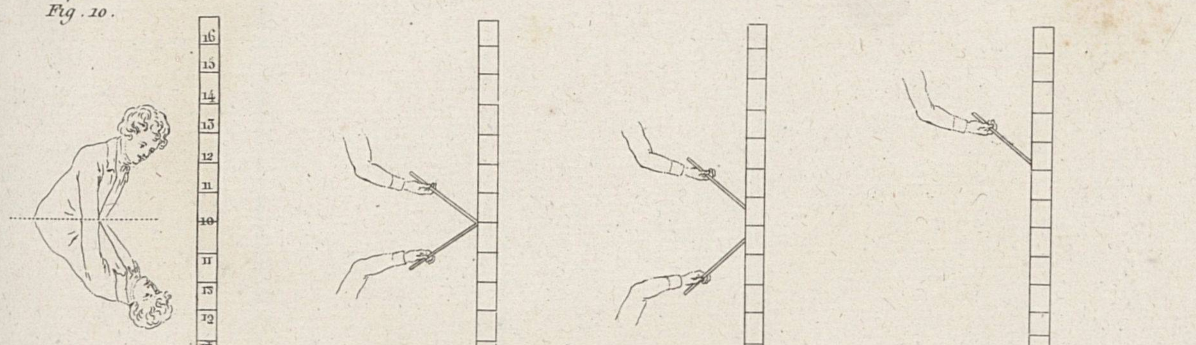
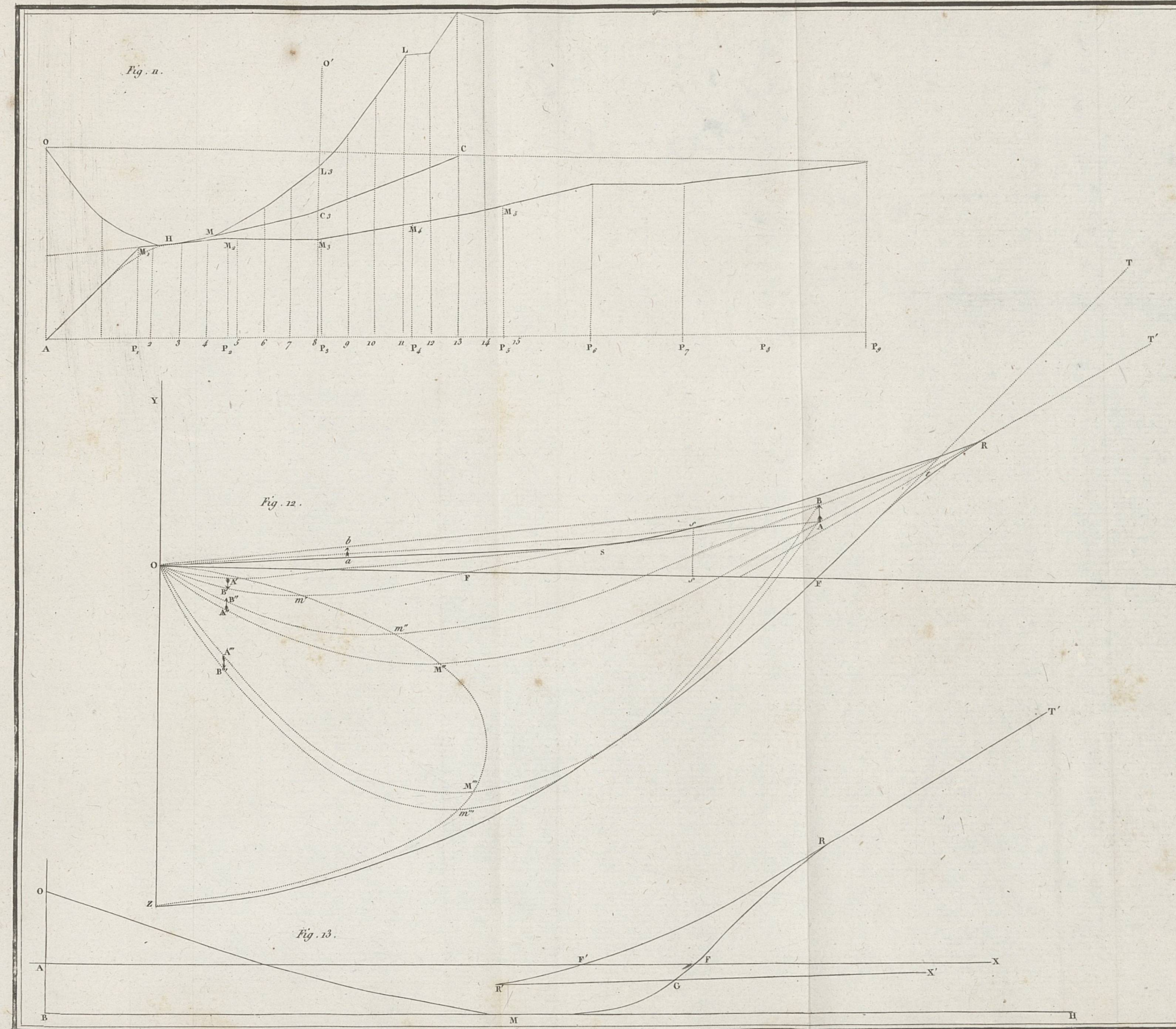
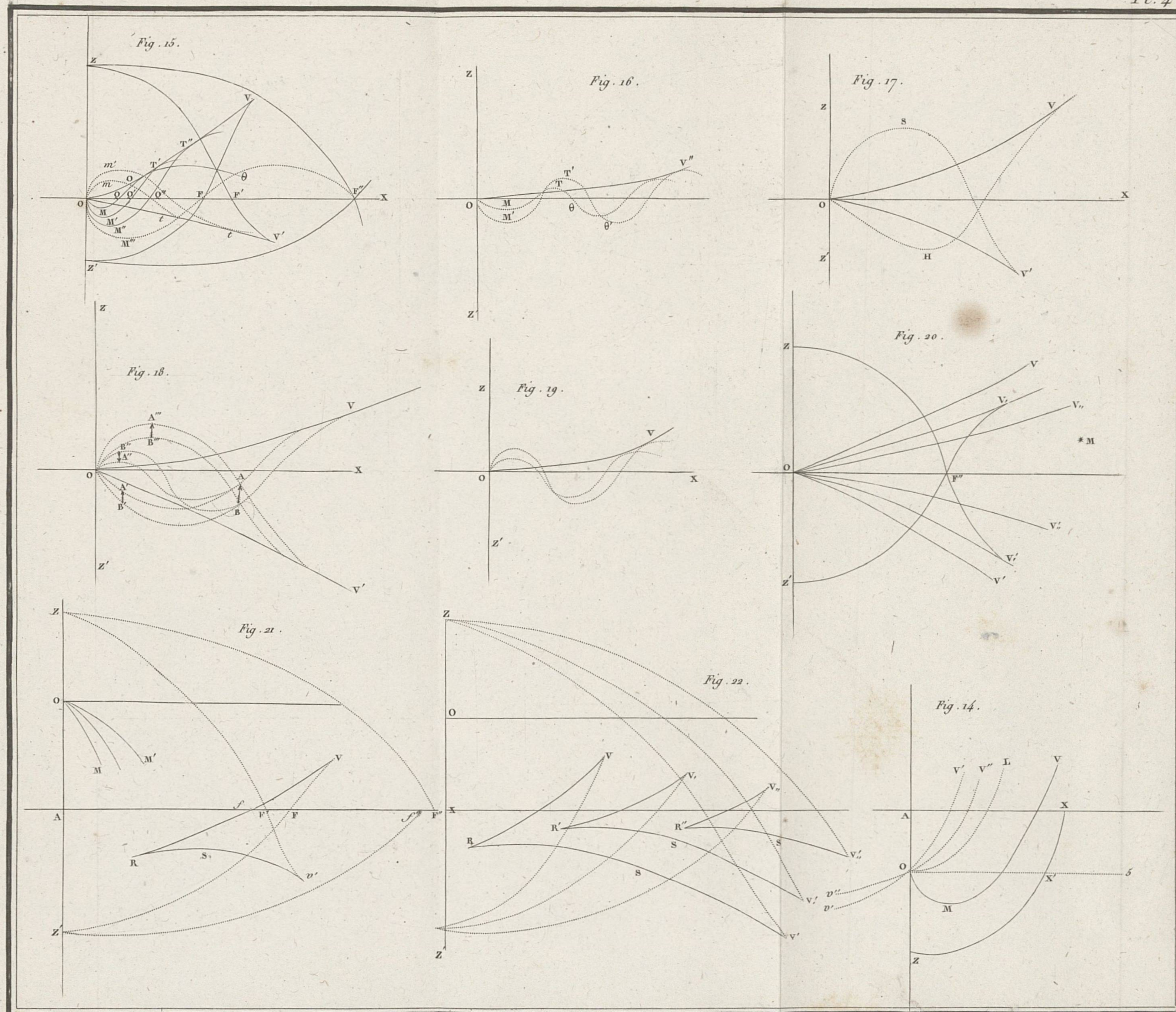
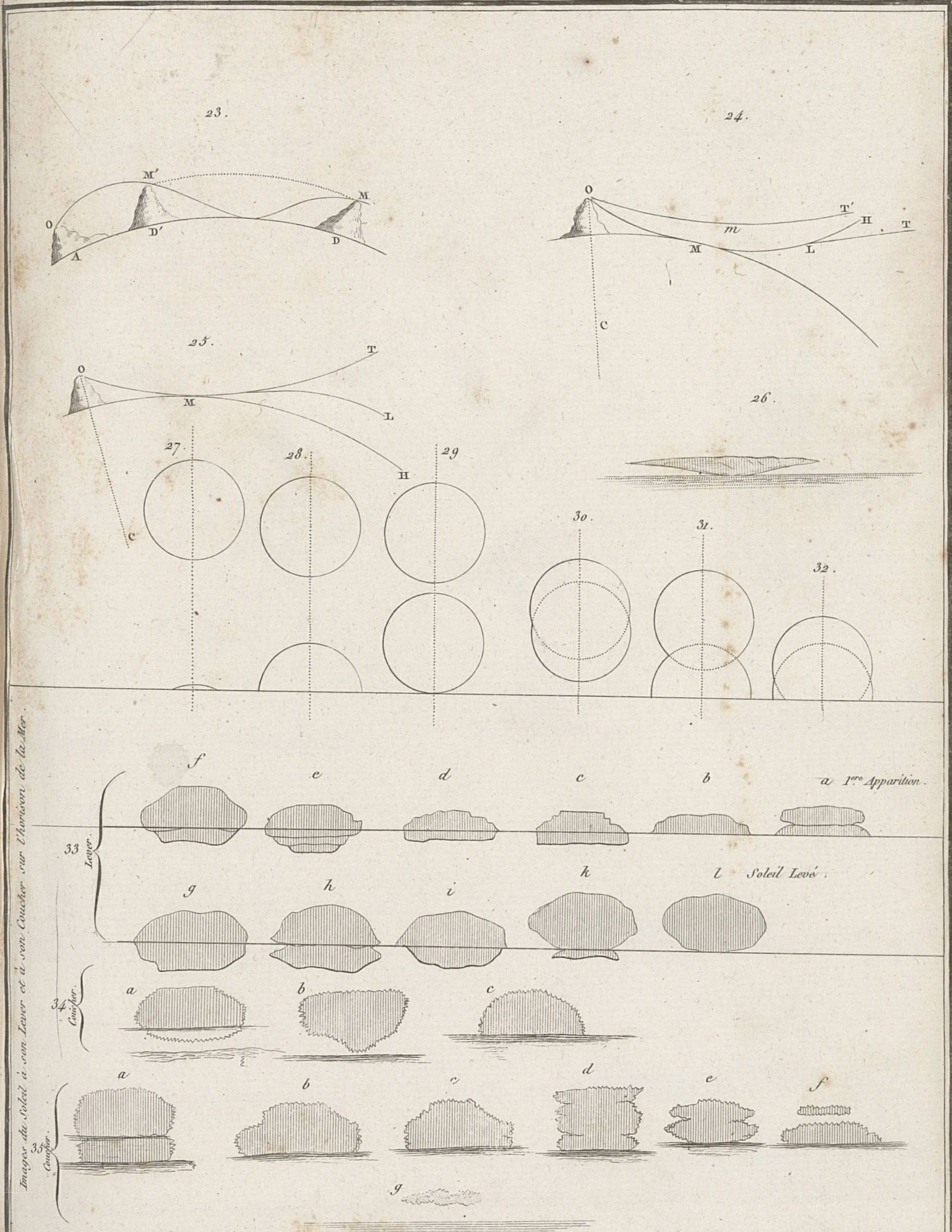


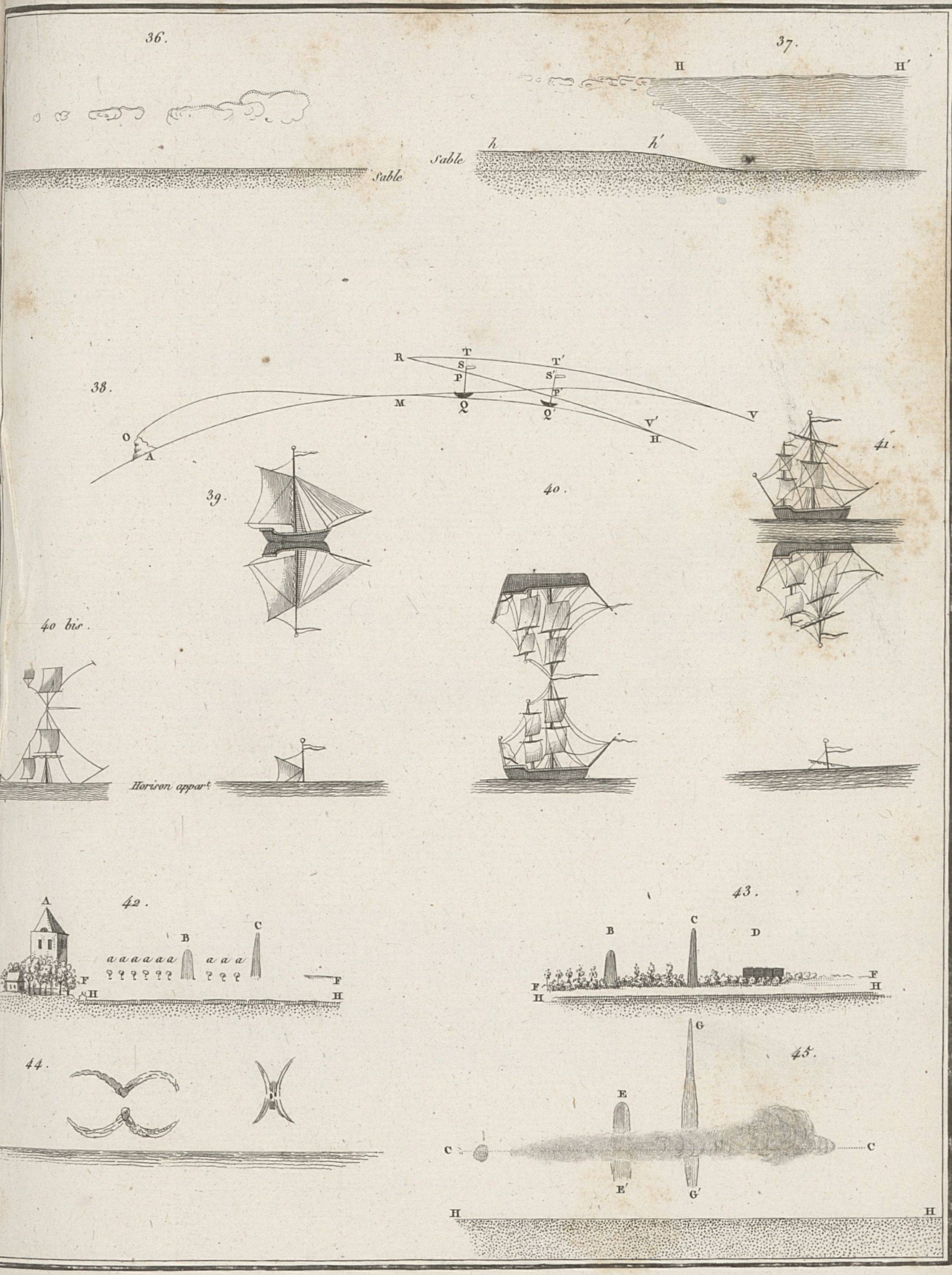
Fig. 10.



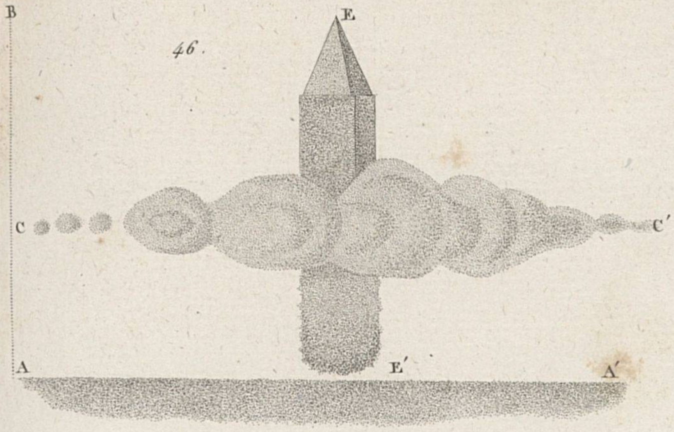

Fig. 11.
O
O'
L
C
L3
C3
M
H
M1
M2
M3
M4
M5
A
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
Fig. 12.
Y
O
X
Z
R
T
T'
B
A
b
a
F
S
s
A'
B'
B''
A''
A'''
B'''
m'
m''
M''
M'''
m'''
Fig. 13.
O
A
B
M
H
X
X'
F'
F
G
R
R'
T'


Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 14.

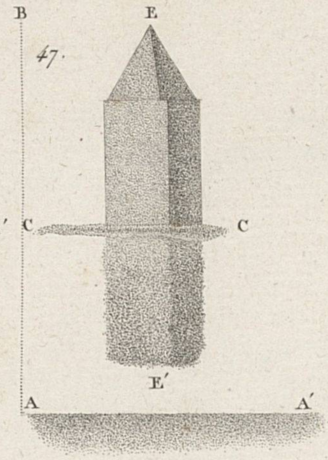

23.
M'
M
O
D'
D
A
24.
O
T'
H
T
m
M
L
C
25.
T
O
M
L
H
C
26.
27.
28.
29
30.
31.
32.
f
e
d
c
b
a 1.ere Apparition.
33
Lever.
g
h
i
k
l Soleil Levé.
34
Coucher.
a
b
c
35
Coucher.
a
b
c
d
e
f
g
Images du Soleil à son Lever et à son Coucher sur l'horizon de la Mer.


36.
37.
H
H′
Sable
h
h′
Sable
38.
R
T
T′
S
S′
P
P′
M
Q
Q′
V
V′
O
A
H
39.
40.
41.
40 bis.
Horison appart.
42.
A
B
C
F
H
43.
B
C
D
F
H
44.
45.
G
E
C
E′
G′
H

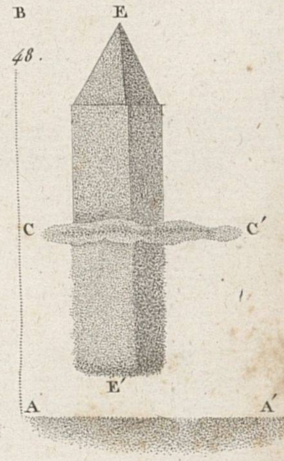
46.



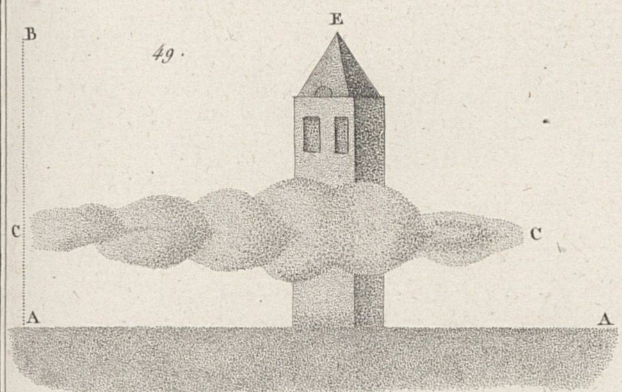
47.



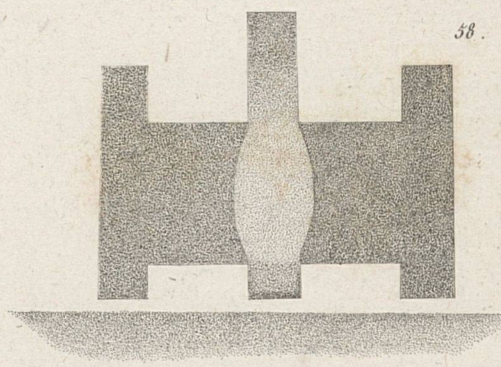
48.



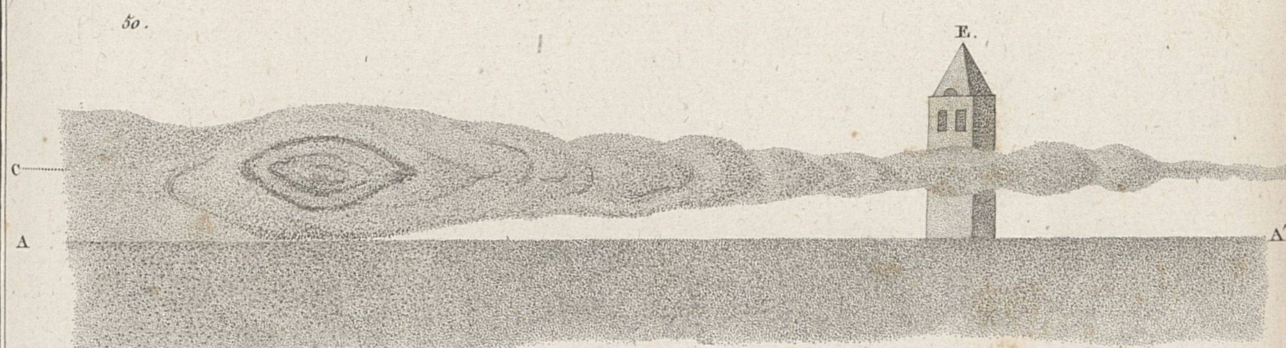
49.

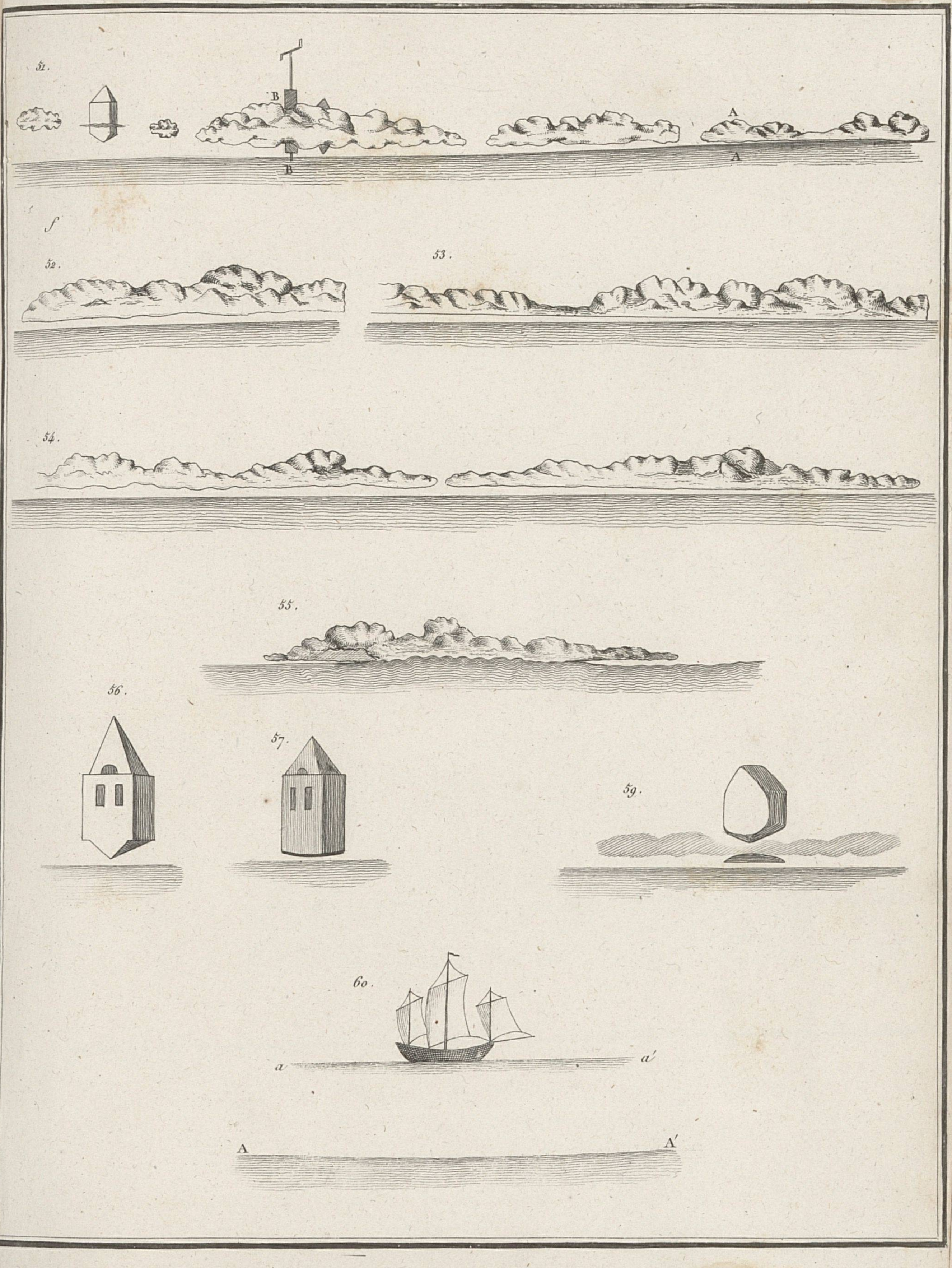


58.

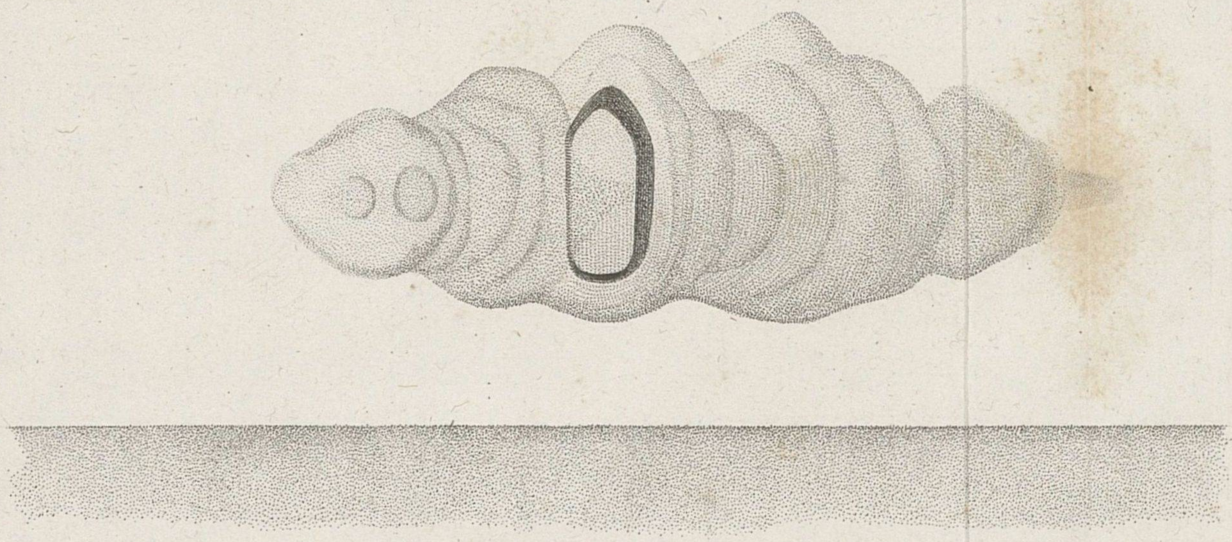


50.

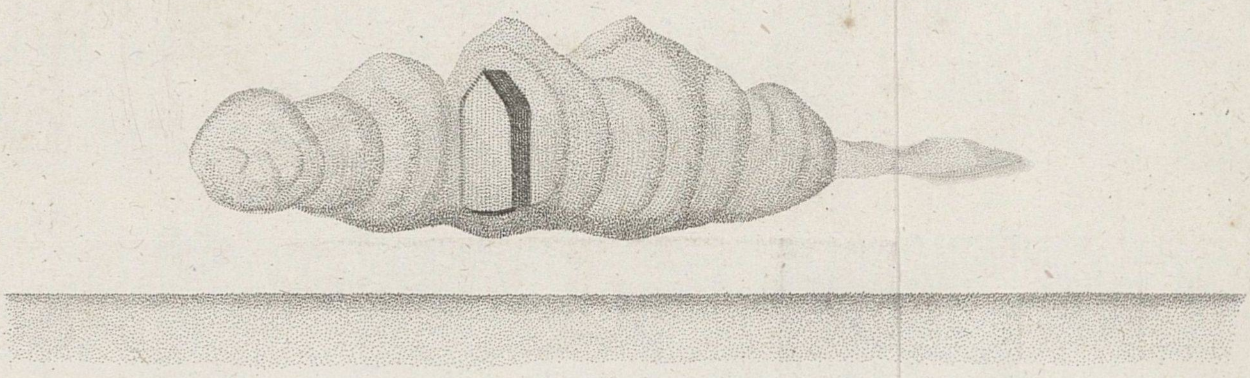



51.
B
B
A
A
f
52.
53.
54.
55.
56.
57.
59.
60.
a
a'
A
A'

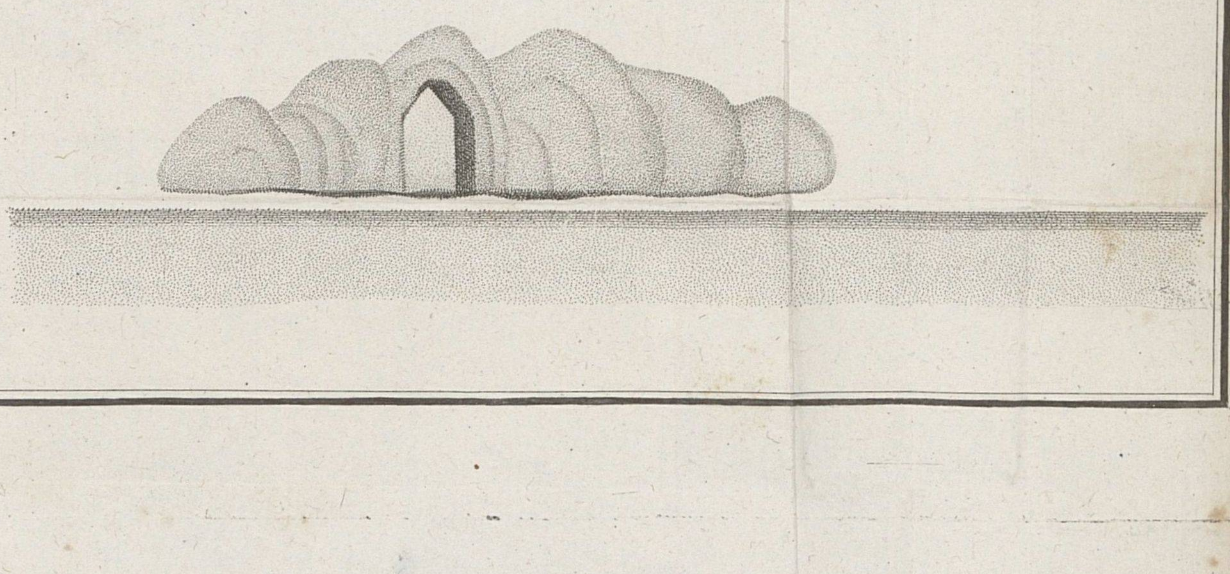
61.



62.



63.



Clara. B. Adnat del.

DELLE
LIVELLAZIONI BAROMETRICHE
MEMORIA
DI
FRANCESCO VENINI

Inserita nel primo tomo delle Memorie di Fisica e Matematica dell' Istituto Nazionale Italiano.

BOLOGNA 1806.

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFI DELL' ISTITUTO,

SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

PARTE I.

METODO DIRETTO PER MISURAR COL BAROMETRO LE ALTEZZE DEI LUOGHI.

SEZIONE I.

Principj ai quali è appoggiato il metodo diretto.

1. L' aria, come tutti gli altri corpi e solidi e fluidi, or è dilatata ed or condensata da quella causa occulta che produce in noi le sensazioni di caldo e di freddo. Essa in oltre è grave; è sensibilmente compressibile anche da forze mediocri esternamente applicate; e dalla combinazione di queste due proprietà ne segue necessariamente, che le parti superiori dell' aria premendo col lor peso le inferiori, queste ne sono tanto più condensate quanto maggiore è l' altezza dell' aria superiore, e minore la forza del calore che le dilata. Dopo le celebri sperienze del Torricelli e del Pascal è fuor d' ogni dubbio, che l' acqua nelle

trombe ed il mercurio nei barometri son sostenuti dalla pression dell' aria ad altezze che seguono la ragion diretta di questa pressione e l' inversa dei pesi specifici dell' acqua e del mercurio. A questi fondamenti è appoggiato il metodo di livellare o misurar col barometro le altezze dei luoghi: essendo manifesto che se un barometro si trasporterà ad una sensibile altezza, tutta l' aria che l' uom si lascia addietro non potrà più premere il mercurio, il quale per questa diminuzion di pressione sarà sostenuto ad altezze tanto minori, quanto maggiori saran quelle cui il barometro è trasportato. Or se l' aria non fosse condensata inferiormente dal peso delle parti superiori, ma avesse a tutte le altezze un' egual densità, questo mezzo di misurar le altezze dei luoghi sarebbe d' una facilità incomparabile. Ma poichè, come ho già detto, ad altezze maggiori nell' atmosfera corrispondono densità minori nell' aria, non è permesso conchiudere dalla diminuzione della colonna di mercurio nel barometro l' altezza cui questo si è trasportato, se prima non è nota la legge colla quale le densità dell' aria corrispondono ai pesi che la comprimono. Questa legge però con un grandissimo numero di sperienze fatte in Europa in America e in Affrica ad altezze fra loro diversissime, è stata felicemente determinata dai Fisici; ed è, che le condensazioni dell' aria sono costantemente proporzionali ai pesi comprimenti, purchè non varii la temperatura.

2. Stabiliti questi principj, non è difficile il trovare una formola, colla quale dalle altezze del mercurio sostenuto nel medesimo tempo e ad un' egual tempera-

tura in due stazioni poste verticalmente una sopra l'altra, si conchiude la distanza delle due stazioni. A questo fine supponiamo che la temperatura dell' atmosfera e di tutti i corpi che vi sono immersi, e quindi anche la temperatura del mercurio nel barometro sia sempre eguale ed invariabile: che sia per esempio quella del ghiaccio indicata nei termometri dal grado zero di Reaumur o 32 di Farheneit. Chiamata 1 la densità del mercurio a questa temperatura, supponiamo eziandío che si determini con qualche esatto esperimento qual sia il rapporto della densità del mercurio a quella d' un tenuissimo strato d' aria compressa dal peso d' una colonna superiore dell' atmosfera, la qual sostenga il mercurio nel barometro ad una data altezza; e questa si chiami A'. Il detto rapporto che può trovarsi, come vedrem fra poco, in tre diverse maniere, sia quello di 1 ad $\frac{1}{D}$, o sia di $D : 1$. In questo caso adunque alla densità 1 del mercurio corrisponde nel dato strato d' aria la densità $\frac{1}{D}$. Supponiam ora che l' altezza del mercurio nel barometro ad una data stazione ed in un dato tempo sia espressa per A. Egli è chiaro che a qualunque altra stazion superiore, la cui distanza dall' inferiore sia indeterminata e si chiami x, sarà nello stesso tempo indeterminata l' altezza del mercurio nel barometro, la qual potrà in conseguenza chiamarsi y. All' altezza x sopra la stazione inferiore sarà dunque l' aria compressa dal peso y; ed a questa compressione corrisponderà una densità, il cui rapporto alla den-

sità del mercurio potrà chiamarsi $\frac{1}{\delta}$. Avrem dunque, per la legge generale delle densità proporzionali ai pesi comprimenti, la proporzione

$$A' : y = \frac{1}{D} : \frac{1}{\delta}\text{; ed } \frac{1}{\delta} = \frac{y}{A'D}.$$

Avendo supposta variabile l' altezza x, possiamo anche supporre ch' ella cresca del suo differenziale dx; nel qual caso è manifesto che l' altezza del mercurio nel barometro dovrà in una maniera corrispondente non crescere ma calare del suo differenziale dy, e che il peso del nuovo strato infinitesimo d' aria sarà eguale al peso della quantità infinitesima di cui s' è diminuito il mercurio sostenuto nel barometro. Ora ciascuno di questi pesi è uguale al volume moltiplicato nella densità; ed i volumi, per l' eguaglianza delle basi cilindriche, sono unicamente proporzionali alle altezze. Sarà dunque $\frac{1}{\delta} \times dx$ quantità che cresce eguale ad $1 \times dy$ quantità che cala, o sia $\frac{dx}{\delta} = -dy$; e sostituendo in luogo di $\frac{1}{\delta}$ il suo valore $\frac{y}{A'D}$, sarà $\frac{y\,dx}{A'D} = -dy$; e quindi $dx = -\frac{DA'dy}{y}$. L' integrale di quest' equazione è, come a tutti è noto, $x = -DA'ly + C$; e la costante C si determina ben facilmente, osservando che alla stazione inferiore dove x è zero, l' altezza del mercurio nel barometro è A. Sarà dunque

$o = -DA'lA + C$, e per conseguenza $C = DA'lA$; ed

$x = DA'lA - DA'ly = DA'(lA - ly) = DA'l\frac{A}{y}$, e

(posto a in luogo di DA') $x = al\frac{A}{y}$.

3. Niente è più agevole che il determinar per mezzo di questa formola in qual rapporto saranno le altezze del mercurio nel barometro corrispondenti alle altezze dell' atmosfera prese in una progression continua aritmetica. Siano le altezze dell'atmosfera x, x', x'', e quelle del mercurio nel barometro y, y', y''. Avrem

dunque le tre equazioni $x = al\frac{A}{y}$; $x' = al\frac{A}{y'}$; $x'' = al\frac{A}{y''}$.

Dunque essendo x, x', x'' in progression continua aritmetica, nella progression medesima saranno anche

$al\frac{A}{y}$, $al\frac{A}{y'}$ ed $al\frac{A}{y''}$. Sarà dunque

$2al\frac{A}{y'} = al\frac{A}{y} + al\frac{A}{y''}$; e dividendo per a, poi passan-

do dai logaritmi ai numeri $\frac{A^2}{y'y'} = \frac{A^2}{yy''}$. Dunque

$yy'' = y'y'$; e per conseguente $y : y' = y' : y''$, vale a dire che le altezze del barometro sono in una proporzion continua geometrica, quando quelle dell' aria sono in una proporzion continua aritmetica.

4. Ma non è questo il solo uso dell' equazione $x = DA'(lA - ly)$. Il suo principal vantaggio è anzi quel-

lo di somministrare immediatamente la distanza verticale di due stazioni poste l' una sopra l' altra, per mezzo dei logaritmi delle altezze alle quali il mercurio è sostenuto nel barometro in ciascuna delle medesime. Per dimostrarlo io comincio ad osservare che i logaritmi di quest' equazione procedenti dall' integrazione della frazione $\frac{dy}{y}$ sono iperbolici; ond' è che volendo far uso dei logaritmi volgari, converrà moltiplicarli pel logaritmo iperbolico di 10. Ciò posto, esprimendo per L i logaritmi volgari, l' equazion superiore diventerà
$x = DA' l\, 10\, (LA - Ly)$. Prima di poter servirsi di quest' equazione è dunque necessario determinar il valore di DA', cioè il rapporto delle densità del mercurio e dell' aria compressa da un peso che si esprime coll' altezza A' del mercurio nel barometro. Ho già detto che questo rapporto può determinarsi in tre diverse maniere. Una di queste consiste nell' esplorare con un' estrema esattezza qual sia il peso dell' aria contenuta in un recipiente, pesando prima il recipiente stesso pien d' aria, e ripesandolo poi di quella vuotato quanto è possibile, non ommesso però di tener conto e del calore dell' aria medesima indicato dal termometro, e del peso che la comprime, il qual è indicato dall' altezza del barometro da osservarsi nel tempo dello sperimento. Da questo metodo, a dir vero, non può sperarsi una grande esattezza; ma ciò non ostante io riferirò quest' esperimento fatto già con somma diligenza dal cavalier Shuckburg, e da lui riferito alla pag. 558 del volume 67 parte 2ª. delle transazioni filosofiche di Londra. Egli osservò dunque, che stando

il barometro all'altezza di 29,27 pollici inglesi, ed il termometro di Farheneit a 53, fu il peso dell' aria a quel del mercurio come 1 ad 11364,6; onde segue che chiamata δ la densità del mercurio ed $\frac{1}{D}$ quella dell'aria, fu

$$\delta : \frac{1}{D} = 11364,6 : 1 \text{; e per conseguenza } D = \frac{11364,6}{\delta}.$$

Se la temperatura comune dell' aria e del mercurio fosse stata zero di Reaumur, non avremmo a far altro che sostituir nella formola $x = DA'l\,10\,(LA - Ly)$ il numero 11364,6 in luogo di D, e per A' l'altezza 29,27 ridotta alle antiche misure francesi delle quali sempre ci serviremo. Or le misure inglesi si riducono alle antiche francesi moltiplicandole per la frazione $\frac{100000}{106575}$;

e per conseguenza 29,27 pollici inglesi corrispondono a 27,464 francesi, negligentando i decimali minori dei millesimi. Sarebbe dunque $DA' = 11364,6 \times 27,464$, e la formola si cangerebbe in $x = 11364,6 \times 27,464\,l\,10$ $(LA - Ly)$ presi i pollici dell' altezza barometrica per unità. Ma la temperatura dell' aria non fu quella del ghiaccio ma di 53 gradi di Farheneit corrispondenti a $9\frac{1}{3}$ di Reaumur. Dunque l'aria ed il mercurio ebber nell' esperimento una minor densità che alla temperatura del ghiaccio; e noi vedremo nelle seguenti sezioni, che il mercurio dal grado zero al grado $9\frac{1}{3}$ si dilata di 0,002262, e l' aria di 0,0471 dei volumi primitivi. Per applicar la formola alla temperatura del ghiaccio convien dunque dividere per 1,002262 l' altezza 27,464 del barometro, e per 1,0471 la densità D; poi nel valore di

D divenuto $\frac{11364,6}{1,0471\,\delta}$ sostituir $\frac{1}{1,002262}$ in luogo di δ.

Or con queste operazioni troveremo $A' = 27,402$; e

$D = \frac{11364,6 \times 1,002262}{1,047} = 10878$. Il coefficiente si cangerà dunque in $10878 \times 27,402\; l\, 10$. Per calcolarlo più facilmente, se ne prendano i logaritmi, e si troverà

$$L\ 10878 = 4\ .\ 0365491$$
$$L\ 27,402 = 1\ .\ 4377823$$
$$L\ .\ l\ 10 = 0\ .\ 3622159$$
$$L\ coeff. = 5\ .\ 8365473$$

Questo logaritmo del coefficiente suppone i pollici per unità; ma per aver una formola espressa da numeri minori, si sostituiscan le unità delle tese a quelle dei pollici, il che si otterrà sottraendo dal numero precedente il logaritmo di 72, o sia dei pollici contenuti nella tesa. Fatta questa sottrazione, si avrà il logaritmo del coefficiente in tese $= 3.9792148$; al qual corrisponde il numero 9532, 7. Tal è il coefficiente dedotto dall' esperienza del cavalier Shuckburg, il quale però, come vedrem poi, dà quasi sempre le altezze troppo grandi.

5. La seconda maniera di calcolar il coefficiente, che è quella di cui io mi son servito, è nello stesso tempo e più facile e più sicura. Consiste questa nel determinar il rapporto dei pesi specifici del mercurio e dell' aria col metodo seguente. Si fan nello stesso tempo due osservazioni barometriche ad una distanza ver-

tical così piccola che lo strato d' aria compreso fra le due stazioni possa considerarsi come d' una densità uniforme. Imperocchè la differenza tra le due altezze del mercurio nei barometri indicherà allora la lunghezza della colonna mercuriale che fa equilibrio alla colonna aerea compresa fra le due stazioni: onde si potrà conchiudere la densità del mercurio essere a quella dell' aria nella ragion medesima in cui è la distanza delle due stazioni alla differenza delle altezze del mercurio nei barometri. Ora nel giorno 19 febbrajo 1792 io ho fatta quest' esperienza in Varena sul lago di Como, nel qual giorno fu l' aria alla temperatura del ghiaccio; e n' ho avuti i seguenti risultati. A 58 piedi e 10 pollici, cioè piedi 58,83333 sopra la superficie del lago l' altezza del barometro fu di linee 326,9; ed alla superficie del lago di linee 327,7. La temperatura del mercurio fu eguale nelle due stazioni, cioè d' un grado e $\frac{7}{9}$ di Reaumur. Ciò posto, le altezze barometriche ridotte, come spiegherò poi, alla temperatura del ghiaccio, sono di linee 326,75424, e 327,55384. La lor differenza fu dunque di linee 0,7996. Quando feci quest' osservazione, il termometro di Reaumur esposto all' aria aperta a ciel nubiloso fu a zero. Dunque essendo l' aria alla temperatura del ghiaccio $\frac{7996}{10000}$ di linea di mercurio alla stessa temperatura, fecero equilibrio a piedi 58,83333 d' aria compressa da un peso corrispondente alla media fra le due altezze del barometro, cioè a linee di mercurio 327,15404. In queste circostanze fu dunque il peso specifico dell' aria a quello

del mercurio come $\frac{7996}{10000}$ di linea a piedi 58,83333 d'aria equivalenti a linee 8471,99956. Si divida quest' ultimo numero per 0,7996, e si troverà il quoziente 10595,3, dal qual risulta essere stato nel tempo dell' osservazione il peso specifico dell' aria $= \frac{1}{10595,3}$ di quello del mercurio.

Nel coefficiente della formola abbiam dunque $D = 10595,3$; $A' = 327,15404$, e $l\ 10 = 2.3025851$; e presi i logaritmi

$$
\begin{aligned}
L\ 327,15404 &= 2\ .\ 5147523 \\
L\ 10595,3 &= 4\ .\ 0251133 \\
L.\ l\ 10 &= 0\ .\ 3622159 \\
\hline
L\ \mathit{coeff.} &= 6\ .\ 9020815
\end{aligned}
$$

Se da questo logaritmo che ha le linee per unità, si sottrarrà quello di 864 numero delle linee contenute nella tesa, il residuo 3.9655678 sarà il logaritmo del coefficiente in tese, al qual corrisponde il numero 9237,78.

Altre osservazioni fatte ad altezze minori ancora della precedente, e nelle quali si può con maggior ragione supporre uniforme la densità dell' aria posta fra le due stazioni, una cioè all' altezza di piedi 28,88; e l' altra di piedi 38,166 m' han dati i coefficienti 9255,34 e 9256,58.

Il coefficiente può in fine determinarsi anche di questa maniera. Si misuri o geometricamente o colla livellazione ordinaria la distanza verticale di due stazioni,

e si chiami Δ. La formola è in questo caso $\Delta = D A' l\, 10\, (LA - Ly)$ per la temperatura del ghiaccio. Ma per le altre temperature si dovrà 1°. col metodo che spiegherò nella terza sezione, indurre le altezze apparenti A, y alle vere a, y'. 2°. se la distanza Δ non è molto grande, la temperatura della colonna d'aria che le corrisponde, si potrà considerare come costante prendendo una media fra quelle delle due stazioni; ed in questo caso se C, c esprimono i calori o le dilatazioni dell' aria per le temperature anzidette, la formola sarà

$\Delta = D A' \left(\frac{C + c}{2}\right) l\, 10\, (La - Ly')$. Si prenda in questa

per incognita il coefficiente costante $D A' l\, 10$, e si chiami x; e sarà $\Delta = x \left(\frac{C + c}{2}\right) (La - Ly')$. Prendendo i

garitmi si ha quindi $Lx = L\Delta - L\left(\frac{C + c}{2}\right) - L(La - Ly')$.

Nel gran numero delle osservazioni del Sig. de Luc quella che più d' ogn' altra s' accosta alla temperatura del ghiaccio, è la prima della stazion seconda. In questa fu $\Delta = 71,472$ tese; le altezze corrette dei barometri

$a = 5222, y' = 5129$ sedicesimi di linea, e $\frac{C + c}{2} = 0,9924$.

Da questi dati vien l' equazione $Lx = L\, 71,472 - L\, 0,9924 - L.(L\, 5222 - L\, 5129) = 3.9651208$; al qual logaritmo corrisponde il numero 9228,3; che in questo caso esprime il coefficiente $D A' l\, 10$.

In una delle osservazioni del General Roy la temperatura dell' aria fu un terzo di grado di Reaumur, cioè ben vicina a zero. La distanza delle stazioni fu di piedi inglesi 281 corrispondenti a tese di Francia 43,944. Le altezze corrette dei barometri furono 29,661, e 29,338 pollici. Finalmente il calor medio fu 1,0017. Qui dunque abbiamo $Lx = L\,43,944 - L\,1,0017 - L(L\,29,661 - L\,29,338) = 3.9649840$; al qual logaritmo corrisponde il numero $9225,4 = DA'l\,10$. Il medio dei cinque valori del coefficiente trovati con queste due osservazioni e colle tre mie è dunque 9240,69, o 9240,7; che ha per logaritmo 3.9657049. Conchiudiam dunque che la formola da cui son espresse le distanze verticali delle stazioni per la temperatura costante del ghiaccio, è $x = 9240,7\,(LA - Ly)$.

Per vedere con qualche esempio l' applicazione di questa formola, calcoliamo l' osservazione del General Roy posta qui sopra, negligentando la piccolissima dilatazion dell' aria corrispondente alla temperatura d' un sol terzo di grado di Reaumur. Nella formola $x = 9240,7$ $(La - Ly)$ avrem dunque $La - Ly = 0.0047553$, e

$$L.(La - Ly) = 7\,.\,6771779$$
$$L\,coeff. = 3\,.\,9657049$$
$$Lx = 1\,.\,6428828$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 43,9423; e quindi l' altezza calcolata è minor della vera di $\frac{17}{10000}$ di tesa o ben poco più d' un centesimo di piede.

6. E qui si noti bene l' essenzial circostanza da noi

replicatamente indicata, che le due stazioni sian poste verticalmente l'una sopra l'altra o per lo meno ad una distanza orizzontal così piccola, che si possa senz' alcuno error sensibile negligentare. E invero a chi non è noto quante sian le variazioni e quanto considerabili, alle quali è soggetto il barometro ne' nostri climi? Or queste variazioni non accadon già dappertutto nel tempo medesimo; ma passan successivamente d'uno in altro luogo così che ben di rado sono eguali in luoghi sensibilmente distanti: e avviene anche talvolta, che mentre il barometro è stazionario in un luogo, e' soffre in un altro anche ad una distanza non molto grande una variazion considerabile. Colui dunque che dalle osservazioni barometriche fatte nello stesso tempo in due luoghi situati ad una sensibil distanza orizzontale ne volesse conchiudere col metodo esposto qui sopra la corrispondente altezza delle stazioni, si esporrebbe al pericolo di cadere in gravissimi errori, attribuendo alla diversa altezza dei luoghi anche quella porzione di diversità delle altezze barometriche, ch' è tutta propria delle variazioni diverse ivi accadute nel peso dell' atmosfera. Eccone una prova evidentissima. La distanza di Milano e di Como non eccede la terza parte del grado quarantacinquesimo di latitudine. Ora nel dicembre del 1792 e nel gennajo del 93 da 41 osservazioni corrispondenti fatte in 18 giorni diversi a Milano dal celebre matematico ed astronomo Abate Oriani, il quale da gran tempo m' onora della sua amicizia, ed a Como da me, risulta nelle altezze dei nostri barometri de' quali ci è nota la corrispondenza, una differenza media di linee 3,222 del mercurio alla temperatura di gradi 3, 55 di

Reaumur. Ma le variazioni del peso dell' aria o delle altezze barometriche avvenute da un giorno all' altro furono ben diverse nelle due stazioni di Milano e di Como. E invero nello spazio di quattro giorni consecutivi ne' quali non variò guari la temperatura del mercurio, si ebbero in esse le seguenti variazioni. Dal primo giorno al secondo il barometro s' abbassò a Milano di linee 5, 725, a Como di sole linee 5, 423. Dal giorno secondo al terzo i barometri s' alzarono, ma l' alzamento fu a Milano di linee 4, 608, e a Como di 4, 790. Dal terzo al quarto vi fu un abbassamento a Milano di linee 5,585, ed a Como di 5,312. Da questa ineguaglianza di variazioni ne risultò dunque una differenza nelle due altezze dei barometri non costante ma sempre decrescente; e questa assai diversa dalla differenza media di cui sopra ho parlato. In fatti la differenza nel primo giorno fu di linee 3,442; nel secondo di 3,150; nel terzo di 2,972; e nel quarto di 2,695. Di qui è che se per mezzo di queste giornaliere osservazioni si calcolerà la differenza d'altezza nelle due stazioni, questa si troverà sempre minore da un giorno all' altro, benchè sia certo non essersi fatto alcun cangiamento nella situazione e quindi nell' altezza relativa delle due stazioni. Ma se io, in vece di restare a Como, avessi scorsa in quei quattro giorni tutta la lunghezza del lago, e avessi avuto in quattro diverse osservazioni fatte in riva del medesimo quelle stesse altezze barometriche ch'ebbi a Como, ne avrei potuto conchiudere con questo metodo troppo fallace, che il livello del lago va di continuo abbassandosi da Como fino a Gera, e che la quantità di quest' abbassamento è di tese $9\frac{1}{2}$ all' incirca. Ma

calcolata, come vedremo altrove, l' altezza del livello medio del lago sopra l' orto botanico di Brera in Milano col prender le medie d' un grandissimo numero d' osservazioni corrispondenti fatte a Milano e a Como, a Milano e a Domaso borgo poco distante da Gera, questa si trovò non molto diversa per Como e per Domaso, essendo per Como di tese 42, 619, e per Domaso di tese 41, 821; la cui differenza non è che di tese 0,798, vale a dire che non arriva a 5 piedi. Ma anche questo assai minore abbassamento del lago non può stare in verun modo. Imperciocchè se nella sua superficie avesse luogo qualche sensibil differenza di livello, dovrebbe questa attribuirsi alla quantità dell' acque portate dai fiumi influenti, la quale spianandosi successivamente esca al fine dall' emissario. Or ciò posto, la maggiore altezza dovrebbe trovarsi a Domaso vicino all' ingresso dell' Adda e non a Como dov' entran pochissime acque, cioè quelle del torrente Cosia accanto alla città stessa, e della Breggia vicin di Cernobio. Quindi si fa manifesto in qual conto si debban tenère le livellazioni non sol di laghi, ma anche di lunghissime strade, che varj dotti Fisici han creduto di poter fare in questa maniera. Anche in alcune osservazioni corrispondenti fatte alla riva del mare in Marsiglia dal Sig. Bernard già astronomo dell' osservatorio di quella città ed in Tolone da me, io trovai già una sensibil differenza nelle altezze barometriche, la quale non può certo attribuirsi ad una corrispondente inclinazione nella superficie del mare; il cui livello, per una distanza che non arriva a 12 leghe di ventiquattro al grado, dev' essere quasi perfettamente orizzontale. Io pensai nondimeno altre

volte, ch' eziandío viaggiando si potesse livellare la via trascorsa per mezzo delle osservazioni barometriche, quando queste fosser fatte alle stesse ore concertate da due persone che vadan una dietro l' altra ed a stazioni non mai più distanti fra loro di sei o sette miglia. E così feci già nel principio di settembre del 1777 lungo tutta la strada che va da Bellinzona al lago di Lucerna pel monte S. Gottardo; ma avendo lasciati a Parigi con tutti i miei libri e le mie carte anche i registri di quella livellazione senza aver mai potuto ricuperar nulla, io non so più quali ne fossero i precisi risultati. Mi ricordo però che l' altezza della cima di Fieudo, alla quale col celebre professor Volta salii dall' ospizio dei Cappuccini, fu per le mie osservazioni alquanto minore di quella, che il dotto Padre professor Pini trovò pochi anni dopo col medesimo metodo, ma che la differenza fu d' un picciol numero di tese. Non abbiamo però ragione di fidarci gran fatto neppure di questo metodo; poichè se alle due estremità della via che si scorre e misura in un giorno, seguirà una variazion diversa nel peso dell' aria, questa o gradatamente nelle stazioni successive, o tutta ad un tratto da una in un' altra stazione entrerà nelle osservazioni barometriche e le renderà incerte e fallaci. Il solo mezzo di determinar col barometro le altezze dei luoghi posti ad una considerabil distanza orizzontale, è quello di fare in ciaschedun dei medesimi un grandissimo numero d' osservazioni corrispondenti in molti giorni diversi e prenderne poi i risultati medii; nel qual caso gran disgrazia sarebbe se le diverse variazioni accadute nel peso dell' aria alle due stazioni non si compensasser fra loro. Con questo metodo

l' altezza del livello medio del lago di Como sopra l' orto botanico di Brera a Milano si trova, come vedrem poi, affatto eguale a quella che risulta da un' esattissima misura geometrica del sig. Abate Oriani, essendo la differenza loro di $\frac{1}{100}$ di tesa, cioè minore di un quinto dell' antico piede di Parigi sopra 253 e $\frac{1}{2}$. Ma tutte queste difficoltà non ostanti, io ho creduto poter anche solo e con un solo barometro determinar la differenza di livello fra i due laghi di Como e di Lugano; il che come possa e con quali e quante precauzioni eseguirsi, il vedrem poi nella relazion che farò di questa livellazione.

Sezione 2.

Effetti del calore nella densità e nel peso specifico del mercurio.

7. Dalle cose finor dichiarate ognun vede quanto semplice e spedito sarebbe il metodo di misurar col barometro le altezze dei luoghi nella supposizione, che la temperatura dell' atmosfera e dei corpi che in quella son contenuti, fosse mai sempre ed in ogni luogo invariabile. Ma la natura che nelle leggi e operazioni sue non consulta la facilità ed il comodo de' nostri calcoli, vuole anzi, che in luoghi e tempi diversi anche la temperatura dell' aria e degli altri corpi soffra di molte e di gran variazioni. E poichè l' esperienza c' insegna essere ogni corpo dilatato dal calore e condensato dal freddo, chiara cosa è che queste dilatazioni e condensazioni diverse avendo luogo nell' aria e nel mercurio, ne faran continuamente variare la densità ed il peso

specifico. E di quì è che date due colonne di mercurio sospese nel barometro, le lor pressioni alle basi allor solo saran proporzionali alle semplici altezze, quando sarà eguale la lor temperatura; ma se questa è diversa, le pressioni saran proporzionali nel tempo stesso e alla lunghezza delle colonne e alla densità e peso specifico del mercurio corrispondenti al calor diverso delle medesime. E per egual modo essendo l' aria dal calor dilatata, e calando per conseguenza al crescer di questo la densità sua, se questa cresce col crescer de' pesi comprimenti, scemerà eziandío all' aumentar del calore, o, usando il linguaggio ed i termini dei matematici, le densità dell' aria saranno nella ragion diretta dei pesi comprimenti e nell' inversa delle differenti quantità del calore che la dilata. Ciò posto, se a due date stazioni l' aria sarà compressa da due pesi A', a proporzionali alle due altezze che avrà il mercurio nei barometri quivi osservati; chiamate D, d le due densità dell' aria alle stazioni medesime, non potrà aver luogo la proporzione $A : a = D : d$, se non ha luogo eziandío la condizione, che l' aria sia egualmente calda nell' una e nell' altra stazione, e che anche le due colonne del mercurio abbiano un' egual densità e per conseguenza lo stesso calore. Ma se diverso sarà il calor del mercurio nei due barometri, bisognerà sapere di quanto la colonna più o men calda sia dilatata o condensata, e d' altrettanto diminuirne o accrescerne la lunghezza; ed allor solo si potrà dire che i pesi dai quali l' aria è compressa, sono proporzionali alle due altezze barometriche. Supponiamo che per questa correzione l' altezza A si cangi in A', e i pesi comprimenti sa-

ranno in questo caso nel rapporto di A ad A'. Per aver ora anche il rapporto delle densità dell' aria alle due stazioni nella supposizione che il suo calor sia diverso, chiamiamo C, c i due calori dell' aria alle due stazioni: e poichè, come sopra abbiam detto, le densità della medesima sono nella ragion diretta dei pesi comprimenti e nell' inversa dei calori dilatanti, se ne avrà la proporzione $D:d = \frac{A'}{C} : \frac{a}{c}$. Nè è men chiaro che da questa proporzione sen deduce immediatamente quest' altra $DC:dc = A':a$, la qual significa esser le altezze corrette del mercurio nella ragion composta della densità e del calor dell' aria che nei barometri lo sostiene. Ma quì non è da ommettersi un' osservazione che molto contribuirà a mettere in chiaro il vero significato di questa proposizione. Quando adunque io ho detto che le densità dell' aria sono nella ragione inversa dei calori, non ho inteso col nome di calore significar altro fuorchè l' effetto sensibile e noto, che una cagione occulta e mal nota produce nell' aria, come in tutti gli altri corpi, or dilatandola ed or condensandola. La quantità precisa di cui un dato volume d' aria compressa da un dato peso ad una data temperatura indicata dal termometro e che si considera come primitiva, vien poi dilatata o condensata al variar della temperatura, questa sola si vuol intendere pel nome di calore o di grado di calore. Supponiamo a cagion d' esempio che il peso A' sia doppio del peso a: se fosse possibile che l' aria compressa dal peso A' fosse eziandío dilatata dalla cagion del calore in uno spazio due volte maggior di quello, che sotto alla stessa pressione avrebbe occupato nel-

la temperatura primitiva da cui cominciano le dilatazioni e le condensazioni, e che nello stesso tempo l' aria compressa dal peso a conservasse la temperatura primitiva, sarebbe allora $A'=2a$, e $C=2c$; e la proporzione $D:d=\frac{A'}{C}:\frac{a}{c}$ si cangerebbe in $D:d=\frac{2a}{2c}:\frac{a}{c}$; vale a dir, che sarebbe $D=d$, o sia, che l' aria alle due stazioni avrebbe un' egual densità, conseguenza manifesta della supposizion fatta; poichè quell' aria che pel doppio peso comprimente dovrebbe restringersi fino alla metà del suo volume, si dovrebbe nello stesso tempo per l' azione della cagion del calore dilatare in uno spazio due volte più grande.

8. Di niun uso sarà dunque la formola semplicissima del numero 5, che con un facile e speditissimo calcolo determina per mezzo delle altezze barometriche le verticali distanze delle stazioni, toltone il caso in cui abbia luogo la supposizione, che la temperatura e del mercurio e dell' aria sia quella appunto del ghiaccio che si scioglie; il qual caso, nelle continue variazioni cui va soggetta la temperatura dell' atmosfera e dei corpi che ne son circondati, non si avvera che rarissime volte. E certo ogni speranza d' un felice esito sarebbe del tutto perduta, se alcuni dottissimi Fisici non fosser giunti coll' ajuto d' un gran numero d' esperimenti esattissimi a scoprire la quantità precisa e l' ordin costante, o vogliam dire le leggi colle quali l' aria ed il mercurio si dilatano e si condensano alle diverse temperature che dai gradi del termometro sono indicate. Questo ha fatto prima d' ogn' altro il Sig.

de Luc, alle cui dotte, numerose, e ben si può dire ostinate ricerche siam debitori del maraviglioso perfezionamento al qual è giunto oggimai il metodo di misurar col barometro le altezze dei luoghi. E dall' esempio dell' ingegnoso Fisico di Ginevra eccitati due illustri inglesi, voglio dire il cavaliere Shuckburg ed il General Roy, hanno anch' essi, e principalmente quest' ultimo, con molti e sottili esperimenti contribuito moltisimo ad illustrar questa materia ed a stibilire e metter in chiaro le leggi con cui a temperature diverse corrispondon le dilatazioni e le condensazioni del mercurio e dell' aria.

9. Quanto al mercurio, avendo il sig. de Luc posto il barometro in una stufa, di cui andò scaldando l' aria successivamente, egli trovò che siccome il suo termometro si alzava gradatamente dal segno del ghiaccio a quello dell' acqua bollente, così una colonna di mercurio di 27 pollici francesi, la quale era allora sostenuta nel barometro dalla pressione dell' atmosfera, si allungava essa pure gradatamente: e credè poter conchiudere dalla sua sperienza, che ad un accrescimento di calore, per cui il termometro dal segno del ghiaccio salisse a quello dell' acqua bollente, la colonna del mercurio di 27 pollici verrebbe a dilatarsi di 6 linee o di un mezzo pollice. Se quello adunque si supporrà di che il sig. de Luc non ha mostrato avere alcun dubbio, cioè che questa dilatazion del mercurio nel barometro sia uniforme, con un calcolo speditissimo si troverà di quanto un pollice di mercurio si dilati per ogni grado del termometro. Imperciocchè se la dilatazion totale d' un mezzo pollice si dividerà per 80, nu-

mero dei gradi contenuti fra il ghiaccio e l'acqua bollente, si troverà che ad ogni grado corrisponde nella colonna di 27 pollici una dilatazione di pollici 0,00625, la qual divisa per 27 ci darà la dilatazione di ciascun pollice = 0,0002315.

Quì però non si vuol ommettere un' osservazione, la quale comechè non sia per se medesima di molta importanza, servirà però a contentare que' Fisici diligentissimi che niuna minuzia consentono potersi ne' calcoli disprezzare; nè gli accettan per buoni e legittimi, se non sono accompagnati dalla più scrupolosa esattezza. Il sig. de Luc ha graduati i suoi termometri a Ginevra, ove la pression dell' aria suole nel barometro sostenere il mercurio allo intorno di pollici 27; e sotto a questa pressione appunto fu da lui segnato nelle scale dei termometri il punto che corrisponde al calore dell' acqua bollente. Ma nei termometri che comunemente si costruiscono nelle pianure d' Inghilterra, di Francia e d' Italia, quel punto medesimo si suol segnare quando l' altezza del mercurio nel barometro non è di 27 ma di 28 pollici. Richiedendosi adunque, come tutti i Fisici ben sanno, un calor tanto maggiore per far bollir l' acqua, quanto è maggiore la pression dell' aria che s' oppone alla formazione del vapor espansibile da cui nasce l' ebollizione, egli è manifesto che sotto una pressione di 28 pollici sarà il calore dell' acqua bollente, maggior di quello che il sig. de Luc ha segnato ne' suoi termometri col grado 80. Ma l' incomparabil diligenza di quello stesso industriosissimo Fisico ne somministra il mezzo di riparar facilmente a questo leggiero inconveniente, e di fare alla dilatazione

d' ogni pollice di mercurio la piccola correzione di cui abbisogna, quando si voglia applicare alla graduazione dei nostri termometri graduati, come ho detto, sotto una pressione di 28 pollici. Imperocchè, avendo egli fatta una lunghissima serie d' esatte sperienze per determinare i diversi gradi di caldo, che si richieggono per far bollire l' acqua compressa da diversi pesi dell' atmosfera, ha raccolto alfine anche in questo argomento il frutto ben dovuto a tante sue fatiche; ed è giunto a stabilire la seguente regola generale. Per esprimere in gradi del suo termometro il calore dell' acqua bollente per una pression qualunque dell' atmosfera, si esprima in sedicesime di linea l' altezza del barometro, che corrisponde alla detta pressione, e se ne prenda il logaritmo: si moltiplichi questo per $\frac{99}{200000}$ o sia per 0,000495, e si sottragga dal prodotto il numero 10387: il residuo ci farà conoscere il calore dell' acqua bollente espresso in parti centesime dei gradi del suo termometro *(a)*. Volendo noi dunque al caso nostro applicar questa regola, faremo il calcolo per un' altezza del barometro di 28 pollici; e troveremo che sotto questa pression dell' aria l' acqua non può bollire, se il suo calore non giunge a gradi 80,79 del termometro del sig. de Luc. Ma ne' suoi sperimenti la dilatazion del mercurio per un calore di gradi 80 fu di un mezzo pollice: la dilatazion medesima per un calore di 80,79 dei medesimi gradi sarà dunque di pollici

---

(a) *Recherches sur les modifications de l' atmosphère. N. 962.*

$\frac{0,5 \times 80,79}{80} = 0,5049375$; e questa per una colonna di 27 pollici. Di che segue, la dilatazione per un pollice solo dover essere la ventisettesima parte della medesima, cioè pollici 0,0187014. Or questa dilatazione corrispondente a gradi 80, 79 del termometro del de Luc deve distribuirsi in soli 80 gradi dei nostri; ond'è che per questi ad ogni grado di calore corrisponde in ogni pollice di mercurio una dilatazione

$= \frac{0,0187014}{80} = 0,0002337$; la qual viene ad essere, come deve, alquanto maggiore di quella che sopra abbiam trovata pel termometro del sig. de Luc; ma la differenza loro non eccede 22 diecimilionesime di pollice, e potrebbe quindi negligentarsi senz' alcun sensibile errore.

10. Secondo gli sperimenti del cavalier Shuckburg riferiti nella 2ª. parte del vol. 67 delle transazioni filosofiche di Londra, pag. 566—67, la dilatazione d'una colonna di 30 pollici inglesi di mercurio nel passare dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente, fu di pollici 0,5472, e per ogni grado del termometro di Farheneit $= \frac{0,5472}{180} = 0,00304$. Divisa questa per 30, si troverà dunque la dilatazion d'ogni pollice corrispondente ad un grado del suddetto termometro $= 0,0001013$. Si moltiplichi questa per la frazion $\frac{9}{4}$, e si avrà la dilatazion d' ogni pollice di mercurio per un grado del termometro di Reaumur

$= 0,0002279$ ben poco diversa da quella del sig. de Luc adattata ai nostri termometri, della qual è minore di sole 58 diecimilionesime d' un pollice. E si noti che nei termometri inglesi si suol segnare il grado dell' acqua bollente sotto una pression dell' aria equivalente all' altezza barometrica di 30 pollici inglesi che corrispondono a 28, 149189 francesi, altezza che non eccede quella di 28 pollici di $\frac{15}{100}$ d' un pollice.

11. Il general Roy *(a)* dopo d' aver diligentemente purgato d' aria un barometro coll' ebollizion del mercurio, il fece passare dalla temperatura di 32 gradi di Farheneit a quella di zero; e trovò che una colonna di mercurio di 30 pollici si condensò, passando 1°. dai 32 ai 22 gradi di pollici 0, 0338; 2°. di 0, 0681 dai 32 ai 12; 3°. di 0, 1029 quando giunse a 2 gradi; 4°. finalmente di 0, 1099 pervenuta a zero di Farheneit.

Fattala indi passare dai 32 ai 212 gradi, o sia dalla temperatura del ghiaccio a quella dell' acqua bollente, osservò le seguenti dilatazioni, che io non porterò oltre il grado 92 corrispondente a 26 e $\frac{2}{3}$ di Reaumur, poichè mai non accade nei nostri climi di far osservazioni barometriche ad un maggior grado di caldo.

Gradi	*Dilatazioni*
32	0, 0000
42	0, 0333
52	0, 0661
62	0, 0984
72	0, 1302
82	0, 1615
92	0, 1922

(a) Vedi il citato volume delle transazioni filosofiche, pag. 665 *e seguenti.*

Con questi dati è agevolissimo il calcolare le condensazioni e le dilatazioni di ciaschedun pollice di mercurio, ed il ridurle dalla scala di Farheneit a quella di Reaumur più generalmente adottata dagl' italiani; ed ecco in qual modo.

Se una colonna di 30 pollici di mercurio si condensa di pollici 0,0338 dai 32 ai 22 gradi, egli è chiaro che ai gradi 22 i 30 pollici son ridotti a 29,9662. Or poichè la condensazion d' ogni pollice è proporzionale a quella dell' intera colonna, un pollice di mercurio ai 22 gradi di Farheneit sarà ridotto a

$$\frac{29,9662}{30} = 0,998873,$$ e la sua condensazione sarà per conseguenza di 0,001127. Si osservi che a 22 gradi di Farheneit corrispondon -4 e $\frac{4}{9}$ di Reaumur: e poichè 4 e $\frac{4}{9}$ è a 5 come 8 a 9, sarà la condensazione pel grado $-5 = 0,001127 \times \frac{9}{8} = 0,001268$.

Essendo medesimamente la condensazione dai 32 ai 12 gradi 0,0681, la colonna di 30 pollici si trova ridotta pel duodecimo grado a 29,9329, e quella d' un pollice solo a 0,99773; onde la condensazione per questo grado è di pollici 0,00227. Dunque pel grado -10 di Reaumur ella sarà $= 0,00227 \times \frac{9}{8} = 0,002554$.

Al grado 0 di Farheneit i 30 pollici non son più che 29,8901; ed ogni pollice si riduce a 0,996336. La condensazione d' un pollice è dunque $= 0,003664$. Ma a zero di Farheneit corrisponde $-14\ \frac{2}{9}$ di Reaumur; e quindi per aver la condensazione corrispondente a -15, convien fare la proporzione $14\ \frac{2}{9} : 15$, o sia $128 : 135 = 0,003664 : 0,003,864$. Ecco dun-

que la serie delle condensazioni d' un pollice di mercurio da o a — 15 di Reaumur calcolata di 5 in 5 gradi

Gradi	*Condensazioni*
0	0 , 000000
— 5	0 , 007268
— 10	0 , 002554
— 15	0 , 003864

Applicando lo stesso metodo alle dilatazioni, trovo che pel grado 42 di Farheneit la colonna di 30 pollici divien di 30 , 0333, ed ogni pollice si cangia in 1,00111 , il che vuol dire che pel grado anzidetto la dilatazion d' un pollice è 0,00111. Dunque pel grado + 5 di Reaumur sarà $0,00111 \times \frac{9}{8} = 0,001249$. Si continui il calcolo nello stesso modo; e si avran le dilatazioni d' ogni pollice quali si veggono espresse nella seguente tavoletta.

Gradi	*Dilatazioni*
0	0 , 000000
5	0 , 001249
10	0 , 002478
15	0 , 003690
20	0 , 004882
25	0 , 006056
30	0 , 007208

Trovate così di 5 in 5 gradi le condensazioni e

dilatazioni d' ogni pollice di mercurio espresse in parti milionesime di pollice, si avranno con una facile interpolazione anche quelle di grado in grado dal — 15 al + 30, come si può veder nella tavola posta in fine di questa memoria.

12. Considerando questa tavola l' ispezion sola della colonna delle differenze, ci fa immediatamente conoscere che queste non sono equabili nel mercurio del barometro, come nei gradi del termometro, e quindi che le condensazioni e dilatazioni apparenti del mercurio nel barometro non sono uniformi, come il de Luc e lo Shuckburg le han supposte. E questa è la ragione per cui dovendosi, come fra poco dichiarerò, applicare alle altezze del mercurio nei due barometri osservati a due stazioni diverse una correzione allorchè non hanno esattamente amendue il calor medesimo, io ne' miei calcoli mi servo delle dilatazioni e condensazioni ineguali di questa tavola, anzichè delle eguali degli altri due Fisici: e ciò perchè l' ineguaglianza suddetta mi è sembrata risultare da una maggior diligenza usata dal General Roy ne' suoi sperimenti; e più ancora perchè una sì fatta ineguaglianza mi sembra una conseguenza necessaria della imperfezion del vuoto nella parte superior del barometro, nella quale o un residuo anche menomo d' aria, o la vaporizzazione stessa del mercurio scoperta già dal celebre Daniel Bernoulli, e poi dallo Smeaton e da altri Fisici confermata, dee produrre una resistenza sempre crescente col crescer del calore. E chi non vede che questa crescente resistenza non lascerà salire il mercurio nel barometro a tutta quell' altezza alla qual dovrebbe ascen-

dere pel suo peso specifico corrispondente ai varj gradi di temperatura? Or la correzione è da farsi, come vedremo, non al peso specifico e alla densità del mercurio, ma all' altezza apparente del medesimo osservata nel barometro alle due stazioni, quando in esse la temperatura del mercurio è diversa.

Non è però da credere che quest' ineguaglianza nelle apparenti e successive dilatazioni del mercurio nei barometri esposti ad un calor crescente, sia tanto grande che non possa senza grave errore negligentarsi nel calcolo delle altezze dei luoghi; poichè l' errore sarebbe anzi tanto minuto, che a pochissimo monterebbe il volerne pur tener conto. E per chiarirsene facilmente, basta il riflettere che nelle osservazioni barometriche non accaderà quasi mai, qnando si fanno a stazioni d' altezza ineguale, che la temperatura del mercurio nel barometro o salga oltre il grado + 25 o discenda più del − 10 nella scala di Reaumur. Or la dilatazione del grado + 25 è nella tavola 0,006056, e la condensazione pel grado − 10 è 0,002554; la cui somma 8610 divisa per 35 numero dei gradi compresi tra + 25 e − 10, dà 0,000246. Questa sarebbe dunque la dilatazion del mercurio corrispondente ad un sol grado, supposto che fosse uniforme. Per dimostrar ora quanto piccola diversità nascerebbe nel calcolo delle altezze dei luoghi dall' uso o di questa dilatazione uniforme o della inegual della tavola, ne farò l' applicazione ad un esempio in cui dovrebb' essere delle più grandi. Supponiam che il calore così dell' aria come del mercurio sia alla stazione inferiore di gradi + 6, ed alla superior di − 6, differenza di temperatura as-

sai grande e che rare volte ha luogo in siffatte osservazioni. Sia di più il mercurio nel barometro inferiore ad una delle maggiori altezze, qual è quella di 29 pollici o linee 348, nel qual caso anche la correzion pel calore, che dev' esser proporzionale a quest' altezza, sarà pure una delle maggiori. Sia finalmente l' altezza del barometro superiore di linee 248. Poichè la colonna d' aria, di cui si vuol misurare l' altezza, ha ne' suoi due estremi le temperature + 6 e — 6, possiam considerarla come se fosse in tutta la lunghezza d' una temperatura uniforme, cioè del grado zero, ch' è appunto la media frà le due date. Questa supposizione, a dir vero, è alquanto arbitraria; ma si vedrà in appresso che se ne può far uso nel calcolo delle altezze senz' alcuno error considerabile. La formola del numero 5 relativa alla temperatura del ghiaccio potrà dunque applicarsi a quest' esempio, purchè si faccia all' altezza dei barometri la debita correzione. Questa dimostrerò fra poco che si fa, moltiplicando l' altezza apparente del barometro inferiore per la differenza delle due dilatazioni del mercurio corrispondenti ai diversi gradi della lor temperatura, o per la somma, se le temperature son di grado contrario, e sottraendone poi il prodotto dalla medesima altezza apparente. Quì dunque, secondo la tavola, abbiam la dilatazione del grado + 6 = 0,001497, e la condensazione o sia la dilatazione di grado contrario — 6 = 0,001523; la somma delle quali è 0,00302. Per questa frazione si moltiplichi l' altezza 348 del barometro inferiore, e se ne avrà il prodotto 1,05096, il qual sottratto da 348 lascia il residuo 346,95 altezza corretta del barometro inferiore. Sostituiti questi valori nella

formola del numero 5, e presi i logaritmi, avremo

$$L\,a = 2\,.\,5402669$$
$$L\,y = 2\,.\,3944517$$

$$Diff. = 0\,.\,1458152$$

Si prendano i logaritmi di questa differenza e del coefficiente costante, e si avrà

$$L\,.\,Diff. = 9\,.\,1638028$$
$$L\,.\,Coeff. = 3\,.\,9657049$$

$$L\,x = 2\,.\,1295077$$
$$x = 1347\,,44 \text{ tese.}$$

La distanza verticale dei due strati orizzontali dell' aria, in cui si fan le osservazioni, è dunque di tese 1347,44.

Supponiam ora la dilatazione uniforme e di 0,000246 per grado; e quindi di 0,002952 per 12 gradi. Fatta come sopra, la correzione del barometro inferiore, questa si troverà ridotta a linee 346,97; e continuato il calcolo si giugnerà al risultato $x = 1347,66$ maggior dell' altro di $\frac{20}{100}$, cioè meno d' un quarto di tesa sopra un' altezza di quasi 1350.

Noi abbiam dunque tre dilatazioni uniformi per ogni grado di Reaumur ben poco diverse fra loro; e sono per lo sperimento del de Luc, 0,0002337; per quei dello Shuckburg, 0,0002270; e per quei finalmente del Roy, 0,000246, la media delle quali viene ad essere 0,0002359 ovvero 0,000236.

Sezione 3.

Riduzione da farsi alle altezze del mercurio nei barometri quand' hanno una diversa temperatura.

13. Trovata così e stabilita la precisa quantità con cui a' diversi gradi del termometro attaccato al barometro corrispondon le dilatazioni e le condensazioni del mercurio e quindi le sue varie altezze nel barometro stesso, non sarà cosa difficile il determinar eziandío quale correzion debba farsi alle altezze barometriche, allorchè il mercurio sostenuto nei tubi alle due stazioni non avrà esattamente la temperatura medesima. Riprendiamo a questo fine la formola del num°. 5, cioè

$x = 9240,7 \, L \frac{a}{y}$, alla quale siam pervenuti, supponendo che la temperatura così dell' aria che preme, come del mercurio che le fa equilibrio, non sia diversa da quella del ghiaccio che si scioglie. Non potrem noi dunque applicar questa formola anche ai casi in cui il mercurio sostenuto nei barometri abbia una temperatura diversa? Sì potremo, se per mezzo delle note dilatazioni e condensazioni del mercurio corrispondenti a' varii gradi di temperatura, ridurrem prima le varie altezze del mercurio a quelle che avrebbe, se la sua temperatura fosse quella del ghiaccio: ed ecco come questo si potrà fare. Sia A l' altezza del barometro inferiore, a quella del superiore; e T', t' esprimano i gradi del termometro di Reaumur attaccato a ciaschedun

dei barometri, il mercurio del qual termometro trovandosi nelle circostanze medesime che il mercurio contenuto nei barometri, serve per conseguente ad indicarne la temperatura. A questi gradi corrispondano le dilatazioni $\frac{M}{n}$, $\frac{m}{n}$, le quali saran positive o negative, secondo che i gradi del termometro saran sopra o sotto allo zero. Le altezze A, a non son dunque che apparenti, e dovran ridursi alle altezze, che avrebbero alla temperatura costante del ghiaccio, e che chiameremo le altezze vere. Sian queste A', a'; ed è chiaro che le altezze apparenti A, a non son altro che le altezze vere A', a' accresciute o diminuite della quantità corrispondente alla lor dilatazione o positiva o negativa. Or essendo queste dilatazioni espresse dalle frazioni $\frac{M}{n}$, $\frac{m}{n}$, sarà per conseguenza $A = A' + \frac{M\,A'}{n}$, ed $a = a' + \frac{m\,a'}{n}$. Per mezzo di quest' equazioni si trova facilmente essere $A' = \frac{n\,A}{n+M}$, ed $a' = \frac{n\,a}{n+m}$; e quindi $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(\frac{n+m}{n+M}\right)$. Si riduca in serie la frazione $\frac{n+m}{n+M}$; e si avrà

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 + \left(\frac{m-M}{n}\right) + M\left(\frac{M-m}{n^2}\right) + M^2\left(\frac{m-M}{n^3}\right) \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M-m}{n}\right) + M\left(\frac{M-m}{n^2}\right) - M^2\left(\frac{M-m}{n^3}\right) \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{A}{a}\left(1 - (M-m)\left(\frac{1}{n} - \frac{M}{n^2} + \frac{M^2}{n^3} - \frac{M^3}{n^4} \;\ldots\ldots\; \text{ec.}\right)\right)$$

Essendo adunque nel caso nostro $n = 1000000$, laddove M anche pel grado 25 non giunge, come si vede nella tavola, che a 6056, il termine $\frac{M^2}{n^3}$ con tutti i seguenti potrà sicuramente negligentarsi. Resterà dunque

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - (M-m)\left(\frac{1}{n} - \frac{M}{n^2}\right)\right) = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M-m}{n}\right)\left(\frac{n-M}{n}\right)\right)$$

ove il moltiplicatore $\frac{n-M}{n}$ sarà, come vedrem tosto, quasi sempre così vicino all' unità, che sarebbe inutile il farne conto. Dalla semplice ispezione di questa formola appare manifestamente non dover farsi riduzion nessuna alle altezze barometriche, quando eguale è la temperatura del mercurio nei due barometri: poichè in questo caso essendo $M = m$, il moltiplicatore $M - m$ diventa zero, e si ha $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0) = \frac{A}{a}$; il che vuol dire che per una temperatura eguale nei due barometri, qualunque ella siasi, non si cangia in alcun modo il rapporto delle altezze loro. La cosa è tanto chiara, che, sebbene il sig. de Luc abbia creduto e positivamente detto il contrario, non è da temere che l' autorità di quel dotto Fisico possa trar seco alcun altro in errore. Egli non ha avvertito che, quand' è $T' = t'$, è anche $\pm M = \pm m$; e quindi $A' = A\left(\frac{n \pm M}{n}\right)$, ed $a' = a\left(\frac{n \pm M}{n}\right)$; ed $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}$; dalla qual inavvertenza è

nato il suo sbaglio. E l'esempio stesso da lui recato par che avrebbe dovuto disingannarlo. In questo ei suppone $A = 27$ pollici, $a = 13\frac{1}{2}$, e $T' = t' = -3\frac{1}{3}$. Ciò posto, è $M = m = 0,000843$. Dunque $A' = 27(1 + 0,000843)$,

ed $a' = 13\frac{1}{2}(1 + 0,000843)$. Dunque $\frac{A'}{a'} = \frac{27}{13\frac{1}{2}} = \frac{A}{a}$;

porzionali alle apparenti. cioè le altezze vere son pro

Ecco alcuni esempj che basteranno a chiarir l'uso

della formola $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M-m}{n}\right)\left(\frac{n-M}{n}\right)\right)$ per la correzione delle altezze barometriche, quando la temperatura del mercurio è diversa alle due stazioni.

Esempio I.

Sia $T' = +7$, e $t' = -5$. Si cerchin nella tavola i decimali delle due dilatazioni corrispondenti, e si troverà $M = 1744$, ed $m = -1267$. Dunque

$\left(\frac{M-m}{n}\right) = 0,003011$, ed $\frac{n-M}{n} = 0,998256$; ed infine

$$\left(\frac{M-m}{n}\right)\left(\frac{n-M}{n}\right) = 0,003011 \times 0,998256 = 0,003005748816.$$

Di che ben si vede che negligentando il moltiplicatore $\frac{n-M}{n}$, la formola è $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,003011)$, e tenendone conto, $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,003005748816)$ minore di 5

milionesime in circa. Se l' altezza del barometro inferiore foss' anche di 29 pollici, la differenza delle due correzioni sarebbe dunque di 145 milionesime di pollice, o 174 cento-millesime di linea, quantità di cui sarebbe inutile il tener conto nei calcoli delle altezze dei luoghi. E' vero che nel caso d' una livellazione esattissima, la differenza suddetta nell' altezza del barometro ne porterebbe una di circa un pollice e mezzo nell' altezza relativa delle stazioni, la qual non sarebbe da negligentarsi. Ma si osservi che in questo caso dovendo i barometri esser ad una piccola distanza orizzontale e ad altezze diverse fra loro di pochi piedi, anche la diversità di temperatura nei barometri non potrà esser considerabile. Nondimeno se per qualche caso straordinario questa differenza fosse di 5, o 6 gradi, allora anche il fattore $\frac{n-M}{n}$ dovrebbe farsi entrare nel calcolo.

Esempio II.

Sia $T'=-2$, $t'=+4$, e per conseguenza il barometro superiore assai più caldo dell' inferiore, il che può accadere ben rare volte. In questo caso sarà

$M=-105$, ed $m=+1001$. Dunque $M-m=-1506$,

$n-M=1,000505$; e calcolando con un fattor solo,

$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}(1+0,001506)$; coi due fattori,

$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}(1+0,00150676053)$, la cui differenza non giun-

ge ad 8 diecimilionesime dell' altezza del barometro inferiore.

Esempio III.

Sia $T' = +18$; $t' = +9$, e sarà $M = 4407$, $m = 2235$, $M - m = 2172$, ed $n - M = 0,995593$. Se calcoleremo con un fattor solo, avrem dunque $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,002172)$; ma con amendue $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,002162427996)$. La differenza delle due correzioni anche in questo caso non giunge ad una centomillesima dell' altezza A. Rarissimi saran dunque i casi nei quali, anche volendo portar nel calcolo un' estrema esattezza, l' uso d' ambo i fattori sia necessario; e la formola di correzione sarà quasi sempre $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M - m}{n}\right)\right)$.

14. Che se amerem meglio servirci della dilatazione uniforme, prendendone la media 0,000236, avremo in tal caso $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \frac{236\,(T' - t')}{1000000}\right)$: e quindi

$$L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + L\left(1000000 - 236\,(T' - t')\right) - L\,1000000,$$

Sia $T' - t' = 1$, e sarà $1000000 - 236(T' - t') = 999764$, il cui logaritmo è 5.9998975; e sottraendone il logaritmo d' un milione, resterà $L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + 9.9998975$.

Sia $T' - t' = 6$, e quindi $236\,(T' - t') = 1416$, e $1000000 - 1416 = 998584$. Il logaritmo di questo numero è 5.9993846, dal quale detratto 6, resterà

$$L\,\frac{A'}{a'} = L\,\frac{A}{a} + 9.9993846.$$

Sia $T' - t' = -4$, e $-236\,(T' - t') = +944$. Sarà in questo caso $L\,(1000000 + 944) = 6.0004098$, e

$$L\,\frac{A'}{a'} = L\,\frac{A}{a} + 0.0004098.$$

Diamo successivamente a $T' - t'$ i valori $-6, -5, -4$ ec. fino a $+12$; e fatta in alcune delle ultime cifre la correzione d' un' unità, affinchè le differenze procedano regolarmente, ne avremo la tavola seguente che esprimerà i valori di $L\,[1000000 - 236\,(T' - t')] - 6$, e potrà per conseguenza applicarsi a tutt' i casi particolari, ne' quali è ben difficile che $T' - t'$ oltrepassi i limiti -6 e $+12$

$T' - t'$	$L\left(1000000 - 236\,(T' - t')\right) - 6$	
-6	0. 0006145	
		1023
-5	0. 0005122	
		1024
-4	0. 0004098	
		1024
-3	0. 0003074	
		1024
-2	0. 0002050	
		1025
-1	0. 0001025	

		1025
0	0. 0000000	
		1025
1	9. 9998975	
		1025
2	9. 9997950	
		1025
3	9. 9996925	
		1026
4	9. 9995899	
		1026
5	9. 9994873	
		1026
6	9. 9993847	
		1027
7	9. 9992820	
		1027
8	9. 9991793	
		1027
9	9. 9990766	
		1027
10	9. 9989739	
		1028
11	9. 9988711	
		1028
12	9. 9987683	

Per avere un esempio dell' uso di questa tavola, riprendiam quello del num. 12, nel quale è

$T' - t' = 12$, $A = 348$ linee, ed $y = 248$. Sarà dunque $L\,(1000000 - 236 \times 12))- 6 =$

$$9 \,.\, 9987683$$

$$L\frac{A}{y} = 0 \,.\, 1471275$$

$$\text{Somma} = 0 \,.\, 1458958$$

$$L\ \text{som.} = 9 \,.\, 1640428$$

$$L\ \text{coef.} = 3 \,.\, 9657049$$

$$L\,x = 3 \,.\, 1297477$$

$$x = 1348\ ,\ 2$$

Questo risultato è dunque maggiore d'una mezza tesa o di $\frac{3}{4}$ dei due già trovati al num. 12, differenze ben piccole per un' altezza sì grande.

Si osservin le differenze della tavola superiore, e si vedrà tosto quant' esse s' avvicinino alla differenza costante 1025. Chi non avesse alle mani la tavola, potrebbe dunque senz'alcun grave errore servirsi di questa differenza per calcolare il valore di

$L\left(\frac{1000000 - 236\ (T' - t')}{1000000}\right)$, il qual verrà ad essere

$10 - \frac{1025\ (T' - t')}{1000000}$ sostituendo 10 a zero per evitar le caratteristiche negative. Eccone alcuni esempj.

Sia $T' - t' = +3$. Si moltiplichi 1025 per 3, e si avrà $\frac{1025\ (T' - t')}{1000000} = 0{,}0003075$ che sottratto da 10 darà 9.9996925, come nella tavola.

Sia $T'-t'=+8$. Sarà dunque $1025\times8=8200$, e

$\frac{1025\,(T'-t')}{1000000}=0,0008200$, che sottratto da 10 lascerà

9.9991800 maggiore di 7 dieci-milionesime di quel della tavola.

Sia $T'-t'=-4$; e sarà $-1025\times-4=+4100$, e

$-\frac{1025\,(T'-t')}{1000000}=0,0004100$ maggiore di due sole dieci-milionesime del numero della tavola. E quì giova osservare che quando $T'-t'$ è negativo, ma positivo per conseguenza $-1025\,(T'-t')$ non si ha alcun bisogno di cangiare in 10 la caratteristica o come si fa nel caso contrario per evitar le caratteristiche negative.

Sezione 4.

Effetti del calore nella densità e peso specifico dell' aria.

15. Già abbiam detto essere state da alcuni dottissimi Fisici determinate le leggi, giusta le quali anche l' aria si dilata o si condensa al variar della sua temperatura. Uno de' primi osservatori di queste dilatazioni e condensazioni dell' aria è stato l' inglese Hawksbee. Egli osservò che l' aria dal volume di parti 131 crebbe a quello di parti 144, passando il calore indicato dal suo termometro dal punto della congelazione a quello di gradi 130; e che discendendo questo al grado cinquantesimo sotto il punto del gelo, il volume dell' aria si restrinse a 126 parti. Non avendo però que-

sto Fisico indicato altro punto fisso del suo termometro fuor di quello della congelazione, ne rimane incerta la graduazione. Ma il sig. Demarest suo traduttore ed illustratore ha creduto poter con buone ragioni affermare, che il grado 130 del Fisico inglese, ch' ei crede esser quello del massimo caldo di Londra, corrisponde all' ottantesimo di Farheneit o 21 $\frac{1}{3}$ di Reaumur. Ammesso quest' altro punto fisso, la dilatazione dell' aria per gradi 21 $\frac{1}{3}$ sopra il ghiaccio sarebbe dunque di parti 144 — 131 = 13; e quindi la dilatazione per ogni grado di Reaumur supposta equabile, di 0,60937. Ciò posto, il grado di Reaumur corrispondente a parti 131 — 126 = 5 sarà $\frac{5}{0}$,60937 = 8,2 sotto al ghiaccio. Chiamiamo 1 il volume dell' aria per la temperatura del ghiaccio; e ne avrem quello del grado 21 $\frac{1}{3}$, facendo la proporzione 131 a 144 come 1 al quarto; il qual sarà 1,09923. Questa è dunque la dilatazione per gradi 21 $\frac{1}{3}$; e questa divisa pel detto numero di gradi dà 0,004651 per grado = $\frac{1}{215}$ del volume primitivo 1. preso alla temperatura del ghiaccio. Il Muskembroek dice che i volumi dell' aria alle due temperature del ghiaccio e del massimo caldo di Londra, pel quale sembra intender egli pure il grado 130 del termometro di Hawksbee, sono per le osservazioni di questo Fisico nel rapporto di 6 a 7; ed aggiunge averli trovati anch' egli nello stesso rapporto in Olanda. Ma questo non è vero che ad un presso a poco ben largo; poichè il rapporto del Fisico inglese non è di 6 a 7, ma di 6 a 6,59.

16. Il sig. de Luc non ha fatta, a dir vero, alcuna esperienza diretta in questo proposito; ma la dilatazion

dell' aria per ogni grado di Reaumur si deduce agevolmente dalla sua formola per la misura delle altezze dei luoghi. Egli in fatti dalle sue numerosissime osservazioni fatte a 15 diverse stazioni sul monte Saleve vicin di Ginevra a temperature assai differenti, ha conchiuso che quando la media fra le temperature di due stazioni è di gradi 16,75 di Reaumur, si trova la distanza delle due stazioni moltiplicando per 10000 la differenza de' logaritmi delle due altezze corrette del mercurio nei barometri, vale a dire che chiamate queste A, a, è $x = 10000\, L \frac{A}{a}$. Ma per le temperature maggiori di 16,75, egli ha osservato che questa formola dà le altezze troppo piccole e che bisogna accrescerle di $\frac{1}{215}$ per ogni grado di più dei 16,75, e della stessa quantità diminuirle quando la temperatura media è minore. Dalle sue osservazioni risulta dunque che chiamando 1 il volume dell' aria per la temperatura 16,75, questo cresce o cala di $\frac{1}{215}$ per ogni grado sopra o sotto la temperatura medesima. Dunque per la temperatura del ghiaccio il volume primitivo 1 si ridurrà ad $1 - 16,75 \times \frac{1}{215} = 1 - 0,779 = 0,9221$. Dunque considerando come primitiva la temperatura del ghiaccio, e chiamando per questa 1 il volume dell' aria, si troverà il volume pel grado 16,75, facendo la proporzione $0,9221 : 1 = 1 : 1,08448$. Dunque a 16,75 gradi corrisponde la dilatazione 0,08448; e questa divisa per 16,75 dà una dilatazione di 0,0050435 per ogni grado nella supposizione, che sia uniforme; quantità ben vicina a 50 diecimillesime e mezzo per grado. Ma si noti bene che questa dilatazione si riferisce al volume

primitivo 1 della temperatura del ghiaccio, laddove quella di $\frac{1}{215}$ =0,004651 suppone il volume primitivo alla temperatura 16,75. La conformità fra questa dilatazione e quella dell' Hawksbee è dunque illusoria, poichè si rapporta a due temperature assai diverse.

Il sig. de Luc nelle transazioni filosofiche di Londra, vol. 69, pag. 499 e seg. dice, che supposto = 1000 il volume dell'aria, quando il termometro di Farheneit è a 32 gradi, se il calor cresce di gradi 22,8, il volume, secondo l'abate de la Caille, il professor Mayer, il sig. Bonne, il cav. Shuckburg, ed il dottor Bradley, sarà 1040; 1046; 1047,7; 1050,5; 1054,4. Poi soggiunge che prendendo una media tra le dilatazioni che dalle sue numerose osservazioni risultano per lo stesso grado di caldo, si trova 1047 ben vicina alla media delle cinque poste qui sopra. Ma anche questa supposta conformità è illusoria, perchè la media delle sue osservazioni è relativa al grado 16,75 di Reaumur, non al 32 di Farheneit. Per questa temperatura ho dimostrato pur ora, che dalle osservazioni del de Luc risulta per ogni grado di Reaumur la dilatazione 0,0050435, la qual moltiplicata per 10,18 gradi di Reaumur corrispondenti a 22,8 di Farheneit, dà la dilatazione 0,05134283. Quindi se il volume dell'aria è 1000 per lo zero di Reaumur, e' sarà un po' maggiore di 1051 per gradi 10,18, e non 1047.

17. Il sig. Hennert in una dissertazione che ottenne il premio dell' accademia di Gottinga ed ha per titolo = *Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri* = *Trajecti ad Rhenum* 1786, dice avere il Crucchio trovato co' suoi sperimenti fin dall'anno 1726,

che il volume dell' aria nel passar dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente, si dilatò nel rapporto di 1070 a 1510. Ora 1070 è a 1510 come 1 ad 1,411215. Dunque la dilatazione fu di 0,411215 del volume primitivo dell'aria per l'intervallo di 180 gradi: e quindi per ogni grado fu =0,002284, o sia 0,005139 per ogni grado di Reaumur, la quale non supera quella del de Luc, che di 47 dieci-milionesime. Il sig. Hennert veramente alla pagina 9 della sua dissertazione fa ascender la dilatazione del Crucchio a 0,002444 per ogni grado di Farheneit, e non a 0,002284, come risulta dal mio calcolo. Ma si avverta ch' egli non suppone al grado 32 il principio delle dilatazioni, poichè a questo grado ei considera l' aria come già dilatata di $\frac{7}{100}$ del volume primitivo. Sembra quindi aver lui immaginato che negli sperimenti del Crucchio il volume primitivo fosse al grado *o* di Farheneit. Ma in questa supposizione le dilatazioni non sarebbero equabili; poichè sendo di $\frac{7}{100}$ la dilatazione per 32 gradi, quella di ogni grado fra *o* e 32 sarebbe non di 0,002444, ma di 0,002187. Supponendo che anche sotto il grado 32 le condensazioni siano di 0,002444 al grado, il volume primitivo 1 sarebbe al grado 32−28,6=3,4. Ciò posto, si dovrebbe dire che quando il Crucchio cominciò i suoi sperimenti, il volume dell' aria da lui chiamato 1000 fosse alla temperatura di 3,4 di Farheneit, e che alzandosi poi questa a 32 e 212, i volumi fosser divenuti 1070 e 1510. Conchiudiam dunque che la dilatazione di 0,002444 al grado, suppone il volume primitivo non a 32 ma a 3,4 di Farheneit.

18. Il cav. Shuckburg avendo fatto passar l' aria

in quello strumento, che i Fisici chiaman *manometro*, per varii gradi di caldo, ha creduto poter conchiudere che l'aria per ogni grado di Farheneit sopra o sotto il ghiaccio si dilata o si condensa di 0,00243 del suo volume, e per conseguenza di 0,005467 per ogni grado di Reaumur. Il sig. Hennert paragonando questa dilatazione con quella del Crucchio, dice ch' è quasi la stessa, e ne conchiude, questo consenso dei due Fisici averlo indotto a calcolare e pubblicare nel suo opuscolo una tavola delle dilatazioni dell'aria, fondata sulla media espansione di 243 cento-millesime. Ma quì pure egli non s'è accorto che queste dilatazioni quasi eguali in apparenza, si riferiscono a diverse temperature primitive, quella dello Shuckburg a 32 gradi, e quella del Crucchio a 3,4. Noi in fatti nel num. prec. abbiam trovata la dilatazion del Crucchio non di 243, ma di 2284 cento-millesime, ove si riferisca, come quella di Shuckburg, alla temperatura del ghiaccio.

19. Il General Roy avendo fatto passare nello stesso tempo dalla temperatura zero di Farheneit a quella dell' acqua bollente o del grado 212 un termometro ed un manometro, osservò esattamente la corrispondenza delle dilatazioni loro, e trovò che ad eguali allungamenti del mercurio nel tubo del termometro corrispondevan nel manometro allungamenti dell' aria alquanto ineguali. In fatti, diviso in amendue gli strumenti l' intervallo intero dallo zero all' acqua bollente in 212 gradi, intendendo per questo nome 212 spazj solidi d' un' egual capacità, quando giunse il mercurio al grado 12, l' aria non giunse che a gradi 11,4; e salendo poi il mercurio equabilmente di 20 in 20 gra-

di, l' aria s' alzò anch' essa nel primo passo di 20; indi di 21,6; poi di 22,6 ec. come appare dalla tavola seguente.

Dilatazioni del mercurio nel termometro Gradi		*Dilatazioni dell' aria nel manometro* Gradi	
0		0 , 0	
	12		11 , 4
12		11 , 4	
	20		20 , 0
32		31 , 4	
	20		21 , 6
52		53 , 0	
	20		22 , 6
72		75 , 6	
	20		21 , 6
92		97 , 2	
	20		20 , 8
112		118 , 0	
	20		20 , 0
132		138 , 0	
	20		19 , 4
152		157 , 4	
	20		18 , 8
172		176 , 2	
	20		18 , 2
192		194 , 4	
	20		17 , 6
212		212 , 0	

Per aver ora anche le dilatazioni intermedie di 10 in 10 gradi, osservo che se la dilatazione pei primi 12 gradi fosse uniforme, quella dei soli due primi sarebbe di 1,9, e quella degli altri 10 di 9,5. Ma poichè le dilatazioni successive dell' aria fino a quella che cor-

risponde al grado 72 del mercurio, son tutte crescenti, ridurrem quella dei primi due gradi ad 1,8, onde quella degli altri 10 sarà di 9,6. Continuando per simil guisa l'interpolazione, farem la dilatazione dai 12 ai 22 gradi, di 9, 8; dai 22 ai 32, di 10, 2 ec. come nella tavola seguente.

Gradi del termometro.	*Gradi del manometro.*	
0	0	
		1 , 8
2	1 , 8	
		9 , 6
12	11 , 4	
		9 , 8
22	21 , 2	
		10 , 2
32	31 , 4	
		10 , 6
42	42 , 0	
		11 , 0
52	53 , 0	
		11 , 4
62	64 , 4	
		11 , 2
72	75 , 6	
		11 , 0
82	86 , 6	
		10 , 6
92	97 , 2	

Sarebbe inutile il prolungar questa tavola, perchè a temperature più alte non accaderà mai di far le livellazioni barometriche.

Determinata per tal modo la corrispondenza fra le dilatazioni del mercurio nel termometro e dell' aria nel manometro, il General Roy si fece a cercare di quan-

to precisamente il volume dell' aria si dilati nel passare dalla temperatura zero di Farheneit a quella di 212 gradi; e per mezzo d' un gran numero d' esperienze fatte con arie di varia densità rinchiuse nei manometri, gli riuscì finalmente di determinarlo. Noi però, lasciate da parte le dilatazioni delle arie d' una densità assai diversa dalla comune dell' atmosfera, ci ristringeremo a riferire i risultati di nove sperimenti fatti con un' aria compressa da un peso medio dell' atmosfera corrispondente a 30, 02 pollici inglesi che equivalgono a 28 e quasi $\frac{3}{4}$ pollici francesi di mercurio nel barometro. Ove è da osservarsi che dagli altri esperimenti risulta non variar le leggi della dilatazion dell' aria al variar di sua densità, se le differenze di questa non son molto grandi e maggiori d' assai di quelle che posson aver luogo dalle più basse alle più alte regioni dell' aria, nelle quali si fanno le barometriche osservazioni. Dai nove sperimenti del General Roy si raccoglie adunque che la dilatazion media del volume dell' aria rinchiusa nel manometro fù di 48421 cento-millesime parti del suo volume primitivo, nel passar ch' ella fece dalla temperatura zero a quella del grado 212, cosicchè, chiamato 1 il volume al grado zero, questo divien 1,48421 al grado 212.

Or ciò posto, chi non vede con quale e quanta agevolezza si potran determinare le dilatazioni per tutti i gradi intermedii? Cercate voi per esempio qual sia la dilatazione pel grado 12 di Farheneit? Osservate primieramente che al grado 12 del termometro corrisponde nel manometro il grado 11,4, come si vede nella tavola posta quì sopra; e poi dite: se la dilata-

zione per gradi 212 è 0,48421, per gradi 11,4 di quanto sarà? Fatta la proporzione, troverete esser dessa 0,026038. E medesimamente per aver la dilatazione del grado 22, avrete la proporzione 212:0,48421=21,2 al quarto, che sarà 0,048421. E la dilatazione pel grado 32 sarà $\frac{0,48421 \times 31,4}{212} = 0,071718$. Si continui nel modo medesimo il calcolo di 10 in 10 gradi fino al 92, oltre il quale non si va mai nelle livellazioni barometriche; e se ne avrà la tavola seguente

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
0	1, 000000
12	1, 026038
22	1, 048421
32	1, 071718
42	1, 095929
52	1, 121053
62	1, 147090
72	1, 172671
82	1, 197795
92	1, 222006

Per adattar anche questa al termometro di Reaumur, cominceremo dal chiamar 1 il volume dell' aria al grado zero di questo termometro o sia 32 dell' altro; il che vuol dire che al volume 1,071718 si sostituisce

il volume 1. Per aver dunque in questa supposizione anche i volumi degli altri gradi della tavola precedente, convien dire: come 1, 071718 ad 1, così il volume del dato grado a quel che si cerca. Si faccian queti semplicissimi calcoli, e se n' avrà quest' altra tavola.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
0	0, 9331
12	0, 9574
22	0, 9782
32	1, 0000
42	1, 0226
52	1, 0460
62	1, 0703
72	1, 0942
82	1, 1176
92	1, 1402

Finalmente col metodo esposto alla fine del num. 11 si applicherà questa tavola ad una serie di gradi di Reaumur procedente di 5 in 5 gradi, e ne risulterà la seguente.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
— 15	0, 9295
— 10	0, 9521
— 5	0, 9755

0	1 , 0000
5	1 , 0254
10	1 , 0517
15	1 , 0791
20	1 , 1060
25	1 , 1323
30	1 , 1576

Per aver le dilatazioni anche di grado in grado dal − 15 al + 30, basterà fare ai numeri della tavola precedente l' interpolazione opportuna; e con questo mezzo io ho calcolata quella che si trova in fine di questa memoria.

20. Benchè dall' ispezione di questa tavola chiaramente apparisca non essere uniformi le dilatazioni dell' aria, si vede però che le variazioni non son grandi, e che poca alterazione s' introdurrebbe nel calcolo delle livellazioni barometriche, considerandole come uniformi. La dilatazione pel grado + 25 è 0, 1323; e la condensazione pel grado − 10 è 0,0479. La dilatazion totale per quest' intervallo, oltre il quale rarissime volte si stenderanno le differenze dei calori nelle due stazioni, di cui s' ha a determinare la distanza verticale, sarà dunque 0, 1802; e questa distribuita in 35 gradi darà 0,005149 per grado. La differenza media sarebbe dunque alquanto minore di 51 $\frac{1}{2}$ dieci-millesime, e non molto diversa dalla minima che nella tavola corrisponde al grado − 10, e dalla massima che nel detto intervallo si trova al grado + 15. La dilatazione per que-

sto grado è nella tavola 0,0791; e per la dilatazion media anzidetta $15 \times 0{,}005149 = 0{,}077235$, la cui differenza da quella della tavola non giunge a 19 diecimillesime. Questa, a dir vero, sarebbe maggiore pel grado -10, anch' essa però non guari considerabile; poichè sarebbe alquanto minore di 359 cento-millesime. Questa medesima dilatazion media non si scosta molto neppure dalle due del de Luc e del Crucchio; e la media delle tre viene ad essere 0,0051105; cioè ben poco più di 51 diecimillesime. Di questa dunque potrebbe far uso chi non avesse alle mani la tavola calcolata cogli esperimenti del General Roy, la qual però merita per ogni riguardo la preferenza.

Sezione 5.

Della variabilità del calore ad altezze diverse nell' atmosfera.

21. Se il calore nell'atmosfera non variasse dal basso all' alto; ma ogni colonna d' aria avesse in tutta la sua lunghezza la temperatura medesima, che ha alla base, la formola $x = 9240{,}7\, L \frac{A}{y}$ del num. 5 potrebbe facilmente applicarsi a qualunque altra temperatura. Imperocchè se $+T$ sarà il grado del termometro esposto all' aria nella stazion inferiore, la lunghezza della colonna aerea, che per la temperatura del ghiaccio è $= 9240{,}7\, L \frac{A}{y}$, di tanto si dovrà accrescere, di quanto l' aria si dilata nel passare dalla temperatura di ze-

ro a quella di T, la qual dilatazione che si trova coi metodi della sezion precedente, si può esprimere per C. Sarà dunque $x=9240,7\,C\,L\,\frac{A}{y}$; e $Lx=L(LA-Ly)+LC+L\,9240,7$. Eccone alcuni esempj.

Sia $A=336$ lin., $y=335$, e $T=-10$. Ciò posto, sarà $LA=2.5263393$; $Ly=2.5250448$; e $C=0,9525$. Dunque $LA-Ly$, o sia la differenza de' logaritmi $=0.0012945$; e quindi

$$\begin{aligned} L\ Diff. &= 7\ .\ 1111021 \\ L\ C &= 9\ .\ 9787738 \\ L\ Coeff. &= 3\ .\ 9657049 \\ \hline L\ x &= 1\ .\ 0555808 \end{aligned}$$

A questo logaritmo corrisponde il numero $x=11,3653$: il che vuol dire che quando il barometro è a 28 pollici d' altezza vera, cioè ridotta col metodo della sezione 3ª. alla temperatura del ghiaccio, e l' aria posta fra le due stazioni alla temperatura uniforme del grado -10, ad una linea di differenza nell' altezza dei barometri corrispondono 11,3653 tese d' aria o piedi 68,19.

Sia $A=264$ lin., $y=263$, $T=+12$, e $C=1,0627$. Sostituiti questi valori, avremo

$$\begin{aligned} L\ Diff. &= 7\ .\ 2160099 \\ L\ C &= 0\ .\ 0264107 \\ L\ Coeff. &= 3\ .\ 9657049 \\ \hline L\ x &= 1\ .\ 2081255 \end{aligned}$$

; ed $x=16,1482$ tese, o 96,889 piedi.

Amendue questi casi posson verificarsi: il primo ne' luoghi poco superiori al livello del mare in un rigido inverno; l' altro in estate sopra un' alta montagna, come presso l' ospizio dei cappuccini sul s. Gottardo. Da questi esempj si fa manifesto che la differenza d' una linea di mercurio per la temperatura costante del ghiaccio può corrispondere a colonne d' aria d' una lunghezza molto diversa, e che questo e non altro si dee rispondere ai molti che domandano a qual altezza s' abbia a salire, affinchè il mercurio s' abbassi d' una linea nel barometro.

22. Ma anche quest' eguaglianza supposta di temperatura ad altezze sensibilmente diverse nell' atmosfera, non ha luogo in natura. Le numerose osservazioni fatte da varii Fisici all' occasione delle livellazioni barometriche s' accordan anzi tutte a stabilir che il calore va dal basso all' alto scemando nell' atmosfera. Ma se questa diminuzione sia regolare, ed essendolo, con qual legge si faccia, non si può conchiudere dalle osservazioni anzidette. Nè ciò dee recar meraviglia a chi rifletta che, toltone qualche rarissimo caso in cui gli osservatori si son alzati nell' atmosfera col globo areostatico, il calor trovato nelle stazioni superiori non si deve confonder con quello dell' aria libera posta verticalmente alla medesima altezza sopra la stazione inferiore: poichè nei luoghi delle suddette stazioni la temperatura dell' aria conveniente all' altezza è necessariamente alterata dal riverbero e dal diverso calore dei luoghi e dei corpi vicini; il che non accade nell' aria libera ove ne sia sensibilmente distante. Di qui è che quand' anche dalle osservazioni si raccogliesse alcuna leg-

ge della successiva diminuzion del calore sul dorso delle montagne ove si son fatte, non potrebbe questa senza molta incertezza applicarsi alla colonna d' aria che s'alza a perpendicolo sopra la stazione inferiore. A questo s' aggiunga non essersi fatte nè potersi fare dagli uomini sì fatte osservazioni, fuorchè ad altezze assai piccole e nelle quali non può per conseguente aver luogo una gran differenza di temperatura. In fatti le massime altezze in cui siensi fatte osservazioni, son quelle del Canigou nelle Cordilliere del Perù, e del Monte-bianco in Europa; la prima di 2470 tese sopra il livello del mare, per quanto ne dice il sig. de la Condamine; e la seconda di 2435, prendendo la media fra le due misure geometriche del cavalier Shuckburg e del sig. Pictet, e supposta di 188 tese l' altezza del lago di Ginevra sopra il livello del mare. Or la differenza di temperatura fra la spiaggia del mare, e la cima del Monbianco non giunge tutt' al più che a 25 gradi o 26 del termometro di Reaumur, di che abbiamo una prova nelle osservazioni contemporanee fatte dal sig. de Saussure alla cima del monte, e Senebier a Ginevra ai 3 Agosto 1787, delle quali avrò altrove occasion di parlare. Da queste risulta che mentre il termometro era a Ginevra a gradi 22,6, fu alla cima del Mon-bianco a gradi —2,3. La differenza fu dunque di gradi 24,9; onde supposta la temperatura alla riva del mare, d'un grado ed $\frac{1}{10}$ maggiore che a Ginevra, la differenza dei termometri per un' altezza di 2435 tese sarebbe di 26 gradi. Si osservi ora che il calore pel grado 22,6 è secondo la nostra tavola 1,1195, laddove pel grado —2,3 è 0,9886, e che la differenza loro è 0,1309.

Qualunque sia la legge della diminuzion del calore, non potrà dunque in verun punto dell' altezza aversi una differenza di calore, che oltrepassi i 13 centesimi del calor 1, ossia del ghiaccio. Di qui è che prendendo un medio fra i calori delle due stazioni, il quale nel caso nostro è 1,05405, e considerandolo come costante, la sua differenza dal calor corrispondente a qualunque ipotesi di variabilità per qualunque altezza inferiore alla cima del monte, non giungerà mai precisamente ad 1,05405—0,9886, cioè a 0,06545; e sarà quindi minore di 7 centesimi del calor 1. Ma di questo mi riserbo a parlar più distesamente ove tratterò della differenza dei risultati, che le ipotesi del calor variabile, e del calor medio costante producon nel calcolo delle altezze dei luoghi.

23. Passiam ora alla considerazione di alcune ipotesi intorno alla diminuzion del calore dal basso all'alto, e scegliam fra queste le due più semplici, quelle cioè del calor decrescente in ragione *aritmetica*, ed *armonica* delle altezze; e cominciamo dall'aritmetica. Sia C il calore alla stazione inferiore; ed ascendendo alle altezze 1, 2, 3, 4 ec. si riduca esso a $C-m$, $C-2m$, $C-3m$, $C-4m$ ec. Ciò posto, è cosa chiara che ad un'altezza indeterminata x corrisponderà un calore $=C-mx$; la qual formola si riduce come deve, a C, ponendo $x=0$. Se anche il calore della stazion superiore sarà noto, e si chiamerà c, ne risulterà dunque $C-mx=c$, e per conseguenza $m=\frac{C-c}{x}$. Avendo il sig. de Luc in diverse stagioni osservati i gradi del termometro al basso e all'alto delle medesime stazioni, per le quali gli eran

note le altezze x, si può dalle sue osservazioni raccogliere il valor di m, poichè in esse son note le quantità C, c, ed x. Ma per le ragioni di sopra accennate questi valori sono incostantissimi e molto diversi un dall' altro. Io ne prenderò per esempio alcune dell' osservazioni fatte alla stazion quindicesima, la cui altezza maggiore di tutte l'altre è di tese 487, 77; e per averle a tutte le temperature, sceglierò le due prime, le due ultime, e due di mezzo. Nell' osservazion prima fu $T = 10,5$, e $t = 4,5$ esprimendo al solito per T i gradi del termometro inferiore, e per t quei del superiore. Fu dunque $C = 1,0546$; $c = 1,0229$; e $C - c = 0,0317$. Ciò posto, abbiamo

$$m = \frac{0,0317}{487,77}, \text{ e } Lm = L0{,}0317 - L487{,}77 = 5.8128442.$$

In questo caso la caratteristica è propriamente -5, onde segue esser $m = 0,00006499$. Nell' osservazion seconda fu $T = 9$; $t = 8$, $C = 1,0465$, $c = 1,0412$, e $C - c = 0,0053$. Con questi dati si trova $Lm = 5.0360608$, ed $m = 0,00001087$. La sesta osservazione diede $T = 17$, $t = 14\frac{1}{6}$, $C = 1,0900$, $c = 1,0745$, ed $m = 0,00003178$. Finalmente dalla settima, e dall'ultime due che son la decima ed undecima, risultano per m i tre seguenti valori 0,00003834; 0,00007893; 0,00007934. La varietà e l' incostanza di questi valori è ben grande; ma si può nondimeno prenderne un medio, il qual vien ad essere 0,00005071.

In quest' incertezza ho creduto necessario il ricorrere ad osservazioni fatte sulla cima di monti o isolati o superiori almeno a tutti quelli che han d' intorno; perchè il calore quivi osservato non dev' esser soggetto alle già menzionate irregolarità, e quindi accostarsi assai

più a quello dell' aria libera posta verticalmente alla medesim' altezza sopra la stazione inferiore. A questo fine ho scelto tre monti posti nel centro, verso il mezzo, e ad una delle estremità della vicina catena dell' alpi. Il primo è il Mon-bianco; il secondo il Legnone o Lineone situato all' estremità settentrionale del lago di Como; e l' ultimo il monte Generoso posto fra i due laghi di Como, e Lugano sopra la valle Intelvi.

L' altezza del Mon-bianco sopra il lago di Ginevra è, giusta la misura geometrica del cavalier Shuckburg, di tese 2257, ma di sole 2238 secondo quella del sig. Pictet. La media delle due è dunque di tese 2247,5. Nel num. prec. ho parlato d' un' osservazione fatta nello stesso tempo dal sig. de Saussure alla cima di quel monte, e dal sig. Senebier a Ginevra. L' osservatorio di quest' ultimo è di 13 tese superiore al lago; e quindi la distanza verticale dei livelli delle due stazioni si riduce a tese 2234,5. Ora in quest' osservazione fu $T=22,6$; $t=-2,5$. Ma convien avvertire che l' aria della cima del monte essendo al contatto d' un ammasso immenso di nevi e ghiacci perpetui, dev' esser più fredda di quella che sta sopra Ginevra alla medesima altezza. A me non par dunque verosimile che il valor di t fosse minor di -1. Ciò posto, i due calori saranno stati $C=1,1198$; $c=0,9950$; e $C-c=0,1248$; dai quali valori risulta

$$m=\frac{0,1248}{2234,5}=0,00005585.$$

Nella mattina del primo d' agosto 1780 il P. Pini osservò sulla cima del Legnone il termometro a gradi 11 $\frac{1}{8}$; e nella stessa mattina il termometro fu a Brera

in Milano a gradi 23. Per le misure geometriche dell' Abate Oriani la distanza verticale dei livelli di queste due stazioni è di tese 1280,7. Si faccia il calcolo con questi dati, e si troverà $m = 0,00004966$.

Anche l' altezza del monte Generoso è stata, come vedrem poi, misurata geometricamente dallo stesso Abate Oriani, e trovata di tese 769 superiore al lago di Como. Nelle osservazioni barometriche corrispondenti fatte da lui e da me contemporaneamente, abbiamo avuto $T = 19\frac{3}{4}$, $t = 14$, $C = 1,1046$, e $c = 1,0736$. Or da questi dati risulta $m = 0,00004031$. La somma dei tre risultati è dunque 0,00014582. A questa aggiugniam la somma de' sei, tratti dalle osservazioni del de Luc, la qual è 0,00030425, e ne avremo 0,00045005. Dividiam finalmente questo numero per 9, cioè per quello delle osservazioni; e troveremo il valor medio di $m = 0,00005001$, o negligentando una cento-milionesima, 0,00005.

Per quest' ultimo risultato delle osservazioni sembra dunque che la diminuzion del calore sia di cinque cento-millesime per tesa, o di cinque millesime per 100 tese. E poichè, pel num. 20, nella supposizione delle condensazioni e dilatazioni dell' aria uniformi ad ogni diminuzione d' un grado del termometro di Reaumur corrispondon poco più di 5 millesime nella condensazion dell' aria o diminuzion del calore, si può dire che il medio abbassamento d' un termometro di Reaumur alzato verticalmente nell' aria, è presso a poco di un grado per ogni centinajo di tese. Così nell' osservazion del Mon-bianco, cioè in quella della massima altezza cui siasi trasportato il termometro in Europa, per 22,

345 centinaja di tese si ebber nel termometro quasi 25 gradi d' abbassamento; i quali però per l' altezza verticale sopra la stazion di Ginevra posson ridursi a 23,6. Nell' osservazion del Legnone la distanza verticale dei due termometri fu di 12,807 centinaja di tese, e quella de' lor gradi, 11,875. Ma in quella del monte Generoso a 7,69 centinaja di tese non corrisposero che gradi 5,75.

Per sapere a qual altezza dell' atmosfera il calor dell' aria secondo questa legge sia ridotto a metà, basta metter $\frac{C}{2}$ in luogo di c nell' equazione $C - 0,00005\, x = c$; e si avrà $x = \frac{C}{2 \times 0,00005} = 10000\, C$. Si osservi che C è espresso nella tavola dei volumi dell' aria in diecimillesime, e si vedrà tosto, che l' altezza cercata è quella del valor di C preso in numeri intieri. Per la temperatura del ghiaccio alla superficie terrestre, il calor dell' aria sarebbe dunque ridotto a metà all' altezza di 10000 tese: per la temperatura di gradi 25 l' altezza sarebbe di tese 11318, e di 9123 pel grado — 10.

24. Ma se la diminuzion del calore segue la ragione armonica delle altezze crescenti, chiamato C, come dianzi, il calore alla stazion inferiore, questo coll' ascender successivamente alle altezze 1,2,3,4, ec. si ridurrà a $\frac{C}{1+m}$, $\frac{C}{1+2m}$, $\frac{C}{1+3m}$ ec. ond' è che ad un' altezza indeterminata x corrisponderà il calore $\frac{C}{1+mx}$;

la qual formola deve ridursi e si riduce di fatti a C quando è $x=o$; il che non sarebbe, se il denominatore non avesse per primo termine l'unità. Esprimendo dunque per c il calore d' un' altezza indeterminata x, la formola pel calor decrescente in progressione armonica sarà $c=\frac{C}{1+mx}$ già data dal sig. Eulero nelle memorie di Berlino per l'anno 1754. Per determinare il valor di m avrem quindi l' equazione $m=\frac{C-c}{cx}$.

Si applichin a questa le sei osservazioni del sig. de Luc, e si troveranno i sei valori seguenti di m

o , 000063535

o , 000010436

o , 000029574

o , 000035377

o , 000072580

o , 000072314

E similmente per le tre osservazioni dei monti Bianco, Legnone, e Generoso avremo per m questi altri valori.

o , 000051634

o , 000046938

o , 000037532

La somma dei 9 valori è dunque 0,00041992, ed il va-

lor medio 0,00004666. Se nell' equazione $c = \frac{C}{1 + m x}$ faremo $c = \frac{C}{2}$, troveremo $x = \frac{1}{m} = \frac{100000000}{4666} = 21432$; vale a dire che l'altezza alla quale il calore si riduce alla metà in quest' ipotesi, è di tese 21432 per qualsivoglia calore della stazion inferiore. Il sig. Abate Oriani servendosi d' altre osservazioni, ha trovato il valor medio di $m = 0,000036$; e ne ha conchiuso che l' altezza a cui c è $= \frac{C}{2}$, è di tese 27778 maggior della precedente quasi di un terzo. Vedi il suo eccellente opuscolo sulle rifrazioni astronomiche nelle effemeridi di Milano per l' anno 1788.

Sezione 6.

Nuove formole per la misura delle altezze relative alle due ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica, ed armonica.

25. Cerchiam finalmente una formola per le livellazioni barometriche, la qual possa applicarsi a qualunque ipotesi del calor decrescente dal basso all' alto dell' atmosfera. A questo fine supponiamo che ad un' altezza x corrisponda un calore espresso da una funzione dell' altezza medesima, che chiameremo X. Sia di nuovo, come nel num. 2, la densità del mercurio alla temperatura del ghiaccio $= 1$, ed $\frac{1}{D}$ quella dell' aria, che abbia la medesima temperatura, e sia com-

pressa da un peso espresso dall' altezza A' del mercurio nel barometro. Sia y l' altezza di questo alla stazion superiore, ove il calore è espresso da X funzione di x distanza verticale delle stazioni. Per avere la densità dell' aria all' altezza x, osservo che, pel numero 7, saranno le altezze del mercurio nei barometri in ragion composta delle densità e dei calori dell' aria, cioè $A' : y = \frac{1}{D} : \frac{X}{\delta}$. Avrem dunque $\frac{1}{\delta} = \frac{y}{A'DX}$, e quindi il peso dello strato d' aria, la cui altezza è dx, sarà $= \frac{y\,dx}{A'DX}$; il qual dovrà esser uguale a $-dy \,.\, 1$. Sarà dunque $-dy = \frac{-y\,dx}{A'DX}$, e $\frac{dx}{X} = \frac{-A'D\,dy}{y} = \frac{-B\,dy}{y}$, ponendo per semplicità maggiore B in luogo di $A'D$. L' integrale di quest' equazione $S \,.\, X^{-1}\,dx = -Bly + Cost.$ dipende, come ognun vede, dalla funzione X del calore, e sarà diverso secondo la diversità di questa funzione.

Or nell' ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica, X è $= C - mx$; e questo valore sostituito nell' equazione $\frac{dx}{X} = -\frac{B\,dy}{y}$ la cangia in $\frac{dx}{C-mx} = -\frac{B\,dy}{y}$, o $\frac{-dx}{C-mx} = \frac{B\,dy}{y}$. L' integrale d' amendue i membri di quest' equazione dipende dai logaritmi iperbolici, ed è $\frac{1}{m}\, l\,[C - mx] = Bly + Cost.$

La costante sarà dunque $\frac{1}{m}\, l\, [C - m x] - B l y$; ove y è $= A$, quando $x = o$; poichè A esprime al solito l'altezza del barometro alla stazion inferiore dove x è $= o$.

La costante è dunque $\frac{1}{m}\, l C - B l A = \frac{l C - m B l A}{m}$.

L' equazion completa diviene per conseguente

$\frac{1}{m}\, l\, [C - m x] = \frac{m B l y + l C - m B l A}{m}$; o sia $l\, [C - m x]$ $= - m B\, (l A - l y) + l C = - m B l\, (\frac{A}{9}) + l C$. Si passi ora dai logaritmi ai numeri; e si avrà

$C - m x = \frac{C}{(\frac{A}{y})^{m B}} = \frac{C\, y^{m B}}{A^{m B}}$; e finalmente

$$x = \frac{C}{m}\left(1 - \frac{y^{m B}}{A^{m B}}\right) = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{m B} - y^{m B}}{A^{m B}}\right).$$

26. Si osservi ora, che il nostro coefficiente 9240,7 è $= D A' l\, 10 = B l\, 10$. Sarà dunque $B\, l\, 10 = 9240{,}7$, e $B = \frac{9240{,}7}{l\, 10} = 4013{,}2$. E poichè m è in quest'ipotesi $= 0{,}00005$ pel num. 23, avremo $m B =$ $4013{,}2 \times 0{,}00005 = 0{,}20066$. Ed ecco che la formola $x = \frac{C}{m}\left(1 - (\frac{y}{A})^{m B}\right)$ diverrà $x = \frac{100000}{5}\, C \left(1 - (\frac{y}{A})^{0{,}20066}\right)$

$$= 20000\, C \left(1 - \left(\frac{y}{A}\right)^{0,20066}\right),$$ ove le 66 centomillesime dell' esponente si posson negligentare senz' alcun sensibile errore. Ciò fatto, si trova

$$x = 20000\, C \left(1 - \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{5}}\right) = 20000\, C \left(\frac{A^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{A^{\frac{1}{5}}}\right).$$

E quì giova osservare che i valori di C sendo espressi da diecimillesime, considerandoli come intieri, ne avremo $x = 2\, C \left(\frac{A^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{A^{\frac{1}{5}}}\right)$.

Quando da prima m' incontrai in questa formola, non posso negare ch' ella per l' estrema sua semplicità non mi soddisfacesse. Ma più ancora mi piacque, quando nell' applicarla alle osservazioni barometriche, non la trovai inferiore alle altre anche per l' esattezza de' risultati. Per darne fin d' ora qualche saggio, ne farò l' applicazione alla misura di tre altezze, una assai piccola, l' altra mezzana, e massima la terza.

Il campanile della chiesa parrocchial di Domaso, borgo situato all' estremità settentrionale del lago di Como, misurato ben esattamente con una funicella, si trovò esser alto piedi 80, 149 dal suo piede al piano delle campane. Nel giorno 4 febbrajo del 1800, fatte le osservazioni barometriche nelle due mentovate stazioni, ebbi $A = 333,33$; $T' = 7° \frac{1}{3}$; $T = 6$; $y = 332,175$; e $t' = 6° \frac{1}{3}$. Or da questi dati risulta $C = 1,0306$; $M = 1805$; $m = 1578$; ed $M - m = 247$. Corretta l' altezza del barometro inferiore, si ha $A' = 333,25$. Sarà dunque

$LA' = 2.5227702$; e $Ly = 2.5213670$. Per trovar i valori di $(A')^{\frac{1}{5}}$, $y^{\frac{1}{5}}$, se ne dividan per 5 i logaritmi, o, ciò ch' è lo stesso, si raddoppino i lor decimi; e si avrà $\frac{1}{5}\, LA' = 0.5045540$, ed $\frac{1}{5}\, Ly = 0.5042740$. Presi i numeri corrispondenti a questi logaritmi, sarà dunque $A^{\frac{1}{5}} = 3,19561$; $y^{\frac{1}{5}} = 3,19355$, e per conseguenza

$$\frac{(A')^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{(A')^{\frac{1}{5}}} = \frac{0,00206}{3,19561}.$$

Ciò posto, avremo

$$
\begin{aligned}
L\,\frac{0,00206}{3,19561} &= 6\,.\,8093134\\
L\,10306 &= 4\,.\,0130901\\
L\,2 &= 0\,.\,3010300\\
\hline
Lx &= 1\,.\,1234335\\
x = 13,2872^{\text{te.}} &= 79,723^{\text{pie.}}
\end{aligned}
$$

L' altezza calcolata è dunque minor della vera di $\frac{426}{1000}$ di piede, o sia di pollici 5, lin. 1 $\frac{1}{3}$.

L' altezza mezzana sia la stazion XV[a] del sig. de Luc di piedi 2926 $\frac{2}{3}$. Nell' osservazion prima di questa stazione fu $A = 5208$ sedicesimi di linea; $y = 4626$; $T' = 9,1$; $t' = 5$, e $T = 10\,\frac{1}{2}$. Ciò posto, abbiamo $M = 2259$; $m = 1249$; $M - m = 1010$; $A' = 5202,74$; e $C = 1,0544$. Si faccia il calcolo con questi dati, e si troverà $(A')^{\frac{1}{5}} = 5,5366$; $y^{\frac{1}{5}} = 5,40815$; e la lor differenza $= 0,12845$. Prendiam ora i logaritmi, ed avremo

$$L\,\frac{0\,,\,12845}{5\,,\,53660} = 8\,.\,3654910$$

$$L\,10544 = 4\,.\,0230054$$

$$L\,2 = 0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 2\,.\,6895264$$

$$x = 489\,,\,2415$$

L' altezza calcolata supera dunque la vera di 1te, 467 su 487, 78, o sia di $\frac{3}{1000}$.

La massima altezza sia finalmente quella della cima del Mon-bianco, cioè di tese 2247, 5 sopra il lago di Ginevra. Per le osservazioni corrispondenti fatte nel giorno altrove indicato alla cima di quel monte e a Ginevra, si ebbe $A' = 326\,,\,68$; $y = 192\,,\,9$; $T' = t'$; $T = 22\,,\,6$; e $C = 1\,,\,1198$. Fatto il solito calcolo, troverem dunque $(A')^{\frac{1}{5}} = 3\,,\,1829$; $y^{\frac{1}{5}} = 2\,,\,8646$, e la lor differenza 0, 3183. Con questi dati si trova

$$L\,\frac{0\,,\,3183}{3\,,\,1829} = 9\,.\,0000136$$

$$L\,11198 = 4\,.\,0491405$$

$$L\,2 = 0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 3\,.\,3501841$$

$$x = 2239\,,\,667$$

A quest' altezza debbon aggiugnersi 13 tese, delle quali l' osservatorio del sig. Senebier fu superiore al

livello del lago, e si troverà l'altezza calcolata della stazion superiore di tese 2292,667 sopra il livello del lago. La media fra le due misure geometriche è di tese 2247, perchè la stazion superiore fu d'una mezza tesa inferiore alla cima del monte. Dunque la misura barometrica supera la media delle geometriche di 5te, 667, o di 2 millesime e $\frac{1}{2}$ dell'altezza totale. Io confesso però, che in tanta distanza orizzontale delle due stazioni, questa precision così grande è probabilmente più l'effetto del caso, che dell'esattezza della formola colla quale s'è calcolata l'altezza. Per un'altra osservazion contemporanea fatta dal figlio del sig. de Saussure al Priorato di Chamouni, l'altezza della cima del Mon-bianco sopra il Priorato, calcolata, come spiegherò altrove, con questa formola, è di tese 1900,174: e quella del Priorato sopra il lago, di 329,09. L'altezza del monte sopra il lago, vien dunque ad essere di tese 2242,764; e quindi minore dell'altra posta quì sopra un po' meno di tese 10 $\frac{1}{2}$. A me par veramente cosa assai singolare, che, ove la differenza fra le misure geometriche è di 19 tese, quella che risulta dalle due barometriche, sia poco più di 10, e per conseguenza della metà. E più ancora ne stupisco, osservando che la media fra le misure barometriche è $= 2247^{te}$, 865, e supera la media delle geometriche poco più d'un terzo di tesa. *(a)*

(*a*) Se si volesse far uso del coefficiente del cavalier Shuckburg posto in fine del num. 4°, si troverebbe $m\,B = 0,2064896530$, per agevolare senza error sensibile i calcoli, $= 0,2065$. La formola sarebbe dunque

$$x = 2\,C\,\frac{\left((A')^{0,2065} - y^{0,2065}\right)}{(A')^{0,2065}}$$

27. Vediam ora qual formola corrisponda all' ipotesi del calor decrescente in progressione armonica delle altezze. In questa la funzione X è $= \frac{C}{1 + m x}$; e questo valore sostituito nella formola $\frac{d x}{X} = - \frac{B d y}{y}$ la cangia in $\frac{(1 + m x) d x}{C} = - \frac{B d y}{y}$; il cui integrale è $\frac{m x^2}{2} + x = - B C l y + Cost.$ Ora, poichè y è $= A$ quand' è $x = 0$, la costante sarà $B C l A$. Dunque l' equazion completa è $\frac{m x^2}{2} + x = B C l A - B C l y = B C l (\frac{A}{y})$;

Calcoliam con questa le due precedenti altezze del monte Saleve e del Mon-bianco. Nella prima avremo $(A')^{0,2065} = 5,8533$; $y^{0,2065} = 5,713$; e la lor differenza $0,1403$. Sarà dunque

$$L \frac{0,1403}{5,8533} = 8.3796569$$

$$L\, 10544 = 4.0230054$$

$$L\, 2 = 0.3010300$$

$$L\, x = 2.7036923$$

$$x = 505,47$$

L' altezza calcolata con questo coefficiente supera dunque la vera di tese 17, 69, o sia di $\frac{36}{1000}$ dell' altezza totale; ch' è alquanto più del 3 e $\frac{1}{2}$ per 100.

Si faccia un simil calcolo pel Mon-bianco, e si troverà $L x = 3.3633309$, cui corrisponde il numero 2308, 5. Questo coefficiente vien quindi a dare un' altezza che supera di tese 74 e $\frac{1}{2}$, o del 3 ed $\frac{1}{3}$ per 100 la media delle misure geometriche.

ovvero $x^2 + \frac{2x}{m} = \frac{2BC}{m} l(\frac{A}{y})$; e cangiando i logaritmi Neperiani nei tavolari, $x^2 + \frac{2x}{m} = \frac{2BCl\,10}{m} L\frac{A}{y}$. Le radici di quest' equazione sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 2BCml\,10\,L\frac{A}{y})}}{m}$$. E qui si osservi esser $Bl\,10 = 9240,7$; $2Bl\,10 = 18481,4$; ed $m = 0,00004666$; colle quali sostituzioni si troverà

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 18481,4 \times 0,00004666\,CL\frac{A}{y})}}{0,00004666}$$; o sia

$x = 21432(-1 \pm \sqrt{(1 + 0,862342\,CL\frac{A}{y})}$; nella qual equazione il radical negativo non serve, perchè le altezze x si suppongon positive. Il logaritmo della frazion costante $0,862342$ è $= 9.9356796$. Sian di più $LC = M$, $L\frac{A}{y} = M'$, ed il numero corrispondente alla somma di questi tre logaritmi $= N$. Ciò posto, sarà $x = 21432(\sqrt{(N+1)} - 1)$.

Applichiamo anche questa formola ai tre esempj del num. prec., ed avremo nel primo $L\frac{A}{y} = 0.0014032$, e $C = 1,0306$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 7 \cdot 1471196$$

$$L\,C = 0 \cdot 0130901$$

$$L\,fraz.\ cost. = 9 \cdot 9356796$$

$$Somma = 7 \cdot 0958893$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 0,001247653, ovvero 0,00125 $=N$. Dunque $\sqrt{(N+1)}$ è $=\sqrt{1{,}00125}$. Ora il logaritmo di 1,00125 è 0,0005425, e la sua metà 0,0002712, cui corrisponde il numero 1,00062. Dunque sarà $x=21432\times 0{,}00062 = 13^{te}, 38784 = 80^{pie}, 32704$. L'altezza calcolata è quindi maggior della vera di $\frac{178}{1000}$ di piede, o poco più di 2 pollici.

Nel secondo esempio abbiamo $L\frac{A}{y} = 0 \cdot 0510293$, e $C=1{,}0544$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 8 \cdot 7078197$$

$$L\,C = 0 \cdot 0230054$$

$$L\,fraz.\ cost. = 9 \cdot 9356796$$

$$Somma = 8 \cdot 6665047$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 0,046399. E' dunque $N+1=1{,}046399$; $\sqrt{(N+1)}=1{,}022936$; e finalmente $x=21432\times 0{,}022936=491^{te}, 57$. L'altez-

za calcolata supera dunque la vera di tese 3 e $\frac{4}{5}$. Nell' ultimo esempio è $L\frac{A}{y} = 0.2287903$, e $C = 1,1198$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 9 \,.\, 3594372$$

$$LC = 0 \,.\, 0491405$$

$$L\,\textit{fraz. cost.} = 9 \,.\, 9356796$$

$$\textit{Somma} = 9 \,.\, 3442573$$

Il numero corrispondente a questo logaritmo è 0,220931; ond' è $N+1 = 1,220931$; $\sqrt{(N+1)} = 1,104957$; ed $x = 21432 \times 0,104957 = 2249^{te},44$. Per questo calcolo la cima del Mon-bianco è dunque superiore al lago Lemano di tese 2262,94, altezza che supera la media geometrica di $15^{te}, 44$.

Si avverta però, che le tre altezze così calcolate dovrebber diminuirsi di 17 milionesime, perchè $\frac{1}{0,00004666}$ non è esattamente 21432, ma 21431,623.

28. In questi esempj si può osservare che la sola differenza dei logaritmi delle altezze barometriche moltiplicata per 10000 dà, se non esattamente, almen presso a poco le distanze verticali delle stazioni in millesime di tesa. Nel primo il risultato è 14,032; nel secondo 510,273; nel terzo 2287,903 non molto diversi dalle anzidette distanze. Moltiplicando adunque si fatte differenze per 0,00004666 diminuzion del calore per ogni tesa nell' ipotesi della progressione armonica, si troverà di quanto il calore della stazion inferiore abbia a dimi-

nuirsi per aver quello della superiore. E ciò posto, dato il valore di C, sarà noto quello eziandío di c, senza far uso del calor osservato alla stazion superiore, di cui già abbiam veduto quanta sia l' irregolarità e l' incertezza. Così nel secondo esempio la differenza 510 moltiplicata per 0,00004666 dà la diminuzion del calore $= 0{,}0237966$; e questa sottratta da $1{,}0544$ calore della stazion inferiore, dà $c = 1{,}0306034$. Determinato così il valor di c, dalla formola primitiva $c = \frac{C}{1 + mx}$ si deduce immediatamente $mx = \frac{C - c}{c}$.

Il sig. Abate Oriani sostituendo questo valor di mx nella prima formola dell' integrazione

$\frac{mx^2}{2} + x = BCl\,10\,L\frac{A}{y}$, la cangia in un' altra assai più semplice, la qual coincide con quella che l'Hennert avea già data nella citata sua dissertazione. Si avverta però, che l' uno e l' altro suppongono il calore della stazion superiore esser quello che vi si trova attualmente indicato dall' osservazione. Questa nuova formola si trova ben facilmente ove si rifletta, che $\frac{mx^2}{2} + x$ è $= x\left(\frac{mx}{2} + 1\right)$; e che sostituito $\frac{C - c}{c}$ in luogo di mx, ne viene

$x\left(\frac{C - c}{2c} + 1\right) = x\left(\frac{C + c}{2c}\right)$. Ciò posto, se n' ha eziandío l' equazione

$$x\left(\frac{C+c}{2c}\right)=BCl\,10\,L\,\frac{A}{y};\ \text{ed}\ x=\frac{2Cc}{C+c}\,Bl\,10\,L\,\frac{A}{y}.$$

Sostituiamo 9240,7 a $Bl\,10$; ed avrem finalmente

$x=9240,7\times\frac{2Cc}{C+c}\,L\,\frac{A}{y}$, colla qual formola si calcoleran facilmente le altezze dei luoghi, quando sian note per osservazione le tre quantità A, y, e C.

Prendiam di nuovo l' esempio secondo; nel quale è $L\,\frac{A}{y}=0.0510293$; $C=1,0544$; e per conseguente il calor c vien ad essere $=1,0306$; e $C+c=2,085$.

Sarà dunque

$$L\,\frac{2Cc}{C+c}=0\,.\,0180194$$

$$L\left(L\,\frac{A}{y}\right)=8\,.\,7078197$$

$$L\,coef.\,cost.=3\,.\,9657049$$

$$Lx=2\,.\,6915440$$

$$x=491,323$$

Quest' altezza è dunque maggior della vera di 3 tese e $\frac{3}{4}$.

In tutti i calcoli precedenti il coefficiente m è $=0,00004666$. Ma il sig. Hennert nella sua dissertazione, pag. 27 e seguenti, pretende che il coefficiente suddetto non possa esser costante; e ne apporta due ragioni. La prima è che dalle osservazioni termometriche fatte in diversi tempi a due stazioni fisse, la dif-

ferenza tra il calor superiore e l' inferiore non risulta costante, ma irregolare e variabile: la seconda consiste in un calcolo analitico, col quale l'autor si sforza di dimostrare *a priori*, che nell' ipotesi della progressione armonica il coefficiente m è necessariamente variabile. Ma alla prima ragione io rispondo che le osservazioni fatte sul dorso dei monti alla stazion superiore, non indicano il calore dello strato d' aria isolato e posto verticalmente sopra l' inferiore al livello dell' altra, ma il calor locale della stazion superiore variamente modificato dalle accidentali temperature dei luoghi e corpi vicini. Ed io, per evitar quest' inconveniente, ho scelte alcune osservazioni fatte sulle cime isolate di monti più alti di tutti quei che han dintorno, e preso un medio fra i diversi valori di m dati da sei osservazioni del sig. de Luc. Alla seconda ragione ha ottimamente risposto il sig. Abate Oriani nel citato opuscolo sulle rifrazioni astronomiche alla pag. 68, ove pone in chiaro il difetto della pretesa dimostrazione analitica del dotto professore di Utrecht.

TAVOLA I.

DELLE DILATAZIONI E CONDENSAZIONI DEL MERCURIO.

Condensazioni d' un pollice di mercurio da zero al grado — 15 di Reaumur.

Gradi del termometro.	*Condensazioni del mercurio.*	
0	1 , 000000	
		252
— 1	0 , 000252	
		253
— 2	0 , 000505	
		254
— 3	0 , 000759	
		254
— 4	0 , 001013	
		255
— 5	0 , 001268	
		256
— 6	0 , 001524	
		256
— 7	0 , 001780	
		257
— 8	0 , 002037	
		258
— 9	0 , 002295	
		259
— 10	0 , 002554	
		260
— 11	0 , 002814	
		261
— 12	0 , 003075	
		262
— 13	0 , 003337	
		263
— 14	0 , 003600	
		264
— 15	0 , 003864	

Dilatazioni da zero al grado + 30.

0	1 , 000000	
		251
1	1 , 000251	
		251
2	1 , 000502	
		250
3	1 , 000752	
		249
4	1 , 001001	
		248
5	1 , 001249	
		247
6	1 , 001496	
		247
7	1 , 001743	
		246
8	1 , 001989	
		245
9	1 , 002234	
		244
10	1 , 002478	
		244
11	1 , 002722	
		243
12	1 , 002965	
		242
13	1 , 003207	
		242
14	1 , 003449	
		241
15	1 , 003690	
		240
16	1 , 003930	
		239
17	1 , 004169	
		238
18	1 , 004407	

		233
19	1 , 004645	
		237
20	1 , 004882	
		236
21	1 , 005118	
		235
22	1 , 005353	
		235
23	1 , 005588	
		234
24	1 , 005822	
		234
25	1 , 006056	
		233
26	1 , 006289	
		232
27	1 , 006521	
		230
28	1 , 006751	
		229
29	1 , 006980	
		228
30	1 , 007208	

TAVOLA II.

Delle dilatazioni e dei volumi dell' aria dal grado — 15 al + 30 di Réaumur.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*	
— 15	0 , 9295	
		45
— 14	0 , 9340	
		45
— 13	0 , 9385	
		45
— 12	0 , 9430	
		45
— 11	0 , 9475	
		46
— 10	0 , 9521	
		46
— 9	0 , 9567	
		47
— 8	0 , 9614	
		47
— 7	0 , 9661	
		47
— 6	0 , 9708	
		47
— 5	0 , 9755	
		48
— 4	0 , 9803	
		48
— 3	0 , 9851	
		49
— 2	0 , 9900	
		50
— 1	0 , 9950	
		50
0	1 , 0000	

		50
1	1 , 0050	
		51
2	1 , 0101	
		51
3	1 , 0152	
		51
4	1 , 0203	
		51
5	1 , 0254	
		52
6	1 , 0306	
		52
7	1 , 0358	
		53
8	1 , 0411	
		53
9	1 , 0464	
		53
10	1 , 0517	
		54
11	1 , 0571	
		54
12	1 , 0625	
		55
13	1 , 0680	
		55
14	1 , 0735	
		56
15	1 , 0791	
		55
16	1 , 0846	
		54
17	1 , 0900	
		54
18	1 , 0954	
		53
19	1 , 1007	
		53
20	1 , 1060	

		53
21	1 , 1113	
		53
22	1 , 1166	
		53
23	1 , 1219	
		52
24	1 , 1271	
		52
25	1 , 1323	
		51
26	1 , 1374	
		51
27	1 , 1425	
		51
28	1 , 1476	
		50
29	1 , 1526	
		50
30	1 , 1576	

SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

PARTE II

Nuovi schiarimenti intorno ai metodi diretti

Esponendo nella prima parte il metodo diretto che conduce alle formole delle livellazioni barometriche, io mi son ristretto alle cose più essenziali, affinchè l'attenzion del lettore men divagata e più raccòlta le potesse intendere più facilmente. In questa seconda parte aggiungerò dunque varie cose, che nella prima ho soppresse, ed alcune altre, alle quali sol dopo averla scritta ho pensato. A questa succederà una terza parte, in cui esaminerò i metodi che comunemente si chiamano indiretti; darò le formole che ne derivano; e finalmente aggiungerò i calcoli di varie misure barometriche delle altezze, e fra queste di alcune fatte nel nostro paese.

Sezione I

Modo facile di calcolar le formole per le livellazioni barometriche coi metodi diretti dell' Hallejo e del Taylor

29 Nel calcolar le mie formole con metodi diretti io dichiaro apertamente d'aver seguìto l'esempio di molti insigni Matematici, che assai prima di me l'avean fatto. Il primo a segnar questa via è stato il dottissimo Hallejo, il quale fin dall' anno 1685 presentò alla società di Londra una memoria impressa nel numero 181 delle transazioni filosofiche, nella quale dai soli principj fisici risguardanti le dilatazioni dell' aria, ed il rapporto fra i pesi specifici dell' aria e del mercurio egli deduce la sua regola per misurar col barometro le altezze dei luoghi sopra il livello del mare. Io credo far cosa grata al lettore spiegando particolarmente il metodo del primo inventore, e mostrando come la sua regola conduca ad una formola quasi eguale alla mia.

Ei dice adunque che con esperienze ben fatte si è trovato, esser la gravità dell'acqua a quella dell'aria una volta come 820, un' altra come 840, ed una terza come 860 ad 1; al che aggiunge, che queste sperienze furon fatte in estate essendo il barometro all'altezza di 29, 75 pollici inglesi. E quindi egli conchiude potersi senza error sensibile ammettere che, quando il barometro è a 30 pollici ed il calore in uno sta-

to medio, il peso specifico dell'aria è a quello dell'acqua come 1 ad 800.

Con altre sperienze, egli dice ancora, s'è trovato, che il peso del mercurio è a quello dell'acqua presso a poco come 13,5 ad uno: di che segue, esser i pesi del mercurio e dell'aria nel rapporto di 10800 ad 1, e che il peso d'un pollice di mercurio equivale a quello di 10800 pollici o di 900 piedi d'aria.

Applicando poi la geometrìa alla legge stabilita dai Fisici, per la quale le dilatazioni ed i volumi dell'aria sono in ragione inversa dei pesi comprimenti, egli osserva, che le coordinate dell'iperbole fra le assintote esprimon questa legge; vale a dire che se colle ascisse prese dal centro si rappresentano le altezze dei barometri corrispondenti alle pressioni dell'atmosfera, le ordinate esprimeranno le dilatazioni dell'aria. Da questi principj ei conchiude, per la celebre proprietà degli spazj assintotici scoperta nel suo secolo e dimostrata dal padre Gregorio da san Vincenzio; che, chiamate A ed x le altezze del barometro a due stazioni, la cui distanza perpendicolare sia z, ed A', x' le altezze per altre due stazioni poste alla distanza pur verticale z' dev' essere $L\frac{A}{x} : L\frac{A'}{x'} = z : z'$. Da quest' analogìa combinata coll' esperienze, che danno il peso del mercurio a quello dell' aria come 10800 ad 1 allorchè il barometro è a 30 pollici inglesi sua solita altezza al livello del mare, e la temperatura dell' aria e del mercurio in uno stato medio, l' Hallejo deduce poi la sua regola per trovar nelle medesime circostanze le altezze dei luoghi sopra il livello del mare; il che agevolmen-

te può farsi in questa maniera. Poichè la densità del mercurio è a quella dell' aria come 10800 ad 1 essendo il barometro a 30 pollici, egli è chiaro, che portandolo in un sotterraneo ove salisse a pollici 30, 05, e ad una stazion superiore, ove scendesse a pollici 29, 95, la porzione d' aria intermedia d' una densità sensibilmente uniforme è dieci mila ottocento volte minore della densità del mercurio farebbe equilibrio ad un decimo di pollice del metallo anzidetto. Dunque la distanza delle due stazioni ossia la lunghezza della colonna d' aria intermedia sarebbe un decimo di 10800 pollici cioè 1080. Nell' analogia posta quì sopra sarà dunque $A = 30, 05$; $x = 29, 95$; e $z = 1080$; onde si cangerà nella seguente

$$L \frac{30, 05}{29, 95} : L \frac{A'}{x'} = 1080 : z'$$; vale a dire, che sarà

$$z' = \frac{1080 \, L \frac{A'}{x'}}{L \frac{30, 05}{29, 95}} = \frac{1080 \, L \frac{A'}{x'}}{0, 0014477} = 746010 \, L \frac{A'}{x'} ;$$

la qual formola ha i pollici per unità. Sostituiti i piedi ai pollici, essa fia dunque $z' = 62167, 5 \; L \frac{A'}{x'}$.

Supposto $A' = 30$ pollici, e messi successivamente in luogo d' x' i numeri 30, 29, 28 ec. si saprà quanto sian più alte del mare le stazioni, nelle quali le altezze dei barometri son di pollici 30, 29, 28 ec. Così $z' = 62167, 5$

$L \frac{30}{30}$ è $= 0$; $z' = 62167, 5 \, L \frac{30}{29} = 915, 3$; $z' = 62167, 5$

$L\frac{30}{28}=186,274$. E tali appunto sono le altezze nella tavola calcolata dall' Hallejo, prescindendo dalle frazioni ch' egli ha negligentate.

Trenta pollici inglesi corrispondono a 28, 149189 delle antiche misure francesi. Dunque, trasportato il barometro a due stazioni, nelle quali abbia le altezze 28, 199189, e 28, 099189, ne risulterà

$L\frac{A}{x}=L\frac{28,199189}{28,099189}=0.0015428$. La colonna d' aria posta fra le due stazioni, cioè la loro distanza z è, come sopra si è detto, $=1080$: e ciò posto, abbiam la proporzione $0.0015428 : L\frac{A'}{x'}=1080 : z'$; e per conseguente $z'=\frac{1080\,L\frac{A'}{x'}}{0.0015428}=700026\,L\frac{A'}{x'}$ in pollici$=58335,5\,L\frac{A'}{x'}$ in piedi. Finalmente, diviso per 6 il coefficiente, la formola dell' Hallejo sarà $z'=9727,7\,L\frac{A'}{x'}$, e darà le altezze in tese di Francia.

In questa formola si suppone l' aria ad una temperatura media qual è quella di 54°, 5 Far. o 10° Réaumur. Quindi, se vorrem ridurla alla temperatura del ghiaccio, dovrem osservare, che la colonna d' aria corrispondente a due determinate altezze di due barometri posti verticalmente un sopra l' altro, ha una lunghezza proporzionale al calore da cui è rarefatta o conden-

sata; e ne conchiuderemo che supposto $= 1$ il volume dell' aria alla temperatura zero di Réaumur, ed $1 + m$ al grado 10, la distanza z' delle due stazioni calcolata pel grado 10 s' avrà a dividere per $1 + m$ volendo ridurla al grado zero. Per questa temperatura avrem dunque $z' = \frac{9727,7}{1 + m} L \frac{A'}{x'}$. Fra poco vedremo, che la dilatazion media dell' aria risultante dalle osservazioni di dodici diversi autori è 0,004878 per ogni grado di Réaumur, e quindi 0,04878 per 10 gradi. Questo è dunque il valor di m; il quale sostituito nella formola la riduce a $z' = \frac{9727,7}{1,04878} L \frac{A'}{x'} = 9275,25 \, L \frac{A'}{x'}$ formola non guari diversa dalla mia $z' = 9240,7 \, L \frac{A'}{x'}$; e che darebbe le altezze maggiori di 374 centomillesimi. Anzi prendendo le dilatazioni dell' aria dalle tavole del General Roy (come ho sempre fatto nella prima parte), il coefficiente si ridurrebbe a 9249, 5; e darebbe le altezze maggiori di soli 95 centomillesimi.

Il Taylor non ha data, a dir vero, alcuna regola per le livellazioni barometriche; ma nel suo celebre metodo degl' incrementi diretto ed inverso stampato a Londra nel 1715 ha esposta e dimostrata una formola, colla qual si determina la densità dell' aria a qualunque distanza dal centro della terra nell' ipotesi della gravità in ragion inversa duplicata delle distanze; ed io mostrerò quanto sia facile l' applicarla alla misura barometrica delle altezze.

Il Taylor chiama a il raggio della terra, alla cui superficie suppone la gravità $= 1$; x la distanza verticale d'uno strato dell'aria dal centro; y la densità dell'aria in quello strato proporzionale al peso dell'aria superiore e per conseguenza all'altezza, che in quello strato avrebbe il barometro; e trova che il rapporto fra x ed y è espresso dall'equazione $\frac{dy}{y} = \frac{-a^2 dx}{cx^2}$; nella quale ei dimostra, esser c uguale alla lunghezza d'una colonna d'aria, che al livello del mare sostenga nel barometro il mercurio a 30 pollici inglesi, ed abbia in tutta la sua lunghezza la stessa densità che alla base. Questa densità poi è da lui determinata nel modo seguente. „ Per
„ un esperimento (dice egli alla pag. 104 dell' opera
„ menzionata) fatto dall'Hauksbee si sa, che la mezza-
„ na densità dell' aria è a quella dell'acqua come 1 ad
„ 820. E' anche la densità dell'acqua a quella del mer-
„ curio come 1 a 13, 5. Dunque la densità dell' aria
„ è a quella del mercurio come 1 a 11070 „

Da questo valore della densità dell' aria si deduce immediatamente, che la lunghezza cercata della colonna aerea, ossia il valor di c è $= 30 . 11070$ pollici $= 27675$ piedi inglesi.

Agevol cosa è il dedurre da questi Dati una formola per le misure barometriche delle altezze adattata all' ipotesi della gravità costante; della qual solamente ho trattato finora. A questo fine io comincio a supporre $x - a = z$ facendo cominciare le altezze da misurarsi o dal livello del mare o a poca distanza verticale dal medesimo. Sostituisco poi $z + a$ ad x nella formola del

Taylor; e n'ho $\frac{dy}{y} = \frac{-a^2\,dz}{c\,(z+a)^2}$. Ora in tutte le livellazioni barometriche è z una quantità piccolissima in paragone di a, e piccolissima per conseguenza anche la diminuzione della gravità, che potrà aversi per costante in tutta l'altezza z. Dunque $z+a$ sarà lo stesso che a; il che riduce la formola a $\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{c}$; ovvero a $dz = -\frac{c\,dy}{y}$. Sostituito il valor di c in piedi inglesi posto quì sopra, ne risulta $dz = 27675\,\frac{dy}{y}$; e quest' equazione integrata colla condizione, che quando z è $=0$, sia y eguale all'altezza del barometro alla stazion inferiore, che esprimeremo per A, si riduce a $z = 27675\,l\,\frac{A}{y}$, avvertendo che y tanto esprime l'altezza del barometro alla stazion superiore, quanto la densità, che quivi ha l'aria. Si sostituiscano i logaritmi delle tavole a quei di Nepero; e sarà $z = 27675\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}$. Osservo che 17675 piedi inglesi equivalgono a 25908, 514 francesi, o tese 4318, 085: sostituisco questo valore, e n' ho, negligentando gli 85 millesimi,

$$z = 4318\,l\,10\,L\,\frac{A}{y} = 9942,8\;L\,\frac{A}{y}.$$

Il rapporto dei pesi specifici dell' aria e del mercurio adottato dal Taylor, paragonato con quel dell' Hallejo indica una temperatura maggiore di tre o quattro

gradi. Supponendo ch' ella fosse di 13 gradi, avremo per le tavole del Roy $C = 1,0680$, e per conseguenza

$$z = \frac{9942,8}{1,0680} L \frac{A}{y} = 9309,7 \, L \frac{A}{y}.$$

Il coefficiente di questa formola ha una singolarità degna d' esser osservata; voglio dire, ch' esso è quasi esattamente il medio fra i coefficienti dati da DeLuc, da Shuckburg, da Roy, e da me.

Sezione II

Del coefficiente calcolato coll' esperienza del cavalier Shuckburg

30. Al num. 4 nel calcolar il coefficiente coll' esperimento del cavalier Shuckburg mi sono scorsi nei numeri alcuni errori, che lo han reso alquanto maggiore di quel ch' ei dev'essere. Per gradi $9 \frac{1}{3}$ le dilatazioni del mercurio e dell' aria sono pel primo, 0,002315, per la seconda, 0,0482; non 0,002262, e 0,0471. Ora con questi dati si ha

$$D = \frac{(11364,6)(1,002315)}{1,0482};$$

$$A' = \frac{27,464}{1,002315};$$

$$D A' = \frac{(11364,6)(27,464)}{1,0482};$$

ed il coefficiente vien quindi ad essere

$\frac{(11364,6)(27,464) \, l \, 10}{1,0482}$. Facciasi il calcolo con questi

numeri, e si troverà il logaritmo del coefficiente in tese =3.9787571, cui corrisponde il numero 9522,64 un po' minore di quello del num. 4; ma che nel calcolo delle altezze le darebbe minori poco più che d' un millesimo. Volendo però calcolar il coefficiente coi soli sperimenti di Shuckburg, si dovrà far uso della dilatazion dell' aria trovata da lui, cioè di 0,0054675 per ogni grado di Réaumur (vedi il num. 18), la quale ridurrebbe il coefficiente a 9499,95.

Il professore Hennert ha calcolato anch' egli il coefficiente con quest' esperimento medesimo; ma non si è guardato da un piccolo sbaglio, in cui è facilissimo di cadere. Lo sbaglio consiste nel ridurre l' altezza del barometro dalla temperatura, ch' esso ebbe nel tempo della sperienza, alla temperatura zero; lo che non dee farsi senza cangiare altresì colla debita proporzione il rapporto delle densità dell' aria e del mercurio dall' esperienza medesima somministrato. Ma facendo anche quest' altro cangiamento, si distrugge; e per conseguenza si rende inutile quel che si è fatto colla riduzione dell' altezza barometrica. La cosa a me sembra assai chiara; ma, poichè l' autorità di quel celebre matematico potrebbe nel leggitore eccitar qualche dubbio sulla verità della mia proposizione, non sarà forse superfluo il darne quì un' esatta dimostrazione.

Nel coefficiente calcolato per la temperatura del ghiaccio, che si scioglie così del mercurio come dell'aria, si suppone che con qualche sperimento fatto alla temperatura suddetta siasi trovato, che la densità del mercurio è a quella dell'aria compressa da un peso indicato dall'altezza A' del barometro nel rapporto di 1 ad

$\frac{1}{D}$; ove la densità del mercurio è espressa dall'unità. Sia ora a' l'altezza del barometro; t la temperatura dell'aria e del mercurio nel tempo d'un' altra esperienza, con cui s'abbia a determinar il valore di D A' l 10 coefficiente per la temperatura zero R. Sia in oltre $1 : \frac{1}{n}$ il rapporto delle densità del mercurio e dell'aria trovato con quest'esperienza. Chiamiamo $\frac{1}{\delta}$ la densità del mercurio; $\frac{1}{d}$ quella dell'aria; ed avremo $\frac{1}{\delta} : \frac{1}{d} = 1 : \frac{1}{n}$.

Sia E l' espansion del mercurio da zero al grado t; e l'altezza a' del barometro ridotta alla temperatura zero sarà $\frac{a'}{1 + E}$. Dunque, poichè le densità di due colonne di mercurio d'ugual peso sono in ragione inversa delle lunghezze loro, sarà $\frac{1}{\delta} : 1 = \frac{a'}{1 + E} : a'$; e per conseguente $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{1 + E}$. Dunque la prima analogía si cangerà in $\frac{1}{1 + E} : \frac{1}{d} = 1 : \frac{1}{n}$; onde nasce $\frac{1}{d} = \frac{1}{n(1 + E)}$.

Sia per simil guisa E' l'espansion dell'aria da zero a t; e sarà $1 : 1 + E'$ come $\frac{1}{n(1 + E)}$ densità dell'aria pel grado t ad $\frac{1 + E'}{n(1 + E)}$ sua densità per la tempe-

ratura zero. Ciò posto nel coefficiente $A' D l$ 10 sostituiremo $\frac{a'}{1+E}$ ad A', ed $\frac{n(1+E)}{1+E'}$ a D; colle quali sostituzioni lo ridurremo ad $\frac{n a' (1+E) l \, 10}{(1+E)(1+E')} = \frac{n a' l \, 10}{1+E'}$.

In questa formola resta tuttavia l' altezza barometrica a' qual è data dall' osservazione fatta alla temperatura t; e da tutto l' andamento del calcolo è manifesto, non dover farsi alla detta altezza riduzion veruna; poichè, facendola, è d' uopo far lo stesso nella densità del mercurio $\frac{1}{\delta}$; la qual cresce di tanto di quanto l' altezza barometrica è proporzionalmente diminuita.

Quì sopra abbiam trovato, che il coefficiente calcolato senza cangiare l' altezza del barometro, e coll' espansion dell' aria notata nelle nostre tavole è 9522,64. Ma se, come vuole il sig. Hennert, si riducesse l' altezza del barometro a quella della temperatura zero, l' altezza ridotta coll' uso delle medesime tavole sarebbe 27, 402; e fatto il calcolo con questa, il coefficiente si ridurrebbe a 9501, 15; e questo diminuirebbe le altezze date dal coefficiente esatto di 226 centomillesime, piccola diminuzione, a dir vero, ma erronea anche nella sua piccolezza.

Sezione III

Della riduzion dei barometri alla stessa temperatura

31. Gli esperimenti co' quali il General Roy ha de-

terminate le dilatazioni del mercurio, furon fatti con un barometro, ch'era all'altezza di 30 pollici inglesi corrispondenti a 28, 149 francesi. Ora a quest'altezza del barometro la distanza della superficie interna del mercurio dall'estremità chiusa del tubo è una delle più piccole, e per conseguente la resistenza alle dilatazioni del mercurio prodotta dall' imperfezione del vuoto è una delle più grandi. E' non par dunque, che la tavola del Roy possa applicarsi a ridurre le altezze barometriche alla stessa temperatura, quando la lunghezza della colonna mercuriale sia sensibilmente minore di 28 pollici. Ma, non ostante quest'incertezza, io credo che nella misura delle altezze si possa far uso della stessa tavola senza alcun sensibil errore; e ciò per la seguente ragione. Se le dilatazioni del mercurio fossero uniformi, e la parte superior del barometro perfettamente vuota, posta la dilatazione da zero ad un grado di 251 milionesimi, tale sarebbe nè più nè meno anche da ogni altro grado n al prossimo $n+1$. Ciò premesso, io ne formo la tavola seguente, nella quale la prima colonna contiene i gradi del termometro da -5 a $+25$, intervallo che comprende quasi tutte le temperature, in cui posson farsi le livellazioni barometriche: la seconda colonna contiene le dilatazioni uniformi: la terza le variabili tratte dalla tavola del General Roy: la quarta in fine le differenze, o sia le diminuzioni d'espansione, che suppongo interamente prodotte dall' imperfezione del vuoto nella parte superior del barometro.

Gradi	*Dilatazioni uniformi*	*Dilatazioni variabili*	*Differenze*
— 5	0 , 998745	0 , 998741	4
— 4	0 , 998996	0 , 998993	3
— 3	0 , 999247	0 , 999244	3
— 2	0 , 999498	0 , 999496	2
— 1	0 , 999749	0 , 999748	1
0	1 , 000000	1 , 000000	0
1	1 , 000251	1 , 000251	0
2	1 , 000502	1 , 000502	0
3	1 , 000753	1 , 000752	1
4	1 , 001004	1 , 001001	3
5	1 , 001255	1 , 001249	6
6	1 , 001506	1 , 001496	10
7	1 , 001757	1 , 001743	14
8	1 , 002008	1 , 001989	19
9	1 , 002259	1 , 002234	25
10	1 , 002510	1 , 002478	32
11	1 , 002761	1 , 002722	39
12	1 , 003012	1 , 002965	47
13	1 , 003263	1 , 003207	56
14	1 , 003514	1 , 003449	65
15	1 , 003765	1 , 003690	75
16	1 , 004016	1 , 003930	86
17	1 , 004267	1 , 004169	98
18	1 , 004518	1 , 004407	111
19	1 , 004769	1 , 004645	124
20	1 , 005020	1 , 004882	138
21	1 , 005271	1 , 005118	153
22	1 , 005522	1 , 005353	169
23	1 , 005773	1 , 005588	185
24	1 , 006024	1 , 005822	202
25	1 , 006275	1 , 006056	219

Nell' esperimento del Roy la parte vuota del tubo fu di circa tre pollici; e per conseguenza la diminuzion successiva nelle dilatazioni della terza colonna è l' effetto della resistenza d' uno o di più fluidi espansibili chiusi in uno spazio di tre pollici, non contando la piccola diminuzione di questo spazio corrispondente alle successive espansioni del mercurio, diminuzione che anche pel grado + 25 non giugne a 17 centesimi di pollice. Ora la resistenza di questi fluidi deve in qualche ragione esser tanto minore, quanto maggiore è lo spazio, che li contiene; ma io non avendo alcun mezzo per determinare qual debba esser precisamente la detta ragione, la supporrò eguale alla semplice inversa degli spazj. Per questa ragione se D è la diminuzione dell' espansion del mercurio per un grado T' corrispondente ad un vuoto di tre pollici, per aver quella del vuoto $31-A$, lasciato nel barometro da una colonna di mercurio $=A$, fo la proporzione $31-A : 3 = D : \frac{3D}{31-A}$.

E per la ragion medesima la diminuzion corrispondente alla temperatura t' ed all' altezza del barometro a sarà $\frac{3d}{31-a}$. Si chiamino, come sempre abbiam fatto, M, m le dilatazioni indicate dalla terza colonna pei gradi T', t'; e sarà $M = 251\,T' - D$, $m = 251\,t' - d$, e per conseguenza $M - m = 251\,(T' - t') - D + d$. Chiamiam similmente M', m' le dilatazioni corrispondenti ai vuoti $31-A$, $31-a$ per le medesime temperature; e sarà $M' = 251\,T' - \frac{3d}{31-A}$, $m' = 251\,t' - \frac{3d}{31-a}$; e quin-

di $M'-m'=251\,(T'-t')-\frac{3\,D}{31-A}+\frac{3\,d}{31-a}$. Ora in tutte le livellazioni barometriche le differenze delle correzioni fatte con $M-m$ e con $M'-m'$ saran sempre così piccole, che la differenza corrispondente nelle due altezze calcolate non giungerà forse mai a tre decimi di tesa nelle grandi altezze, e nelle piccole sarà assai minore.

Sia per esempio $A=27,5$; $a=16,5$; $T'=23°$; $t'=4°$; $T=24°$; $t=1°$. Ciò posto, sarà $M=5588$; $m=1001$; $M-m=4587$, e per conseguenza $A'=27,3738575$. Ora per aver anche i valori di M', m', osservo che nella tavola a $T'=23°$ corrisponde $D=185$, ed a $t'=4°$ $d=3$. Osservo in oltre, che $31-A$ è $=3,5$; e $31-a=14,5$; onde conchiudo esser $M'=$

$$5773-\frac{3\,.\,185}{3,5}=5614,45;\ \text{ed}\ m'=1004-\frac{3\,.\,3}{14,5}=1003,$$

38. E' dunque $M'-m'=4611$, e quindi $A'=27,3731975$. La differenza tra i due valori di A' è dunque di pollici 0,00066; vale a dir che non giunge ad otto millesimi di linea; alla quale nel calcolo delle altezze corrisponderà la differenza d' uno o due decimi di tesa. E in vero, fatto il calcolo pe' due valori di A' colla formola del calor decrescente in progressione aritmetica

$$x=20000\,C\left(\frac{(A')^{0,20066}-a^{0,20066}}{(A')^{0,20066}}\right),$$ si trovan questi due valori dell' altezza $x=2177,3$; $x=2177,2$; la cui differenza è d' un solo decimo di tesa su 2177.

Io ho scelto quest' esempio per mostrare quanto sia piccola la differenza dei risultati anche nei casi, in

cui D e $31-a$ son molto grandi, e deggion produrre per conseguente una delle massime differenze. Questa, a dir vero, sarebbe alquanto maggiore, se la resistenza alla dilatazion del mercurio fosse non già nella ragion semplice inversa degli spazj vuoti, ma nell'inversa duplicata. Nondimeno anche allora ella si ridurrebbe a ben poco. Così nell'esempio precedente sarebbe $M' =$

$$5773 - \frac{3^2 . 185}{(3 , 5)^2} = 5637 , 09 \text{; ed } m' = 1004 - \frac{3^2 . 3}{(14 , 5)^2}$$

$= 1003, 87$. In questo caso sarebbe dunque $M' - m' = 4633$; e per conseguenza $A' = 27, 3725925$; la cui differenza da $27, 3738575$ si riduce a $0, 001265$ pollici, o circa 15 millesimi di linea; alla quale può corrisponder nelle altezze una differenza d'uno o due decimi di tesa.

31. Il celebre matematico Laplace ha date due formole di livellazioni barometriche, una per la gravità costante, l'altra per la gravità doppiamente variabile, cioè decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra, e crescente con una certa legge al crescer delle latitudini. In amendue le formole la riduzion dei barometri alla stessa temperatura si fa accrescendo, come dice egli stesso, l'altezza del barometro nella stazion la più fredda della sua parte 5412ma presa tante volte, quanti sono i gradi di differenza nelle temperature delle due stazioni (Esposizione del sistema del mondo: seconda edizione: pag. 82), avvertendo che i gradi di cui parla l'autore, son quelli del termometro detto di Réaumur, ma a scala centenaria. Ciò posto, ognun vede, che la sua formola di correzione è

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\,(1 + \frac{T' - t'}{5412})}$ ne' casi più ordinarj, cioè in quelli ne' quali il barometro inferiore è più caldo del superiore. Ma ne' casi contrarj la correzione dovrà farsi al barometro inferiore; e la formola diverrà

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 + \frac{t' - T'}{5412}).$$

L'autore dice lo stesso nella sua grand'opera intitolata Meccanica celeste; vol. IV; pag. 291; ove si esprime in questi termini. " Io ho trovato con un' esatta e-
" sperienza, che il mercurio si dilata della sua parte
" 5412ma per ogni grado del termometro: convien dun-
" que nella stazione corrispondente alla minor tempe-
" ratura aumentar l'altezza osservata del barometro del-
" la sua parte 5412ma presa tante volte, quanti sono i
" gradi nella differenza di temperatura del barometro
" alle due stazioni. " Per queste parole egli è manifesto che giusta il sig. Laplace la correzione deve sempre applicarsi al barometro più freddo accrescendone l'altezza, per portarla a quella che corrisponde alla temperatura del più caldo.

Al num. 13 io ho dimostrato, seguendo in ciò l'esempio dell' Hennert, che la formola di correzione è

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - (\frac{M - m}{n})(1 - \frac{M}{n})\right);$$

la quale si riduce però quasi sempre ad

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - \frac{M - m}{n})$$

Sia E l' espansion del mercurio supposta uniforme per ogni grado del termometro, come la suppone Laplace, e sia per conseguente $\frac{M}{n}=ET'$, ed $\frac{m}{n}=Et'$. La formola si cambierà dunque in

$$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}\Big(1-E(T'-t')\,(1-ET')\Big)$$

e toltone alcun raro caso in

$$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}\Big(1-E(T'-t')\Big).$$

Or quest' ultima, se t' è $> T'$, si riduce ad

$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}\Big(1+E(t'-T')\Big)$ come vuol la regola del sig. Laplace. Resta a vedere se questa regola anche ne' casi assai più frequenti di $T'>t'$ si possa conciliar colla mia formola, che prescrive di diminuir l' altezza del barometro più caldo, non d' accrescer quella del più freddo. A questo fine si osservi che essendo

$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}\Big(1-E(T'-t')\Big)$, sarà anche

$$\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a\left(\frac{1}{1-E(T'-t')}\right)}$$

e risolvendo in serie la frazione del denominatore, ne risulterà

$$(F)\quad \frac{A'}{a'}=\frac{A}{a\,(1+E(T'-t')+E^2(T'-t')^2+E^3(T'-t')^3+\text{ec.})}$$

Se E non fosse una frazion piccolissima, questa formola sarebbe sensibilmente diversa da

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\,(1 + E\,(T' - t'))}$$ cioè da quella del sig. Laplace;

ma per la tenuissima quantità, di cui il mercurio si dilata per ogni grado del termometro eziandio di Réaumur, il valore delle due formole è quasi lo stesso, ed ecco in qual modo. L'espansion del mercurio, che Laplace dice d'aver trovata coll'esperienza, è $\frac{1}{5412}$ per ogni grado del termometro a scala centenaria. Essa è dunque $= 0,0001847$, e questa moltiplicata per $\frac{5}{4}$ dà l'espansione pel termometro coll'antica divisione $= 0,000230875$, ovvero $0,000231$ negligentando i decimali minori d'un milionesimo. Quindi ognun vede che anche il sig. Laplace fa cominciar le dilatazioni, sebben non lo dica, dalla temperatura del ghiaccio; e che il risultato del suo sperimento è ben poco diverso dal medio di quelli di De-Luc, Shuckburg, e Roy; il quale è $= 0,000236$ pel num. 12. *(a)*. Ciò posto, abbiamo

---

(a) Il sig. Hallstrom professor di Fisica ad Abo in Isvezia, dopo d'aver dedotta dagli esperimenti di De-Luc una formola generale per l'espansione, che il calorico produce nel vetro, ha con sei diversi sperimenti determinata la legge, colla quale il mercurio si dilata esso pure per la stessa azion del calorico, passando dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente. La dilatazion media pei due gradi estremi gli è risultata $0,017583$, la quale, se si suppone uniforme, dà l'espansione per ogni grado di Réaumur $= 0,0002198$. Aggiunta anche questa dilatazione alle altre quattro, si troverà che la media delle cinque è $0,0002316$, o più semplicemente $0,000232$. Vedi la dissertazione del signor Hallstrom intitolata *de expansione hydrargiri a calorico. Aboae. 1803.*

$E = 0,000231$, e quest' espansione moltiplicata per 25 gradi, oltre i quali non andrà forse mai la differenza delle temperature $T' - t'$, avremo $E(T' - t') = \frac{5775}{1000000}$. Sostituito questo valore, la formola F si ridurrà ad

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\left(1 + \frac{5775}{1000000} + \left(\frac{5775}{1000000}\right)^2 + \left(\frac{5775}{1000000}\right)^3 + \text{ec.}\right)}$$

La serie del denominatore è una progression geometrica, il cui primo termine è 1, il denominator della ragione $\frac{5775}{1000000}$ ed il numero dei termini maggiore d' ogni assegnabile. Or la somma d' una progression così fatta è, come tutti sanno,

$$= \frac{1}{1 - \frac{5775}{1000000}} = \frac{1000000}{994225} = 1,0058o844.$$

La mia formola F divien dunque

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a(1,0058o844)}$; laddove quella del sig. Laplace è

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a(1,005775)}$. Ciò posto, ognun vede che la differenza tra i due denominatori si riduce ad a (0,00003344), cioè a poco più di tre centomillesime moltiplicate nell' altezza a del barometro superiore, quantità così piccola, che nel calcolo delle altezze dei luoghi potrà senz' alcun pericolo d' errore negligentarsi.

In fatti la supposta differenza di 25 gradi nella tem-

peratura dei due barometri non può aver luogo, se la lor distanza verticale non è maggiore di due mila tese, e per conseguente se a non è minore di duecento linee. Ma quando anche fosse $a = 200$, lin. la differenza dei due denominatori sarebbe 200 (0, 00003344)=(0, 006688) lin. cioè meno di sette millesimi di linea, alla quale nel calcolo delle altezze non può corrispondere una sensibil differenza.

Nella sola osservazion del Monbianco s'è trovata finora tanta diversità di temperatura. Io non so veramente quali fossero i gradi dei due termometri attaccati; perchè il sig. deSaussure ha date le altezze dei barometri già corrette da lui colla regola del suo concittadino DeLuc. In quest' incertezza supporrò, che nel tempo dell'osservazione la temperatura dei barometri sia stata eguale a quella dell'aria, cioè $T' = 22°, 6$; $t' = -2,3$. In questo caso fu dunque $T' - t' = 24°, 9$ quasi uguale alla differenza massima 25° da me supposta. L'altezza corretta del barometro inferiore si ebbe sottraendo, giusta la regola di DeLuc, 15, 24 sedicesimi di linea dall' osservata, e quella del superiore aggiungendone all'osservata 8, 81. Le due altezze osservate furon dunque 5242, 12; e 3095, 21.

Ciò posto, si ebbe colla mia formola

$$\frac{A'}{a'} = \frac{5242,12}{3095,21\,(1,00580844)} = \frac{5242,12}{3113,1883};$$ e coll'altra

$$\frac{A'}{a'} = \frac{5242,12}{3095,21\,(1,005775)} = \frac{5242,12}{3113,0848}.$$

La differenza dei due denominatori è di $\frac{103}{16000}$

di linea, o di linee 0, 0064, vale a dir che non giunge a sette millesimi, così appunto come sopra abbiam detto che dovrebbe avvenire. E se coi due valori di $\frac{A'}{a'}$ si calcolerà l' altezza del monte, la differenza dei due risultati sarà minor d' un piede su 13404.

Sezione IV

Delle dilatazioni dell' aria prodotte dal calorico.

32. Ho detto qui sopra, che la dilatazion media dell' aria dedotta dalle sperienze di dodici diversi Fisici è 0, 004878 per ogni grado del termometro di Réaumur coll' antica scala, ed ora ne darò la prova. Hauksbée, Crucchio, Mayer, Bradley, La Caille, Bonne, Shuckburg, Saussure, Gai Lussac, e Kirwan credon le dilatazioni sempre uniformi; ma non s'accordan fra loro nell' assegnarne la quantità. Imperciocchè, chiamato 1 il volume dell' aria alla temperatura del ghiaccio, la dilatazione per ogni grado è espressa dai numeri seguenti

secondo	Hauksbée	0 , 004651
	Crucchio	0 , 005139
	Mayer	0 , 004540
	Bradley	0 , 005364
	La Caille	0 , 003947
	Bonne	0 , 004708
	Shuckburg	0 , 005467
	Saussure	0 , 004240
	Gai Lussac	0 , 004687
	Kirwan	0 , 005620

Ma le dilatazioni trovate dal General Roy son variabili come apparisce dalla tavola posta in fine della prima parte di questa memoria. Volendo però prenderne una media, e considerarla come uniforme, basterà farlo in un intervallo di temperature diverse, oltre il quale non sian mai per estendersi quelle delle livellazioni barometriche; e come tale si può considerar l'intervallo da $-5°$ a $+25°$. Ora nelle tavole del Roy la condensazion per $-5°$ è 1, 000—0, 9755=0, 0245; e la dilatazione per $+25°$ si vede anch'essa nella tavola esser 0, 1323. La somma della condensazione e della dilatazione è dunque 0, 1568; e questa divisa per 30 gradi d'intervallo dà 0, 005226 per la dilatazion media supposta uniforme.

Per gli sperimenti del Dalton, il cui risultato si legge nella biblioteca britannica al tomo XXI scienze ed arti, la dilatazione dell'aria dal grado 55 Farhe: al 212, avuto riguardo alla dilatazion del vetro, è 0, 325. Dunque, supponendo ch'ella sia uniforme, e cominci dal volume del grado 55 preso per unità, ad ogni grado corrisponde la dilatazione $\frac{0,325}{157}=0,00207$. La condensazione per 23 gradi, intervallo posto fra 55° e 32°, è dunque 23 (0,00207) =0, 04761; e questa sottratta dal volume 1 dà per residuo 0, 95239 volume corrispondente al grado 32. Collo stesso calcolo si troverà, che il volume pel grado 33 è 0, 95446. Trasportata finalmente l'origine delle dilatazioni al grado 32, si dirà come 95239 a 95446, così 1 ad 1,002173 volume del grado 33. Dunque l'espansione per ogni grado di Farheneit, cominciando dalla temperatura del ghiaccio, è

0, 00217344, e la totale dal ghiaccio all' acqua bollente 0, 3912192, non 0, 373 come altri ha creduto ingannato dalla comune inavvertenza di trasportar le dilatazioni da una temperatura ad un' altra senza cangiarne l' unità.

Il Dalton ha trovato egli pure non esser le dilatazioni uniformi ed avere il General Roy con ragione affermato, che nelle alte temperature esse van lentamente diminuendo. Ma egli non ha dato, ch' io sappia, la serie delle successive dilatazioni, come ha fatto il Roy; onde per me resta incerta la dilatazione dal grado —5 al +25; la qual divisa per 30 darebbe la dilatazion media corrispondente a quella del Roy. Per supplire a questa mancanza, io supporrò che le dilatazioni per 80 e 30 gradi sian proporzionali nelle sperienze di questi due Fisici, vale a dire, che 0, 412492 dilatazione per 80 gradi del Roy sia a 0, 391219 dilatazione per 80 del Dalton come 0, 1568 dilatazione per 30° del primo a 0, 1487135 dilatazione per lo stesso intervallo del secondo. La dilatazion media da —5° a +25° sarà dunque per gli esperimenti del Dalton 0, 004957. Si aggiungan finalmente queste due dilatazioni all' altre dieci, e si troverà la media delle dodici esser 0, 004878.

La dilatazione $\frac{1}{215}$ per la temperatura 16°, 75, che il De Luc ha dedotta dalle sue livellazioni barometriche trasportata alla temperatura del ghiaccio è (pel num. 16) 0, 0050435, o più esattamente 0, 0050441; e per conseguente la differenza tra quest' espansione tratta da osservazioni fatte all' aria aperta, e la media delle do-

dici fatte nell'aria chiusa nei manometri è di sole 166 milionesime.

Sezione V

Della diminuzion del calore corrispondente all'accrescimento delle altezze nell'atmosfera

33. Per mezzo di 9 osservazioni abbiam trovato al num. 23, che il medio abbassamento d'un termometro alzato verticalmente nell'atmosfera è d'un grado di Réaumur per ogni centinajo di tese. Vediam ora se a questo risultato sian conformi quelli di varie altre osservazioni fatte ad altezze non minori di 500 tese.

La massima altezza misurata dal General Roy è quella di Peak of Snowdon sopra Carnarven Quay, la qual è di 3555 piedi inglesi corrispondenti a 3335, 6779 francesi, o tese 555 , 9455. Le osservazioni furon fatte in due giorni diversi, cioè ai 7 e 14 agosto 1775. Nel giorno 7 le medie di tre osservazioni diedero $T = 59° \frac{3}{8}$, e $t = 48° \frac{12}{24}$ di Far. corrispondenti a 12°, 17; e 7°, 46 di Réaum. Nel giorno 14 le osservazioni furon quattro; e le medie diedero 58° , 5 ; e 44° , 06 F., ossia 11°, 71 ; e 5° , 36 R. Le medie delle due medie furon dunque 11° , 97 ; e 6° , 41 ; la cui differenza 5° , 56 corrisponde esattamente ad un grado per ogni centinajo di tese.

La maggior altezza misurata dal cavalier Shuckburg è quella del monte Mole non lungi da Ginevra di piedi inglesi 4211 corrispondenti a tese di Francia 658 , 535. Le medie di 6 osservazioni fatte nella mattina d'un me-

desimo giorno diedero $T = 63^\circ, 03$; e $t = 50^\circ, 13$ F. corrispondenti a $13^\circ, 79$; e $10^\circ, 72$ R; la cui differenza è $3^\circ,07$. Or questa per ogni cento tese dà gradi 0,4507; cioè meno d' un mezzo grado.

Nell' osservazione fatta da' signori Charles e Robert in un globo areostatico il primo dicembre 1783, la massima altezza cui giunsero, fu, secondo il calcolo inserito dal sig. abate Oriani nella sua memoria sulle rifrazioni, di tese 1649 a un di presso. Le altezze dei termometri furono $T = +7^\circ$; $t = -5^\circ$, e per conseguente $T - t = 12^\circ$; alla qual differenza corrispondono gradi 0, 7277 per ogni centinajo di tese.

L'altezza della cima dell' Etna sopra il mare, per un'osservazion barometrica del sig. de Saussure calcolata da lui col metodo del De Luc, risulta di tese 1672; e nell'osservazione fu $T = 18^\circ, 5$; $t = 3^\circ, 5$, e $T - t = 15^\circ$. A questa differenza corrispondono gradi 0, 8971 per cento tese. E si avverta, che il termometro superiore era sull' orlo del cratere vulcanico, ove la temperatura doveva esser maggiore della vera, e render minore la differenza.

Finalmente in un'osservazione del sig. Ramond, della quale avrò altrove occasion di parlare, fu $T = 15^\circ, 3$; $t = 3^\circ, 2$; $T - t = 12^\circ, 1$; e la vertical distanza delle due stazioni di tese 1341. Con questi dati si trovano gradi 0,9023 per ogni centinajo di tese.

Abbiam dunque undici osservazioni che danno un grado per cento tese, cioè le nove del num. 23, e le due del General Roy. Fatta la somma delle undici unità e delle quattro frazioni corrispondenti alle altre osservazioni; poi diviso il tutto per 15, numero delle os-

servazioni, abbiamo gradi 0, 9318 per ogni centinajo di tese; la cui differenza dall'unità non giugne a sette centesimi di grado.

La diminuzion d'un grado per ogni centinajo di tese è dunque presso a poco confermata da 15 osservazioni fatte a grandi altezze, cioè da tese 500 all'incirca fino a 2234, in alcune delle quali la stazion superiore fu la sommità di monti più alti di tutti i vicini; ed in una fu l'aria libera. Ma nella celebre salita areostatica de' signori Gay Lussac e Biot la diminuzion del calore fu tanto piccola, che non può conciliarsi con nessuna delle altre osservazioni. All'altezza di oltre a 1333 tese la differenza dei termometri non passò i tre gradi, ed a quella di 2000 tese fu poco più di cinque gradi e mezzo. I due Fisici che asceser col globo, ed ai quali son note anche le più minute circostanze del lor aereo viaggio, forse potranno formare qualche plausibil congettura sulle cagioni di questo singolar calore delle parti superiori dell'atmosfera. Ma della relazione di questo viaggio fatta dal sig. Biot all'istituto nazionale di Francia io non ho letto che un breve estratto, il qual si trova nel tomo primo della Nuova scelta d'opuscoli interessanti dell'anno 1804; pag. 180 e seguenti: e da questo raccolgo soltanto, che un vento settentrionale trasportò il globo alla distanza di 18 leghe in tre ore e mezzo. Or se questo vento, che suol portare un'aria più fredda, fosse stato assai più forte, e avesse cominciato a spirar prima vicin di terra che in alto, e' potrebbe aver lasciato nelle parti superiori dell'atmosfera una maggior quantità dell'aria portatavi ne' giorni precedenti da altri venti più caldi. Ma, qualunque

ne sia la cagione, il fenomeno è certamente straordinario, e non può per conseguenza nè distrugger nè alterare la regola della diminuzion del calore dedotta da tante osservazioni o perfettamente o molto concordi fra loro.

34. A questa regola ha fatto qualche ingegnoso cangiamento il sig. Kirwan nella sua bell' opera sulle variazioni dell' atmosfera. Io rapporterò qui ciò che ne dice il sig. Pictet nel terzo estratto dell' opera anzidetta alle pagine 322 e seguenti del tomo XXI della biblioteca britannica *scienze ed arti*.

„ De Saussure stabilisce, che dal grado 45 al 47
„ di latitudine, e nei mesi d' estate il calor medio dell' a-
„ ria diminuisce d' un grado di Réaumur per ogni cen-
„ to tese di salita nell' atmosfera cominciando dal livel-
„ lo del mare; lo che fa un centesimo di grado per
„ tesa, la qual regola se fosse esatta, sarebbe como-
„ dissima nell' applicazione.

„ Ma l' autore le rimprovera con ragione, ch' ella
„ suppone invariabile la diminuzion del calore, qualun-
„ que sia la temperatura osservata alla stazion inferiore,
„ vale a dire, che la colonna d' aria è simultaneamente
„ modificata della stessa quantità, quando succede alla
„ sua base un cangiamento di temperatura; la qual sup-
„ posizione è contraria alle osservazioni; e l' autore ne
„ reca la prova. Il modo con cui egli procede per ot-
„ tenere un' approssimazione più esatta ci sembra mol-
„ to ingegnoso. Egli cerca negli strati superiori dell' a-
„ ria un punto, di cui sia nota la temperatura, ma la
„ cui distanza dalla terra ugualmente nota, sia abbastan-
„ za grande, perchè i cangiamenti di temperatura, se

„ alcuno ve n' ha a sì fatta altezza, non abbiano che „ un effetto insensibile sull'altezza totale. Supposto che „ sia nota (e ben tosto vedremo che lo è) la tempe- „ ratura di questo termine superiore, si stabilisce per „ osservazione la temperatura del termine inferiore: si „ ha così da una parte l'altezza della colonna d'aria; „ dall'altra la differenza di temperatura alle due stazio- „ ni della colonna medesima; e dividendo quest'altezza „ in un numero di parti eguali, e la differenza di tem- „ peratura in un numero di parti corrispondenti, si han „ gli elementi d'una progressione aritmetica così sem- „ plice come quella di de Saussure, ma ben più sicu- „ ra nell'applicazione.

„ Bouguer aveva già mostrato nel 1749 (*a*), esiste- „ re ad una certa altezza nell'atmosfera diversa secon- „ do le latitudini due punti, de' quali egli chiama uno „ il termin *superiore*, l'altro l'*inferiore* della congelazio- „ ne: il primo è quello, sopra il quale non s'alza mai „ alcun vapor sensibile; ed il secondo quello, ove gela „ tutte le notti anche in estate, e dove in quella sta- „ gione la temperatura non si alza che poco sopra il „ termine della congelazione. La temperatura costante „ di questi due punti è almeno di 32° F. o zero della „ scala comune.

„ Il termin superiore della congelazione è quello, „ che il sig. Kirwan sceglie per ultimo termine della „ progressione da stabilirsi: la determinazione della sua „ altezza a diverse latitudini era già stata l' oggetto

(*a*) Egli l' aveva già fatto nel 1744 in una memoria impressa nel volume di quell' anno dell' accademia delle scienze.

„ d'una particolar ricerca nell'opera, ch'egli pubblicò
„ nel 1787 sulla temperatura del Globo. Egli ha poi
„ introdotta una correzione per le latitudini superiori
„ al grado 55 ; e la determinazione non si applica fuo-
„ ri dei tropici se non nei mesi di maggio, giugno, lu-
„ glio, e agosto. Nei mesi d' estate le due curve, che
„ passano pel termine superiore e inferiore della con-
„ gelazione, s'accostano; e siccome l'inferiore è la più
„ mobile delle due, l' autore sceglie la superiore per
„ termine fisso di paragone; e dopo d'aver preso da Bou-
„ guer, da Saussure, e da altri Fisici i dati che som-
„ ministran gli elementi di quest'approssimazione, egli
„ ne costruisce una tavola, che qui trascriviamo lascian-
„ dola in piedi inglesi.

Latit.	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*
0	28000	18	25221	32	20146
5	27784	19	24941	33	19800
6	27644	20	24661	34	19454
7	27504	21	24404	35	19169
8	27364	22	24147	36	18577
9	27224	23	23890	37	17985
10	27084	24	23633	38	17393
11	26880	25	23423	39	16801
12	26676	26	22906	40	16207
13	26472	27	22389	41	15712
14	26268	28	21872	42	15217
15	26061	29	21355	43	14722
16	25781	30	20838	44	14227
17	25701	31	20492	45	13730

Latit.	Piedi inglesi	Latit.	Piedi inglesi	Latit.	Piedi inglesi
46	13235	61	5068	76	4067
47	12740	62	4989	77	4015
48	12245	63	4910	78	3963
49	11750	64	4831	79	3911
50	11253	65	4752	80	3861
51	10124	66	4684	81	3815
52	8965	67	4616	82	3769
53	7806	68	4548	83	3723
54	6647	69	4480	84	3677
55	5617	70	4413	85	3631
56	5533	71	4354	86	3592
57	5439	72	4295	87	3553
58	5345	73	4236	88	3514
59	5251	74	4177	89	3475
60	5148	75	4119	90	3432

Supposta l'esattezza della sua tavola, il Kirwan insegna a determinare con una regola assai facile i gradi, che il termometro debbe avere a diverse altezze dell' atmosfera, ed a latitudini diverse quando sia data l'altezza del termometro alla stazion inferiore, e fatto il calcolo per 18 osservazioni scelte fra quelle di Bouguer, Saussure, Roy, e Phis fatte ad altezze e latitudini diversissime, espone in una tavola i risultati del calcolo paragonati colle osservazioni; la cui differenza non eccede per l'ordinario alcuni decimi di grado di Farheneit. In due casi la differenza sale ad alcuni gradi: uno di questi è l'osservazion dell' Etna, in cui giunge a sei gradi; ma pel Monbianco la differenza tra il

calcolo e l'osservazione, è giusta la tavola, di soli diciotto centesimi di grado Far.

35. Tali sono le asserzioni del Kirwan, che si leggono nella biblioteca britannica: resta a vedersi quanto sian conformi alla verità. Per venirne in chiaro vediam primieramente in che consista la regola dell'autore. Sia L una data latitudine; ed osservata in questa l' altezza T, che il termometro di Far. ha al livello del mare in un giorno estivo, si cerchi qual abbia ad esser l'altezza del termometro in uno strato superiore dell'atmosfera posto ad una data distanza dalla superficie del mare. Si trovi nella tavola la distanza della linea superiore della congelazione dal mare per la data latitudine L, e si chiami D. La differenza di temperatura per la distanza D, cioè dal mare alla linea di congelazione sarà dunque $T - 32°$; e per conseguente (se gli abbassamenti del termometro si fanno in progressione aritmetica, e son proporzionali alle altezze) ad ogni piede di altezza corrisponderà l' abbassamento $\frac{T - 32°}{D}$. Ciò posto, se d è il numero de' piedi, pe' quali lo strato superiore dell'aria dista dal mare, l'abbassamento del termometro per quello strato sarà $\frac{(T - 32°)\,d}{D}$. Dunque l' altezza, cui quel termometro fia ridotto, dovrà essere $T - \frac{(T - 32°)\,d}{D}$.

Suppongasi ora, che il luogo, in cui si osserva il

termometro, sia più alto del mare della quantità A; ed è manifesto che la sua distanza dalla linea di congelazione non sarà più D, ma si ridurrà a $D - A$; e l'abbassamento del termometro per ogni piede di altezza

sarà $\frac{T - 32^\circ}{D - A}$. Dunque, chiamata δ la distanza d' uno

strato superiore dell' atmosfera dal luogo dell' osservazione, l' abbassamento del termometro per lo stesso

strato sarà $\frac{(T - 32^\circ)\,\delta}{D - A}$, e sottratto questo da T, si avrà

la temperatura cercata dello strato superiore.

Applichiam ora la regola all' osservazion del Monbianco; e riducendo le misure francesi a piedi inglesi ed i gradi di Réaumur a quelli di Farheneit, avremo $A = 1283, 163$; $T = 82^\circ, 85$; $\delta = 14285, 3$. Per la latitudine di Ginevra, ch' è di circa $46^\circ\ 10'$ avremo $D = 13153$; $D - A = 11869, 837$; e $T - 32^\circ = 50, 85$. L'abbassamento del termometro dovette per conseguenza essere

$\frac{(50^\circ, 85)(14285, 3)}{11869, 837} = 61^\circ, 198$; la cui differenza da 82°,

85, è $21^\circ, 652$, altezza, che dovrebbe avere il termometro al livello della stazion superiore, laddove nell'osservazione fu di $-2^\circ, 3$ R. $= 26^\circ, 825$ F. La differenza tra il calcolo e l' osservazione è dunque di $5^\circ, 173$, non di 0°, 38, come dice il Kirwan. E si avverta che il grande ammasso di nevi e ghiacci, ond' è coperto il Monbianco, deve nell' osservazione aver diminuita l' altezza del termometro, e resa per conseguente minor del vero la

differenza suddetta. In fatti, se al livello della stazion superiore, ma fuori del raffreddamento locale della cima del monte, la temperatura dell' aria si sarà ridotta (come io ho già supposto nel num. 23) a $-1°$ R. $= 29°, 75$ F; la differenza dall' osservazione al calcolo risulterà di $8°, 098$ F.

Il Kirwan non ha probabilmente avvertito, che la distanza della linea di congelazione dee prendersi dalla stazion inferiore, dove si è osservato il termometro, e non dalla superficie del mare. Ed invero, sostituendo nel calcolo precedente il valor di D a quello di $D - A$, si trova che l' altezza del termometro alla stazion superiore debb' essere $27°, 623$; la cui differenza dall' altezza osservata è $0°, 798$ poco maggiore di $0°, 38$, differenza assegnata dall' autore.

Nell' osservazion dell' Etna, di cui suppongo la latitudine $37° 40'$, l' altezza del termometro al livello del mare fu $73°,62$. La distanza D della linea di congelazione è in questo caso 17591; e quella della stazion superiore $d = 10691, 494$. L' abbassamento del termometro dovette adunque esser per la regola $\frac{(41°, 62)(10691, 494)}{17591} = 25°, 296$; e questo sottratto da $73°, 62$ altezza del termometro inferiore, dà quella del superiore di $48°, 324$. Ma il termometro sull' orlo del cratere dell' Etna fu a gradi $3°, 5$ R. $= 39°, 875$ F. La regola del Kirwan dà quindi gradi $8, 449$ più dell' osservazione, sebben questa siesi fatta in un luogo in cui l' aria doveva essere scaldata dalle esalazioni del vulcano, e diminuir la differenza. Anche l' autore confessa esser la sua regola in que-

sto caso alquanto difettosa; ma dice la differenza di 6° F. in luogo di 8° e quasi mezzo.

Questi risultati mi rendon alquanto dubbiosa la somma esattezza, che il dotto Fisico attribuisce alla sua regola; ma niente di positivo ardisco affermare; perchè i soli estratti del suo trattato delle Variazioni dell' atmosfera, che ho letti nella biblioteca britannica, non mi permetton di farlo.

36. Il principio del Kirwan può egualmente applicarsi alle due ipotesi del calor decrescente nelle due progressioni aritmetica e armonica; ed io, servendomi delle antiche misure francesi, e del termometro di Réaumur, lo farò nel modo seguente. Avverta però il lettore, che i numeri della tavola del Kirwan, cioè i piedi inglesi cangiansi in tese di Francia, moltiplicandoli per la frazione o, 156384. Colle tese francesi per unità si chiami, come dianzi, D la distanza della linea di congelazione dal mare per una data latitudine in estate. Sia T l' altezza del termometro in una stazione più alta del mare di tese A, e C il calore che gli corrisponde nelle tavole. Dovendo alla linea di congelazione esser $t = 0$, sarà $c = 1$. Si sostituiscan questi valori nella formola del calor decrescente in progressione aritmetica $c = C - m\,x$; e questa si cambierà in $1 = C - m(D - A)$. Sarà dunque $m = \frac{C - 1}{D - A}$. Determinato il valor di m, si avrà tosto anche quello del calor c per una stazione, la cui distanza dall' inferiore sia d; e ciò per mezzo della formola $c = C - \frac{d\,(C - 1)}{D - A}$.

Nell'osservazion del Monbianco fu $D = 2056, 91$; $A = 200, 66$; $D - A = 1856, 25$; $C = 1, 1198$; e $d = 2234$. Fatto il calcolo con questi dati, si trova $c = 0, 9756$, cui corrisponde il grado — 5; laddove nell' osservazione fu = 2, 3, e senza il freddo locale della sommità del monte sarebbe forse stato — 1. Con questo risultato la differenza tra il calcolo e l'osservazione è di 2°, 7 R. = 6°, 07 F. non 5°, 173 come sopra l'abbiam trovato: ma questa differenza nasce dalle tavole del Roy, delle quali ho fatto uso nel calcolo. In fatti, supponendo le dilatazioni dell'aria uniformi, e di 0,005 per ogni grado di Réaumur, a gradi 22°, 6 corrisponde

$$C = 1, 113; \frac{d(C-1)}{D-A} = 0, 136; \text{ e } c = 1, 113 - 0,$$

$136 = 0, 977 = 1 - 0, 023$; cui nella supposizione di 0, 005 di condensazione per ogni grado sotto il zero, corrispondono gradi — 4, 6. La differenza dal calcolo all'osservazione si riduce quindi a 2°, 3 R. = 5°, 175 F. maggiore della già trovata non più che due millesimi di grado.

Nell'osservazion del Legnone, la cui latitudine è 46° 6' fu $D = 2059, 42$; $A = 71, 55$; $D - A = 1987, 87$; $C = 1, 1219$; e $d = 1280, 7$. Or questi numeri sostituiti nella formola danno $c = 1, 0434$; cui corrisponde $t = 8°, 12$. Ma nell'osservazione fu $t = 11°, 125$ maggiore di gradi 3, 005.

Il Monte Generoso in fine è presso a poco alla latitudine 45°, 56'; alla qual corrisponde $D = 2074, 9$. Quivi nell'osservazione fu $A = 108$; $D - A = 1966, 9$; $C = 1, 1046$; e $d = 769$. Or da questi dati risulta $c =$

1, 0637, e $t = 12°, 218$; laddove nell'osservazione fu $t = 14°$. In questo caso la differenza si riduce dunque ad $1°, 782$, o poco più d'un grado e tre quarti.

L'ipotesi del calor decrescente d'un grado per 100 tese di salita dà nell'osservazion del Monbianco $t = 22°, 6 - 22°, 34 = 0, 26$ maggior dell'osservato di $2°, 56$; laddove il risultato della regola del Kirwan è minore di $2°, 7$. Ma se il termometro al livello della stazion superiore e senza il freddo locale della cima del monte sarà stato a $-1°$, com'è verisimile, la regola del Kirwan darà gradi 3, 79 di meno, e l'altra supposizione $1°, 26$ di più.

Al Legnone la stessa regola ha dato un eccesso di 3 gradi, e l'altra supposizione lo dà di $1°, 682$. Al Monte Generoso finalmente i risultati furon quasi eguali; poichè l'uno fu, come abbiam visto, $12°, 218$; e l'altro è $19°, 75 - 7°, 69 = 12°$. Ma si avverta che l'osservazione fu fatta alla metà di settembre; nel qual tempo la linea di congelazione può essere stata alquanto più bassa. Or ciò posto, la frazione $\frac{d(C-1)}{D-A}$ avrebbe avuto un denominatore un po' più piccolo, e per conseguente un valore un po' più grande; il quale sottratto da C diminuirebbe alquanto i valori di c, e di t.

La formola per la diminuzion del calore in progressione armonica è $c = \frac{C}{1 + m x}$ (num. 24); dalla qual si deduce $m = \frac{C - c}{c x}$. Ma la regola del Kirwan sup-

pone $c = 1$, ed $x = D - A$, e per conseguenza $m = \frac{C - 1}{D - A}$ come nell' ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica. Pongo questo valore di m nella prima formola, e sostituisco d ad x. Da queste sostituzioni risulta $c = \frac{C}{1 + \frac{d(C-1)}{D-A}}$.

Applichiamo anche questa formola ai medesimi esempj. Nell' osservazion del Monbianco è $\frac{d(C-1)}{D-A} = 0,14418$; d' onde viene $c = \frac{1,1198}{1,14418} = 0,9787$; al qual calore corrisponde $t = -4^{\circ}\frac{1}{3}$ in luogo di $-2^{\circ}, 3$, o piuttosto di -1°. Con un simil calcolo si trova pel Legnone $c = \frac{1,1219}{1,07853} = 1,0402$, e $t = 7^{\circ}, 83$ in luogo di $11^{\circ}, 125$. E pel Monte Generoso è $c = \frac{1,1046}{1,0409} = 1,0612$; e $t = 11^{\circ}, 76$ in vece di 14°.

Ma sostituendo nella formola $c = \frac{C}{1 + mx}$ il valor medio di m trovato al num. 24, cioè 0,00004666, si hanno i seguenti valori. Pel Monbianco $c = 1,0141$; $t = 2,8$. Pel Legnone $c = 1,0585$; $t = 11^{\circ}, 219$. Pel Monte Generoso $c = 1,0663$; $t = 12^{\circ}, 69$.

Il primo risultato pel freddo locale della sommità del monte è maggior del calore osservato, di gradi 5, 1; ma la differenza si riduce a 3°, 8 nella supposizion più probabile di $t = -1°$ in luogo di $-2°, 3$. Il secondo supera quello dell'osservazione poco più di 13 centesimi di grado; ed il terzo è minore del calor osservato di 1°, 31.

Per questi esempj non pare adunque, che il valor variabile di m determinato in ciaschedun caso particolare colla regola del Kirwan, sia da preferirsi ai medii e costanti dei num. 23 e 24, l'uno per la progressione aritmetica, e l'altro per l'armonica.

37. Ma se alcuno vorrà pur servirsi nelle livellazioni barometriche della regola anzidetta, egli il potrà fare ove si avverino le seguenti condizioni: Iª che sia nota l'altezza della stazion inferiore sopra il livello del mare: IIª che ne sia nota la latitudine: IIIª che le osservazioni sian fatte in estate.

Ne serva d'esempio la solita osservazion del Monbianco; alla quale nessuna mancò delle indicate condizioni. In essa fu $C = 1, 1198$; $D - A = 1856, 25$; e quindi m, ch'è $= \frac{C - 1}{D - A}$, vien ad essere $= \frac{0, 1198}{1856, 25} =$ $0, 00006454$. Essendo $B = 4013, 2$ pel num. 26, sarà $mB = 0, 25901$. Sarà in oltre $\frac{C}{m} = 17355, 8$. Sostituisco questi numeri nella formola $x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - a^{mB}}{A^{mB}}\right)$ e n'ho $x = 17355, 8 \left(\frac{A^{0, 25901} - a^{0, 25901}}{A^{0, 25901}}\right)$.

Nell'osservazione fu $A=326,68$ lin., ed $a=192,9$. Calcolo con questi dati, e trovo $A^{0,25901}=4,479018$; $a^{0,25901}=3,907724$. Finalmente, sostituiti nella formola tutti questi valori e fatto il solito calcolo, ne risulta $L.x=3.3451215$, ed $x=2213,713$ tese, altezza minore della media geometrica di tese 20, 287; laddove il valor costante di $m=0,00005$, come vedremo nella sezion seguente, ne dà 12,631 di più.

Per la progressione armonica già abbiam visto, esser il valore di m lo stesso che per l'aritmetica; onde avremo ancora $m=0,00006454$, ed $\frac{1}{m}=15494,36$. Sostituiti questi valori nella formola del num. 27, ella cangiasi nella seguente

$$x=15494,36\left(-1+\sqrt{(1+L\,1,1934\,C\,L\frac{A}{a})}\right).$$

La somma dei logaritmi di 1, 1934, di C, e di $L\frac{A}{a}$ è 9.4853637; cui corrisponde il numero 0,305748. Sarà dunque $x=15494,36\left(-1+\sqrt{(1,305748)}\right)=15494,36\,(0,1427)=2211,46$ altezza minore della media geometrica di tese 22, 54. Alla fine del num. 27 abbiam trovato, che col valor costante di $m=0,00004666$ risulta un'altezza maggiore della stessa media di tese 15, 44.

Nella solita osservazione del monte Saleve fu $D=2056,91$; $A=196$; $D-A=1860,91$. In oltre le altezze corrette dei barometri furono in sedicesimi di li-

nea $A=5209$; $a=4632$; fu $C=1,0544$; $m=\frac{0,0544}{1860,91}=$ $0,00002923$; $m\,B=0,11731$. Or da questi valori si trae $A^{mB}=2,72867$; $a^{mB}=2,6913197$, e sostituiti tutti questi numeri nella formola $x=\frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB}-a^{mB}}{A^{mB}}\right)$, si trova $Lx=2.6931884$, ed $x=493,3878$. Quest'altezza supera la livellata di tese 5, 61. Ma nella sezion seguente vedremo, che il risultato del calcolo fatto col valor costante di m dà l'altezza di tese 491, 3613, che supera la livellata di tese 3, 58.

Per la progressione armonica avremo ancora $m=0,00002923$, e sostituiti nella formola del num. 27 i valori di m, B, C, e $L\,\frac{A}{a}$, troveremo

$$x=34211,426\left(1+\sqrt{(1+(0,540211))(1,0544)(0,0509858)}\right)=$$

481, 2039 tese. Questo risultato è minore dell'altezza livellata di tese 6, 574; laddove quello del calcolo fatto col valor costante di m, pel num. 27, è maggiore di 3, 792.

Noi possiam dunque conchiudere al fine, che l'ipotesi del sig. Kirwan non è applicabile alle livellazioni barometriche per due terzi dell' anno e per tutti que' casi, ne' quali s' ignora quanto la stazion inferiore sia distante verticalmente dalla superficie del mare; che rende i calcoli assai più complicati e laboriosi; e finalmente che conduce a risultati men conformi alle mi-

sure geometriche ed alle livellazioni che quelli della nostra ipotesi di m costante.

Non voglio terminare la presente sezione senza correggere uno sbaglio, che m' è scorso nella prima parte di questa memoria. Al num. 28 calcolando il valor di c per l' esempio secondo, dopo d' aver trovato $mx = 0,0237966$, ho sottratta questa frazione da 1, 0544 valor di C; nel che mi sono ingannato; poichè per l' ipotesi della progressione armonica l' espressione di c è $\frac{C}{1+mx}$, non $C - mx$. Il vero valor di c è dunque $\frac{1,0544}{1,0237966} = 1,0299$, e non 1, 0306034, come ho detto nel luogo citato. Facciasi questa correzione nel calcolo dell' esempio secondo, e si troverà $L\,\frac{2Cc}{C+c} = 0,0178703$ in luogo di 0, 0180194; ed $x = 491,354$, non 491, 523, ov' è da avvertire, che per un' altra svista alla pagina 407 lin. 14 si è posto 323. Il mio sbaglio non è dunque in questo caso d' alcun momento; poichè la differenza tra i due risultati si riduce a 169 millesimi di tesa o poco più d' un piede. Ma in altri casi la differenza può essere assai maggiore; e quando anche non fosse, lo sbaglio dev' esser corretto. Fatto il calcolo dell' osservazion del Monbianco col vero valor di c, che è 1, 011875, si trova $x = 2247,486$; ma dal valore inesatto 1, 0134 risulta $x = 2254,56$ maggiore di tese 7, 073.

Sezione VI

Dell' ipotesi del calor medio uniforme

38. Benchè le formole dei num. 26 e 27 dian esattamente le altezze corrispondenti alle due ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica e armonica, ed ai valori di B ed m determinati colle osservazioni; esse hanno non per tanto l' inconveniente di condurre a calcoli alquanto laboriosi. Ma se per abbreviarli non cureremo la differenza di qualche frazion di tesa nei risultati, il potrem fare quanto all' ipotesi della progressione armonica col metodo del num. 28, e quanto a quella della progressione aritmetica calcolando in primo luogo il calor conveniente alla stazion superiore; e poi supponendo che il calore della colonna d' aria da misurarsi sia in tutta la lunghezza della detta colonna uniforme, ed uguale al medio aritmetico fra i calori delle due estremità. Or dati i due calori C, c, il lor medio aritmetico è $\frac{C+c}{2}$; e se questo fosse $=1$, cioè se il calor medio corrispondesse alla temperatura del ghiaccio che si scioglie, la formola sarebbe $x = 9240{,}7\, L\, \frac{A}{a}$ esprimendo per A ed a le due altezze corrette dei barometri. Or la colonna d' aria, la cui lunghezza è data da questa formola, si allungherà se $\frac{C+c}{2}$ è maggio-

re dell'unità, si accorcerà se è minore; e l'allungamento o l'accorciamento si determinerà moltiplicandola per $\frac{C+c}{2}$. Ciò posto, ognun vede che la formola diverrà

$$x = 9240,7 \left(\frac{C+c}{2}\right) L \frac{A}{a}.$$

Facciamone l'applicazione ai soliti esempj dei monti Saleve e Bianco. Pel monte Saleve moltiplico la differenza logaritmica 510 per 0,00005, e sottraggo il prodotto 0,0255 da 1,0544 calore della stazion inferiore, e n' ho il valor di c uguale ad 1,0289. Sarà dunque $\frac{C+c}{2} = 1,04165$ e $L\,\frac{C+c}{2} = 0.0177010$. Con questi dati fassi il calcolo seguente

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 8.7074492$$

$$L\left(\frac{C+c}{2}\right) = 0.0177010$$

$$L\,coeff = 3.9657049$$

$$L\,x = 2.6908551$$

$$x = 490,744.$$

Pel Monbianco la differenza logaritmica è 2288; il calor $C = 1,1198$; e quindi $c = 1,1198 - (2288)(0,00005) = 1,0054$; e $\frac{C+c}{2} = 1,0626$. In questo caso abbiam dunque

$$\begin{array}{r} 9\ .\ 3594372 \\ 0\ .\ 0263698 \\ 3\ .\ 9657049 \\ \hline L\,x = 3\ .\ 3515119 \\ x = 2246\ ,\ 529 \end{array}$$

Nell'osservazion dell'Etna le altezze corrette dei barometri furono in sedicesimi di linea $A = 5394$, $a = 3631$; la differenza logaritmica $= 1719$; $T = 18,5$; e $C = 1,0981$. Fu dunque $c = 1,0981 - (1719)(0,00005) = 1,01215$; e $\frac{C+c}{2} = 1,05512$. Ciò posto, si ha col solito calcolo

$$\begin{array}{r} 9\ .\ 2352372 \\ 0\ .\ 0233018 \\ 3\ .\ 9657049 \\ \hline L\,x = 3\ .\ 2242439 \\ x = 1675\ ,\ 883 \end{array}$$

Per trovar la differenza tra questi risultati e quei della formola del calor decrescente in progressione aritmetica

$$x = 20000\,C\left(\frac{A^{0,20066} - a^{0,20066}}{A^{0,20066}}\right)$$

si facciano i calcoli coll' esponente intero $0,20066$; e si troverà pel monte Saleve $A^{0,20066} = 5,568$

$a^{0,20066} = 5,4382027$,

e la differenza loro = o , 1297973. Ciò posto, faremo il calcolo seguente

$$L\ differ. = 9\ .\ 1130649$$

$$Compl.\ L\ A^{o\ ,\ 20066} = 9\ .\ 2543009$$

$$L\ 10000\ C = 4\ .\ 0230054$$

$$L\ 2 = 0\ .\ 3010300$$

$$L\ x = 2\ .\ 6914012$$

$$x = 491\ ,\ 3616$$

La differenza tra i due risultati è dunque di tese 0,6176, o alquanto più di mezza tesa.

Per l' osservazion del Monbianco è

$$A^{o\ ,\ 20066} = 3\ ,\ 195095$$

$$a^{o\ ,\ 20066} = 2\ ,\ 8745825$$

e la differenza = o , 3205125

In questo caso il calcolo è dunque

$$9\ .\ 5058450$$

$$9\ .\ 4955162$$

$$4\ .\ 0491405$$

$$0\ .\ 3010300$$

$$L\ x = 3\ .\ 3515317$$

$$x = 2246\ ,\ 631$$

Questo risultato supera l' altro di poco più d' un decimo di tesa

Nell' osservazion dell' Etna finalmente si ebbe

$$A^{0,20066} = 5,6085$$

$$a^{0,20066} = 5,1803,$$

e la differenza $= 0,4282$

Ciò posto, abbiamo

$$\begin{array}{r} 9.6316467 \\ 9.2511547 \\ 4.0406419 \\ 0.3010300 \\ \hline \end{array}$$

$$L x = 3.2244783$$

$$x = 1676,773$$

Questo risultato è maggior dell' altro di tese 0,89; cioè di quasi 9 decimi d' una tesa.

39. La formola generale del calor medio uniforme è $x = Bl\,10\left(\frac{C+c}{2}\right) L\frac{A}{a}$; la quale, nella presente ipotesi di $c = C - 10000\,(0,00005)\,L\frac{A}{a}$ si riduce ad $x = Bl\,10\left(C - \frac{1}{4}L\frac{A}{a}\right)L\frac{A}{a}$. Or questa formola si cangia in $x = 10000\,L\frac{A}{a}$, se $C - \frac{1}{4}L\frac{A}{a}$ è $= \frac{10000}{Bl\,10}$. Ogni volta adunque che questa condizion si verifichi, sarà $x = 10000\,L\frac{A}{a}$, vale a dire, che la differenza logaritmica moltipli-

cata per diecimila darà immediatamente l'altezza in tese. Nella mia formola $B\,l\,10$ è $=9240,7$; onde segue, che $\frac{10000}{B\,l\,10}$ è $=1,082169$. Ora, se per esempio nell'osservazion dell'Etna essendo $A=5394$ fosse stato $a=3667$; $T=23°,416$, e per conseguente $C=1,1240661$, si sarebbe trovato $C-\frac{1}{4}\,L\,\frac{A}{a}=1,082169$, qual è appunto il valore di $\frac{10000}{B\,l\,10}$. In questo caso sarebbe dunque $x=10000\,L\,\frac{5394}{3667}=1675,883$; che è l'altezza medesima trovata di sopra.

Il De Luc, ed i due Fisici inglesi, che han seguito il suo esempio, han date alcune formole, le quali, come vedremo parlando dei metodi comunemente chiamati indiretti, posson ridursi alla seguente, che tutte le abbraccia.

$$(\mathrm{F})\quad x=10000\left(1+\frac{T+t-2\,T'}{2\,n}\right)L\,\frac{A}{a}\,.$$

In questa T e t esprimon le temperature attualmente osservate alle due stazioni; A ed a le altezze corrette dei barometri; in fine T' ed n son numeri costanti, che ciascuno dei Fisici anzidetti ha determinati colle proprie osservazioni.

Quando la temperatura media $\frac{T+t}{2}$ è $=0$, la formola

si cangia in $x = 10000 \left(\frac{n - T'}{n}\right) L \frac{A}{a}$; ed è propria della temperatura del ghiaccio, che si scioglie.

Sia ora $\frac{T + t}{2} = T'$, e si chiami E l'espansion dell'aria corrispondente a questa temperatura. Ciò posto, il valor d' x dell' ultima formola dovrà esser moltiplicato per $1 + E$ quando si voglia trasportarla alla temperatura T'; e ne verrà $x = 10000 \left(\frac{n - T'}{n}\right)(1 + E) L \frac{A}{a}$. Ma quando è $\frac{T + t}{2} = T'$, la formola primitiva F si cangia in $x = 10000\, L \frac{A}{a}$. Sarà dunque $10000 \left(\frac{n - T'}{n}\right)(1 + E) = 10000$, o sia $\left(\frac{n - T'}{n}\right)(1 + E) = 1$; e per conseguenza $1 + E = \frac{n}{n - T'}$. L' espansione E è dunque $= \frac{n}{n - T'} - 1 = \frac{T'}{n - T'}$. E quindi, se si suppone uniforme, essa fia per ogni grado $= \frac{T'}{T'(n - T')} = \frac{1}{n - T'}$.

La formola generale per qualunque temperatura media uniforme $\frac{T + t}{2}$ sarà dunque della forma seguente

$$(\text{F}')\quad x = 10000 \left(\frac{n - T'}{n}\right)\left(1 + \frac{T + t}{2(n - T')}\right) L \frac{A}{a}.$$

Secondo il sig. De Luc n è $=215$, e $T'=16°,75$. Si sostituiscan questi numeri, e si troverà $\frac{n-T'}{n}=\frac{198,25}{215}=$ $9220,93$; $\frac{1}{n-T'}=\frac{1}{198,25}=0,0050441$; e la formola diverrà $x=9220,93\left(1+(0,0050441)\frac{T+t}{2}\right)L\frac{A}{a}$.

Al num. 16 abbiam trovato, che le osservazioni del De Luc danno l' espansion uniforme per ogni grado $=0,0050435$; ma si avverta, aver noi allora supposto per semplicità maggiore, che $1-\frac{16,75}{215}$ sia $=0,9221$ in luogo di $0,922093$, ch' è il vero valore della frazione.

Per facilitare i calcoli, la formola precedente può ridursi senza verun sensibil errore a quest' altra forma $x=9221\left(1+(0,005)\frac{T+t}{2}\right)L\frac{A}{a}$. Or, se in questa cangeremo le tese in metri, ognun de' quali corrisponde a tese 0,513074 (Laplace. Esposizione del sistema del mondo; seconda edizione; pag. 72) ed ai gradi della solita scala del termometro sostituirem quelli della scala centenaria, ne avremo per risultato $x=17972,058\left(1+\frac{4}{5}(0,005)\frac{T+t}{2}\right)L\frac{A}{a}$; cioè quella formola appunto, che il sig. Laplace descrive al principio del capo XIV, libro I dell' opera pur or menzionata, colla sola differen-

za di o, 1 in luogo di o, 058. Io credo adunque, che questo gran matematico, non avendo osservazioni proprie per determinar il coefficiente della formola generale $x = D\,A'\,l.\ 10\,(1 + (\frac{T+t}{2})\,E)\,L\,\frac{A}{a}$, e credendo, che la regola del De Luc desse le altezze molto vicine alle vere, l'abbia primieramente trasportata dalla temperatura 16°, 75 a quella del ghiaccio, che si scioglie, e poi vi abbia fatti i cangiamenti posti quì sopra per adattarla alle nuove misure francesi. Resta a vedersi per qual ragione alla pag. 81 della stess'opera egli dica quanto segue " alla temperatura del ghiaccio, che si „ scioglie, ed all' altezza media del barometro al livel- „ lo del mare, altezza ch' è presso a poco di 76 centi- „ metri, il peso dell'aria è a quello d' un egual volu- „ me di mercurio nel rapporto dell'unità a 10283." Ma la detta ragione si troverà agevolmente, osservando che questo rapporto è un'immediata conseguenza dell' equazione $D\,A'\,l\ 10 = 17972,1$; poichè ponendo in questa A' eguale non esattamente a 76 centimetri, ma a 759 millimetri, ne risulta $D = \frac{17972,1}{0,759\,l\,10} = 10283$.

Il sig. Ramond ha accresciuto il coefficiente 17972, 1 portandolo a 18393; e l'autor della formola ha approvato il cangiamento. Questo a parer mio fu fatto dal Ramond per la ragion seguente. Egli dice, esser opinion generale dei Fisici, che la regola del De Luc dà le altezze minori delle vere di un quarantatreesimo. Non è dunque da maravigliarsi, ch' egli abbia in questa proporzione accresciuto il coefficiente 17972, 1; il che lo por-

ta a 18390. E per farlo più esattamente corrispondere alle osservazioni, ch'egli medesimo ha fatte ne' Pirenei, lo ha ancora accresciuto di tre unità.

Ma si avverta, che il coefficiente così accresciuto cangia il rapporto dei pesi specifici dell'aria e del mercurio, posto quì sopra, e lo riduce a quello di 1 : 10519, 49 in vece di 1 : 10283. Ben si vede per ciò, che se il Laplace avesse stabilito il suo rapporto sopra qualche esatto sperimento, egli non avrebbe potuto approvare il nuovo coefficiente del Ramond, che lo cambia sensibilmente.

La formola F' si cangia in $x = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$

sostituendo $B\,l\,10$ a $10000(\frac{n-T'}{n})$ e $\frac{C+c}{2}$ a $\frac{T+t}{2(n-T')}$.

Per le osservazioni dei tre Fisici accennati la formola del calor medio uniforme $x = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$ può dunque applicarsi a que' casi eziandio, ne' quali $\frac{C+c}{2}$ è il calor medio aritmetico fra quelli, che alle due stazioni si sono attualmente osservati.

40. Vediam ora se questa formola s' accordi esattamente coll'ipotesi del calore aritmeticamente diminuito dal basso all' alto. Per siffatta ipotesi deggion verificarsi queste due equazioni

I^{a} $c = C - m\,x$

II^{a} $x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - a^{mB}}{A^{mB}}\right)$

Per la prima abbiamo $m = \frac{C-c}{x}$; e questo valor di m sostituito nella seconda la riduce ad $x = \frac{Cx}{C-c}\left(\frac{A^{mB} - a^{mB}}{A^{mB}}\right)$, o sia $\frac{C-c}{C} = 1 - \frac{a^{mB}}{A^{mB}}$ equivalente a $\frac{c}{C} = \frac{a^{mB}}{A^{mB}}$, ovvero $\frac{C}{c} = \frac{A^{mB}}{a^{mB}}$. Ciò posto, prendo i logaritmi, e n' ho $LC - Lc = mBL\frac{A}{a} = (\frac{C-c}{x})\, BL\frac{A}{a}$. Sarà dunque $x = \frac{B(C-c)}{LC-Lc}\, L\frac{A}{a}$. Ma per l'ipotesi del calor medio uniforme è $x = Bl\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$. Affinchè le due formole diano il medesimo risultato deve adunque essere $\frac{(C-c)B}{LC-Lc} = \frac{Bl\,10\,(C+c)}{2}$, ossia $\frac{2(C-c)}{C+c} = l\,10\,(LC - Lc)$. Or ciò vuol dire, che la formola del calor uniforme non può esser perfettamente d'accordo con quella del calor decrescente in progressione aritmetica, se non si verifica la seguente condizione: *che la differenza dei logaritmi neperiani dei calori C, c sia eguale al doppio della differenza dei calori medesimi divisa per la lor somma.*

Questa condizione per verità non potrà mai nelle livellazioni barometriche perfettamente verificarsi; ma in esse la differenza tra le due quantità, che dovrebber esser uguali, non giungerà mai a due diecimillesime; e

quindi anche per altezze assai grandi la massima differenza fra i risultati delle due formole sarà di poche tese.

Suppongasi $T = 25°$, $t = 23°$; e per conseguente

$C = 1,1323$; $c = 1,1219$; e sarà $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,0092272$,

o $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,0092274$. La differenza sarà dunque di due soli diecimilionesimi; ed in qualunque livellazione fatta a queste due temperature niuna sensibil differenza potrà aver luogo tra i due risultati.

Ma supposto $T = 15°$, $t = -5°$; il che potrà avvenire a distanze verticali di circa 2000 tese, sarà $C = 1,0791$; $c = 0,9755$; onde avremo $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,1008463$,

e $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,1009324$. Qui dunque la differenza è 0,0000856 minore di un diecimillesimo, quantunque sia una delle grandi. Ma questa così picciola differenza potrà influire alcun poco su quella dei risultati delle due formole, e farla salire ad una o due tese.

Finalmente dalla supposizione di $T = 25°$, $t = 0$ trarremo $C = 1,1323$, e $c = 1$. Or da questi dati risulta $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,12409135$, e $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,12425326$; cosicchè la differenza, ch' è una delle massime per le temperature delle livellazioni barometriche, è $= 0,00016191$, e non giugne per conseguenza a due diecimillesime.

Calcoliam ora due osservazioni, che supporrò fatte alle temperature de' primi due casi precedenti. Sia nel-

la prima $A = 28$ pollici; $a = 26,813$; $C = 1,1323$; $c = 1,1219$. Con questi dati avremo per la formola del calor uniforme

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 8\ .\ 2744412$$

$$L\frac{(C+c)}{2} = 0\ .\ 0519624$$

$$L\ coeff = 3\ .\ 9657049$$

$$L\ x = 2\ .\ 2921085$$

$$x = 195\ ,\ 93341\ .$$

Per l' ipotesi del calor variabile aritmeticamente abbiam trovato quì sopra esser $x = \frac{B(C-c)}{LC - Lc} L\frac{A}{a}$; e per conseguente $Lx = LB + L(C-c) + L\frac{A}{a} - L\frac{C}{c}$. Sostituisco i valori di B, A, a, C, c; e ne ho

$$L\ B = 3\ .\ 6034908$$

$$L(C-c) = 8\ .\ 0170333$$

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 8\ .\ 2744412$$

$$\text{Somma} = 9\ .\ 8949653$$

$$-L\frac{C}{c} = -\ 7\ .\ 6028627$$

$$L\ x = 2\ .\ 2921026$$

$$x = 195\ ,\ 93076$$

La differenza tra i due risultati è dunque di tese 0 , 00265, vale a dire che non arriva ad un quinto di pollice.

Nella seconda osservazione suppongo $A = 28$ pollici; $a = 17 , 238$; $C = 1 , 0791$; $c = 0 , 9755$. Ciò posto, avrò il seguente calcolo per la formola del calor uniforme

$$\begin{array}{r} 9 \; . \; 3236070 \\ 0 \; . \; 0116973 \\ 3 \; . \; 9657049 \\ \hline L\,x = 3 \; . \; 3010092 \\ x = 1999 \; , \; 904 \end{array}$$

Ma per la formola del calore aritmeticamente diminuito avrò calcolando come nel primo caso

$$\begin{array}{r} 3 \; . \; 6034908 \\ 9 \; . \; 0153598 \\ 9 \; . \; 3236070 \\ \hline 1 \; . \; 9424576 \\ -\; 8 \; . \; 6418151 \\ \hline L\,x = 3 \; . \; 3006425 \\ x = 1998 \; , \; 216 \end{array}$$

Qui la differenza dei due risultati è di tese 1 , 688, o alquanto più d' una tesa e due terzi.

Finora ho supposte variabili le espansioni dell' aria, e quali son nella tavola posta in fine della prima

parte. Ma nella supposizione, che sieno uniformi, chiamata E l'espansione per ogni grado, sarà $C = 1 + ET$, e $c = 1 + Et$. Ciò posto, l'equazion di condizione $\frac{2(C-c)}{C+c} = l\ 10\ L\frac{C}{c}$ si cangerà in $\frac{2E(T-t)}{2+E(T+t)} = l\ 10$ $L\left(\frac{1+ET}{1+Et}\right)$

41. Il De Luc parlando delle supposizioni, ch' egli avea fatte per istabilir la sua formola, così si esprime nei numeri 657, 658 delle Ricerche sulle modificazioni dell' atmosfera. " Rari sono i casi, ne' quali ragionevol-
„ mente si possa credere, che il calore indicato dal ter-
„ mometro esposto all' aria libera nella stazion superio-
„ re sia uguale al calore dell' aria posta all' altezza me-
„ desima sopra la stazione inferiore. Questa è però una
„ delle condizioni necessarie per l'esattezza; poichè l'os-
„ servazion del termometro superiore ha da concorrere
„ a determinare il calor medio della colonna d' aria, che
„ dalla stazion inferiore s' innalza verticalmente fino
„ all' altezza, che corrisponde orizzontalmente alla supe-
„ riore.

„ Ma supposto ancora, che per le osservazioni del
„ termometro fatte alle due stazioni sia noto esatta-
„ mente il grado di calore delle estremità della colon-
„ na aerea da misurarsi, resta a sapere se la diminu-
„ zion del calore dal basso all' alto sia in progressione
„ aritmetica *come io per maggior facilità ho supposto*
„ *nel calcolo*. „

Da quest' ultime parole chiaramente apparisce, avere il De Luc creduto, che la sua formola, essendo

calcolata pel calor medio uniforme, supponga la diminuzion del calore in progressione aritmetica. Nè in questo si può dire, ch'e' siasi ingannato; poichè i casi, in cui le due ipotesi del calor medio uniforme e del variabile in progressione aritmetica conducono ad una sensibil differenza nelle altezze calcolate, non si trovano in alcuna delle sue molte osservazioni; ed in generale son d'un'estrema rarità. Anzi anche in questi la differenza si riduce ad una o due tese per le massime altezze, che col barometro si posson misurare. Ma non può dirsi neppure, che la sua supposizione sia vera in tutto il rigor geometrico; poichè la precedente equazion di condizione non può verificarsi con una perfetta esattezza se non è $T = t$, nel qual caso il calor è costante in tutta l'altezza da misurarsi; ed è per conseguenza esclusa ogni diminuzion di calore.

Anche il celebre Lagrange ha dimostrato nelle memorie dell' accademia di Berlino del 1772 (pagine 264, 265) che la supposizione del sig. De Luc non si verifica fuorchè per approssimazione. Egli chiama a l'altezza d'una data stazione sopra il livello del mare, x quella di qualunque altra stazione più alta sopra lo stesso livello, e il numero dei gradi del termometro di Réaumur sopra o sotto 16°, 75 alla stazion inferiore, t il numero variabile degli stessi gradi sopra o sotto 16°, 75 nel termometro dell' altezza variabile x; e con un facile ma ingegnoso calcolo dimostra, che la regola del Fisico Ginevrino conduce alla seguente equazione

$$x - a = k\,(t - c)\left(1 + \frac{c + t}{2\,.\,215}\right),$$

nella quale k è una costante corrispondetne alla condizione, che t divenga c quando è $x = a$. Ora egli osserva, che questa condizione fa per se sola verificar l' equazione quando si vuole determinar la costante, poichè allora così $x - a$ come $t - c$ sono $= 0$. E da quest' osservazione ei conchiude esser chiaro, che la costante rimane arbitraria. Finalmente egli aggiunge: „ se in paragone dell' unità si negligenta il termine

„ $\frac{c + t}{2 . 215}$, si ha $t - c = \frac{x - a}{k}$, vale a dire che le dif-

„ ferenze di calore son proporzionali alle differenze „ d' altezza; talchè, prendendo le altezze in progressio- „ ne aritmetica, anche i gradi di calore il saranno; ma „ si vede per la nostra formola, che questa legge, la „ qual è pur quella del sig. De Luc, non è vera che „ per approssimazione. „

La conchiusione è esatta e simile a quella, che anch' io ho dedotta dalla mia equazion di condizione; ma questa parmi, che abbia in oltre il vantaggio d' indicar presso a poco quanta possa esser la differenza fra i risultati delle due ipotesi del calore o medio e uniforme o variabile su tutta l' altezza in progressione aritmetica. Nell' osservazion del Monbianco per esempio fu $T = 22°, 6$; $t = - 2°, 3$; ed applicando a questa la regola del De Luc, dee porsi $E = 0 , 0050441$. Ora da

questi dati risulta $\frac{2 (T - t) E}{2 + (T + t) E} = 0 , 11948090$; e l 10

$L \frac{1 + T E}{1 + t E} = 0 , 11962102$. Dall' equazion di condizio-

ne nasce dunque una differenza alquanto maggiore di 14 centomillesime, la qual indica, che tra i risultati delle due ipotesi troverassi una differenza di circa due tese.

Per chiarircene calcoliamo l' altezza colla formola del De Luc, che suppone il calor medio uniforme; ed è pel num. 39

$$x = 9220,93\left(1 + (0,0050441)\frac{T+t}{2}\right) L\frac{A}{a}.$$

Nell' osservazione fu $A = 326,68$ lin; $a = 192,9$; e dai valori di T, t, E si raccoglie esser $\frac{(T+t)}{2}E = 0,0511576$. Col solito calcolo avrem dunque

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 9\,.\,3594372$$

$$L(1,0511976) = 0\,.\,0216843$$

$$L\ coeff. = 3\,.\,9647747$$

$$L\,x = 3\,.\,3458962$$

$$x = 2217,666.$$

Si faccia il calcolo anche colla formola

$$x = \frac{B(T-t)E\,L\frac{A}{a}}{L(1+TE) - L(1+tE)}$$

e si troverà

$$L\,B = 3\ .\ 6034908$$

$$L\,(T-t)\,E = 9\ .\ 0989830$$

$$L\,(\,L\,\frac{A}{a}\,) = 9\ .\ 3594372$$

$$\text{Somma} = 2\ .\ 0619110$$

$$-L\,\frac{1+T\,E}{1+t\,E} = -\ 8\ .\ 7156018$$

$$L\,x = 3\ .\ 3463092$$

$$x = 2219\ ,\ 776$$

La differenza tra i risultati delle due formole è dunque di tese 2, 11 qual presso a poco la fa prevedere l' equazion di condizione.

42. Fin qui ho parlato del calor decrescente in progressione aritmetica: dirò ora alcuna cosa anche intorno all'ipotesi della diminuzion del calore in progressione armonica. La formola del num. 27 corrispondente a quest' ipotesi è

$$(\mathrm{F})\quad x = \frac{-1+\sqrt{(1+2\,B\,C\,m\,l\,10\,L\,\frac{A}{a})}}{m}$$

e questa equivale perfettamente ad

$$(\mathrm{F}')\quad x = (\frac{2\,C\,c}{C+c})\,B\,l\,10\,L\,\frac{A}{a}$$

cioè ad una formola, che suppone il calor uniforme, e medio armonico fra quelli delle due stazioni. Imperocchè, pel calor decrescente in progressione armoni-

ca è $c = \frac{C}{1 + m x}$, ed $m = \frac{C - c}{c x}$. Or, sostituito questo valor di m nella formola F, risulta

$$x = \frac{c x}{C - c}\left(-1 + \sqrt{\left(1 + 2 B C \left(\frac{C - c}{c x}\right) l\, 10\, L \frac{A}{a}\right)}\right);$$ ossia

$$\frac{C - c}{c} = -1 + \sqrt{\left(1 + 2 B C \left(\frac{C - c}{c x}\right) l\, 10\, L \frac{A}{a}\right)},$$ o

$$\frac{C}{c} = \sqrt{\left(1 + 2 B C \left(\frac{C - c}{c x}\right) l\, 10\, L \frac{A}{a}\right)},$$ e quadrando,

$$\frac{C^2}{c^2} = 1 + 2 B C \left(\frac{C - c}{c x}\right) l\, 10\, L \frac{A}{a}.$$ Sarà dunque

$$\left(\frac{C^2 - c^2}{c^2}\right)\left(\frac{c x}{C - c}\right) = 2 B C\, l\, 10\, L \frac{A}{a};$$ ovvero

$$\left(\frac{C + c}{c}\right) x = 2\, \mathrm{B} C\, l\, 10\, L \frac{A}{a};$$ e finalmente

$$x = \left(\frac{2 C c}{C + c}\right) \mathrm{B}\, l\, 10\, L \frac{A}{a}.$$

Quello che per la progressione aritmetica è vero soltanto per approssimazione, si verifica dunque esattamente per la progressione armonica; e quindi, volendo far uso dei calori osservati alle due stazioni, il calcolo delle altezze fatto colla formola F' del calor medio armonico ed uniforme sarà assai più semplice; ma non però meno esatto di quello della formola F corrispondente al calor variabile in tutta l'altezza da misurarsi.

Sezione VII

Della misura delle profondità sotterranee.

43. Nelle profondità sotterranee convien distinguer quelle, in cui l'aria esterna non può circolare, da quelle, in cui circola più o men liberamente. Della prima specie son alcune cantine, come quelle dell'osservatorio di Parigi, ed alcuni pozzi scavati ad una gran profondità per trovar acque o miniere, ma poi per l'inutilità loro abbandonati, come quello che chiamasi *il buco di Bouillet* non guari distante dalla foce del Rodano nel Lago Lemano o di Ginevra. Nel fondo delle cantine dell' osservatorio la temperatura è costantemente di gradi 9, 6, come si può vedere nelle Ricerche del De Luc sulle modificazioni dell' atmosfera num. 441 x. La temperatura costante comincerà probabilmente ad una minor profondità; anzi questa profondità medesima varierà alquanto per le variazioni del calore nell'aria esterna: ma io non so, che intorno a questo siesi fatta veruna osservazione. In questa incertezza non è chi non vegga esser impossibile il misurare le varie profondità di quelle cantine colle formole barometriche, le quali suppongon tutte il calor dell' aria o uniforme o con una certa legge variabile nell' intera colonna d'aria, che si vuol misurare.

Sia P la profondità d'un sotterraneo, alla quale il calore sia costantemente $= C$; p la profondità, alla qual comincia il calor costante; A l' altezza del barometro ad una profondità x minor di P e maggior di

p; a l' altezza del barometro all' ingresso del sotterraneo; e suppongasi che il calor c dell' aria esterna sia minor di C. Per determinare il valor d' x cerco in primo luogo qual altezza avrebbe un barometro trasportato nel sotterraneo alla profondità p. Chiamo y la detta altezza; e per la formola del calor medio uniforme posta nella precedente sezione mi risulta

$p = 9240,7\left(\frac{C+c}{2}\right) L\frac{y}{a}$; dalla quale traggo $Ly =$

$\frac{2p}{9240,7(C+c)} + La$. Se p fosse una quantità nota, si

troverebbe il numero corrispondente a questo logaritmo; e potrebbe chiamarsi a'. Alla profondità x ho supposta A l' altezza del barometro, ed ho chiamato C il calore uniforme in tutta l' altezza $x = p$. Sarà dun-

que $x - p = (9240,7)CL\frac{A}{a'}$, ed $x = (9240,7)CL\frac{A}{a'} + p$.

Or quest' equazione dimostra chiaramente, che il valor d' x dipende da quello di p: onde segue non potersi determinare la profondità x, se non è nota quella, a cui comincia il calor costante.

Ma le temperature dell' interno della terra van probabilmente diminuendo col crescer delle profondità fino ad un certo limite prima di farsi costanti; lo che apertamente si deduce dalle osservazioni del sig. de Saussure sulle temperature del fondo dei laghi, ch' ei dice aver sempre trovate molto inferiori a quella di 10 gradi, e poco distanti da 4°. Ed io in alcune di quelle cantine de' nostri monti, che volgarmente si chiaman

crotti; e nelle quali dall' interior del monte, ove sono scavate, entra per uno o più spiragli una corrente d'aria fredda, mi ricordo d'aver osservato, che il termometro presso lo spiraglio era alla temperatura di due o tre gradi nel tempo stesso, che fuor dell'uscio della cantina era a più di venti gradi. Come potremmo noi dunque misurar col barometro le profondità, in cui l'aria esterna non circola senza saper la legge, giusta la quale col crescer delle profondità le temperature si vanno abbassando? Si avverta in oltre, che a tanta incertezza un'altra se n'aggiugne assai maggiore; cioè che questa diminuzion medesima non sempre ha luogo; poichè in alcuni sotterranei il calor cresce discendendo in vece di diminuire. Nel buco di Bouillet per esempio, che dianzi ho citato, profondo di 677 piedi e 3 pollici, Saussure trovò la temperatura del fondo di 13°, 9; la qual supera di 4°, 3 quella delle cantine dell' osservatorio di Parigi, sebben la profondità loro sia di circa 100 piedi e per conseguente minore d'assai. Ma; per le osservazioni dello stesso Fisico, in una galleria superiore, e distante 113 piedi, 3 pollici dal fondo del pozzo la temperatura fu di 12°, 5; ed in un'altra più alta ancora, cioè di 232 piedi sopra il fondo, si ridusse ad 11°, 5. Il dotto capitano Wild, come dice Saussure, crede questo calore puramente locale e prodotto dallo zolfo e dalle piriti in quelle montagne abbondanti.

44. Ma nelle profondità accessibili delle mine metalliche, di carbon fossile, di sale o d'acque salse l'aria esterna circola sempre con qualche libertà o naturalmente o per arte; e quindi alle colonne aeree da misurarsi nell'altezza loro, possono, come all'aria ester-

na, applicarsi le ipotesi del calor variabile in progressione aritmetica o armonica. Si avverta però, che nei luoghi sotterranei la temperatura non cala sempre dal basso all'alto; ma che in estate è ordinariamente maggiore al loro ingresso che al fondo. Or, quando il calor cresce dal basso all' alto, il valor di c è $C + mx$ per la progressione aritmetica, e $\frac{C}{1 - mx}$ per l' armonica. Ciò posto, l' equazion differenziale per la progressione aritmetica è $\frac{dx}{C + mx} = -\frac{Bdy}{y}$; la qual integrata coll'aggiungimento della costante vien ad essere $l\,(C + mx) = mBl\,\frac{A}{y} + l\,C$. Finalmente, passando dai logaritmi alle quantità semplici, sarà $C + mx = C\frac{A^{mB}}{y^{mB}}$; e per conseguenza $x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - y^{mB}}{y^{mB}}\right)$. Osservo ora, che in questo caso è $c = C + mx$; e quindi $C = c - mx$. Sostituisco adunque nella formola $c - mx$ a C; e mi viene $x = (\frac{c - mx}{m})\left(\frac{A^{mB}}{y^{mB}} - 1\right)$; onde traggo $mx = c\,(\frac{A}{y})^{mB} - c - mx\,(\frac{A}{y})^{mB} + mx$, e fatte le convenienti riduzioni, $x = \frac{c}{m}\left(\frac{A^{mB} - y^{mB}}{A^{mB}}\right)$, cioè la formola stessa, che si trova

pel calore aritmeticamente diminuito dal basso all' alto col solo cangiamento di C in c.

E similmente per la progressione armonica avremo

$$\frac{\frac{d x}{C}}{1 - m x} = - \frac{B d y}{y}$$, ed integrando, $x - \frac{m x^2}{2} = - B C$ $l y + Cost.$ La costante è $= B C l A$; onde nasce l' equazion completa $x - \frac{m x^2}{2} = B C l \frac{A}{y} = B C l\, 10\, L \frac{A}{y}$ sostituendo i logaritmi tavolari a quei di Nepero.

A questa formola si potrà col metodo del num. 28 sostituirne un'altra più semplice; poichè, essendo nella presente ipotesi $c = \frac{C}{1 - m x}$, sarà $m x = \frac{c - C}{c}$ ed $m x^2 = (\frac{c - C}{c})\, x$; il qual valore, sostituito nella formola precedente, la cangia in $(\frac{c + C}{2 c})\, x = \ldots B C l\, 10\, L \frac{A}{y}$ ed al fine in $x = \frac{2 C c}{C + c} B l\, 10\, L \frac{A}{y}$, cioè in quella medesima, che abbiam trovato al num. 28.

45. Il sig. De Luc ha fatte varie osservazioni nelle miniere dell' Hartz, ad alcune delle quali applicherò le mie formole, cominciando dai casi ne' quali il calore fu decrescente dal basso all' alto. La prima osservazione sarà quella del fondo del pozzo della mina Dorotea; la cui profondità per le misure geometriche è

di tese 169, 53. In essa le altezze dei barometri ridotti alla stessa temperatura furono in sedicesimi di linea $A=5260$; $a=5053$, e per conseguente $L\frac{A}{a}=0.0174364$; $T=10,2985$, e $t=7,2922$. Qui il calor sotterraneo è maggior dell' esterno, e supposta la diminuzione in progressione aritmetica, dev'esser $c=C-10000\,m\,L\frac{A}{a}$. Sostituisco i valori di $C=1,0533$; $m=0,00005$, e $L\frac{A}{a}=0.0174364$; e trovo $c=1,0448$. Calcolo l' altezza colla formola del calor medio uniforme $x=9240{,}7\left(\frac{C+c}{2}\right)L\frac{A}{a}$; sostituisco in questa i numeri precedenti; e mi viene

$$L\left(L\frac{A}{a}\right)=8\,.\,2414569$$

$$L\frac{C+c}{2}=0\,.\,0210031$$

$$L\ coeff.=3\,.\,9657049$$

$$L\,x=2\,.\,2281649$$

$$x=169\,,\,1829$$

L' altezza calcolata è dunque minore della geometrica; ma la differenza non giugne a 35 centesimi di tesa o poco più di due piedi.

Al fondo del pozzo della miniera detta Carolina,

profondo di tese 171, 12 fu $A=5261$; $a=5053$; $L\frac{A}{a}=$ 0.017519; $T=12^\circ, 019$; $C=1, 0626$; e $c=C-\frac{1}{2}$ $L\frac{A}{a}=1, 0626-0, 0087595=1, 05384$. Calcolando come sopra con questi dati si trova $Lx=2.2337820$, ed $x=171, 31$, altezza che supera la geometrica di 19 centesimi di tesa o poco più di un piede.

Se calcoleremo le stesse osservazioni colla formola primitiva $x=20000\,C\left(\frac{A^{0,20066}-a^{0,20066}}{A^{0,20066}}\right)$ troveremo per la prima $x=169, 03$ minor di tre piedi dell' altezza geometrica; e per la seconda $x=170, 8192$ altezza minore della geometrica di 3 decimi di tesa o alquanto men di due piedi.

Nella galleria Giorgio fu $A=5265$; $a=5112$; $T=9^\circ, 44$; e $t=14^\circ, 06$. Qui il calore è crescente dal basso all' alto; onde posso far il calcolo colla formola

$$x=20000\ c\left(\frac{A^{0,20066}-a^{0,20066}}{A^{0,20066}}\right).$$

I dati sono $c=1,0738$; $A^{0,20066}=5,581305$; $a^{0,20066}=5,548376$; e da questi risulta $Lx=2.1027961$; $x=126, 7057$. L' altezza geometrica dà 125, 8076 minore della calcolata di tese 0, 8981, o alquanto più di piedi $5\frac{1}{3}$.

Finalmente nella galleria undecima delle stesse mine fu $A=5372$; $a=5112$; $T=13^\circ\frac{1}{3}$; e $t=13^\circ\frac{5}{6}$. Qui la temperatura inferiore è minore d' un mezzo gra-

do della superiore; onde segue, che il calcolo si può fare come nel caso precedente. Il risultato è $L x =$ 2 . 3281982; $x = 212, 91$, altezza che supera di piedi 5 $\frac{1}{3}$ la misura geometrica, la quale è di tese 212, 02.

Nell' ipotesi del calor variabile in progressione armonica il valor di c è $\frac{C}{1 + m x}$ per le due prime osservazioni, e $\frac{C}{1 - m x}$ per le altre due. Nella prima osservazione è dunque $c = \frac{1,0533}{(1 + 0,00004666)\, 174,364} = \frac{1,0533}{1,0081358} = 1,0448$. Ciò posto, se faremo il calcolo colla formola $x = 9240,7 \left(\frac{2 C c}{C + c}\right) L \frac{A}{a}$, avremo

$$L \frac{2 C c}{C + c} = 0 . 0207890$$

$$L \left(L \frac{A}{a}\right) = 8 . 2414569$$

$$L \; coeff. = 3 . 9657049$$

$$L x = 2 . 2279508$$

$$x = 169 , 0249 .$$

Qui l' altezza calcolata è minor della geometrica di tre piedi e alquanto più d' un terzo di pollice.

Calcolando nello stesso modo la seconda osservazione, si trova $L x = 2 . 2334658$, ed $x = 171 , 18$ al-

tezza che supera la geometrica non più che di sei centesimi di tesa, o sia poco più di quattro pollici.

Nella terza osservazione, dovendo esser $c = \frac{C}{1 - mx}$, sarà $C = c - c\,m\,x = 1{,}0738 - (0{,}00004666)(1{,}0738)$ $(128{,}076) = 1{,}0674$. Ciò posto, è $L\frac{2\,C\,c}{C + c} = 0 . 0296234$ e, fatto il calcolo colla medesima formola, si trova $Lx = 2 . 1027950$, ed $x = 126{,}7054$, risultato quasi eguale a quello della progressione aritmetica.

Fatto in fine lo stesso calcolo per l'osservazion quarta si giugne ad $x = 212{,}446$, altezza che supera la geometrica di due piedi e 15 centesimi.

Sezione VIII

Formole per la misura barometrica delle altezze nel sistema della gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra, e crescente col crescer delle latitudini.

46. Tutte le formole che abbiam trovate fin qui, si riferiscono alla gravità costante. Vediam ora quali cangiamenti debba in quelle introdurre la supposizione al vero più conforme della gravità in ragione inversa duplicata delle distanze dal centro della terra.

Sia

g la gravità al livello del mare, colla quale nella misura delle altezze si confonderà quasi sempre la gravità dei corpi situati alla stazione inferiore;

1 la densità del mercurio alla temperatura del ghiaccio, che si scioglie, o sia di $C = 1$;

$\frac{1}{D}$ la densità d'uno strato d'aria non molto superiore al livello del mare, che abbia anch'esso la temperatura del ghiaccio, e sia compresso dal peso $g A'$ d'una colonna di mercurio della stessa temperatura, la cui altezza sia A';

x la distanza dei due strati d'aria, ne' quali si fanno le osservazioni;

X una funzione d'x corrispondente al calore dell'altezza x;

$\frac{1}{\delta}$ la densità dell'aria alla stazion superiore;

r il raggio della terra.

Per avere la gravità g' corrispondente alla distanza x, si osservi che la distanza della stazion inferiore dal centro della terra si confonde quasi sempre fisicamente col raggio della medesima; e quindi si faccia la proporzione $g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(r+x)^2}$; e si avrà $g' = \frac{g r^2}{(r+x)^2} = g\left(1 - \frac{2x}{r} + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{4x^3}{r^3} + \frac{5x^4}{r^4} - \text{ec.}\right)$. Per l'estrema grandezza di r in confronto d'x tutti i termini divisi per r^2, r^3, ec. si posson negligentare *(a)*;

(a) Il raggio r per le più recenti ed esatte misure dei gradi di latitudine può calcolarsi di tese 3266330, e quindi, supposta $x = 3500$ tese, altezza straordinaria, cui diconsi esser arrivati Gai Lussac, e Biot nella celebre loro ascensione areostatica, il termine $+ \frac{3x^2}{r^2}$ non giungerebbe a tre millesimi e mezzo di tesa

e ciò fatto, resterà $g' = g(1 - \frac{2x}{r})$. Chiamata y l'altezza del barometro alla stazion superiore (avvertendo però che quest' altezza e quella della stazion inferiore sian ridotte alla medesima temperatura) la pressione della colonna y sarà $g(1 - \frac{2x}{r})y$. Ora ciò posto, essendo le densità dell' aria in ragion diretta dei pesi comprimenti ed inversa dei calori, sarà

$$\frac{1}{D} : \frac{1}{\delta} = \frac{gA'}{C} : \frac{g(1 - \frac{2x}{r})y}{X};$$ e per conseguente $$\frac{1}{\delta} = \frac{(1 - \frac{2x}{r})y}{DA'X};$$ avvertendo, che C calore della temperatura del ghiaccio è $= 1$. La pressione dello strato d' aria, che ha dx per altezza, sarà dunque $$\frac{g'dx}{\delta} = \frac{g'(1 - \frac{2x}{r})y\,dx}{DA'X},$$ e quella dello strato di mercurio, che ha dy per altezza, $= g'dy$. Or da queste pressioni, che si equilibrano, risulta l' equazion seguente, nella quale per maggior semplicità ho sostituito B a DA',

$$\frac{(1 - \frac{2x}{r})y\,dx}{BX} = -dy;$$ ove dy ha il segno negativo perchè al crescer delle x diminuiscon le y. Avrem dunque per equazion finale

$$\frac{(1-\frac{2x}{r})\,dx}{X}=-\frac{B\,dy}{y},$$

la qual si riduce a quella della gravità costante, supponendo r infinitamente maggiore di $2\,x$.

47. Cominciamo a supporre, che X funzion del calore sia una quantità costante, ed uguale al calor medio fra quelli delle due estremità della colonna aerea, cioè a $\frac{C+c}{2}$. In questo caso l'equazion precedente sarà $\frac{2}{C+c}(1-\frac{2x}{r})\,dx=-\frac{B\,dy}{y}$. Ne fo l'integrazione, e mi risulta

$$\frac{2}{C+c}(x-\frac{x^2}{r})=-B\,l\,y+Cost.$$

Determino la costante colla condizione, che, quando x è $=0$, sia $g'\,y=g\,A$, esprimendo per A l'altezza del barometro osservata alla stazion inferiore colla debita correzion del calore. Essendo $g=g'\frac{(r+x)^2}{r^2}=g'(1+\frac{x}{r})^2$, sarà $g\,A=g'\,(1+\frac{x}{r})^2\,A=g'y$, ed $y=(1+\frac{x}{r})^2\,A$. La costante fia dunque $B\,l\,A+2\,B\,l(1+\frac{x}{r})$. Osservo, che anche per le più alte stazioni, cui l'uomo possa giungere, è $\frac{x}{r}$ una frazion piccolissima; e ne conchiudo,

che il logaritmo neperiano di $(1+\frac{x}{r})$ è prossimamente uguale ad $\frac{x}{r}$. Sarà dunque $2\,B\,l(1+\frac{x}{r})=\frac{2\,B\,x}{r}$; e questo valore sostituito nella costante darà all'equazione la forma

$$\frac{2}{C+c}(x-\frac{x^2}{r})=B\,l\,\frac{A}{y}+\frac{2\,B\,x}{r},$$

la qual equazione, sostituiti i logaritmi delle tavole a quei di Nepero, si cangerà in

$$(\mathrm{E})\quad x-\frac{x^2}{r}=(\frac{C+c}{2})\,B\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}+\frac{B(C+c)\,x}{r}$$

e dopo le convenienti riduzioni, in

$$x^2+(B(C+c)-r)\,x=-B\,r\,l\,10(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y};$$

ove B pel num. 26 è $=4013,2$; ed $r=3266330$ pel num. precedente. Applichiam questa formola alla solita osservazione del monte Saleve; nella quale pel num. 38 fu $C=1,0544$; $c=1,0289$; $C+c=2,0833$; e

$B\,l\,10(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y}=490,744$. Sostituisco questi valori nell' equazion superiore, e ne ho

$$x^2-(3257969,3)\,x=-1602951447,5$$

Per risolver più facilmente quest' equazione, le do la forma seguente

$$(3257969,3-x)\,x=1602951447,5.$$

Ciò fatto, ne prendo i logaritmi, ed ho

$L(3257969, 3 - x) + L x = L\, 1602951447, 5 = 9.20492039.$

E qui si avverta, che alla gravità decrescente dee corrisponder un'altezza che superi quella della gravità costante. Cominciam dunque a supporre $x = 492$; e troveremo il primo membro dell'equazion logaritmica $=$ 9. 2048465 minore del logaritmo del secondo membro. Ma la supposizione d' $x = 492, 1$ dà per logaritmo del primo membro 9 . 204934867 maggior di quello del secondo membro; e per lo contrario la supposizione di 492, 08 lo dà alquanto minore. Il vero valor dell' incognita è dunque compreso fra i limiti 492, 08, e 492, 10; vale a dire ch'egli è assai vicino a 492, 09.

Ad un risultato pressochè uguale si giunge in quest'altra maniera più spedita. Scrivo l'equazione E nel modo seguente

$x = B\, l\, 10 \left(\frac{C + c}{2}\right) L \frac{A}{y} + \frac{B(C + c)\, x + x^2}{r}$. Ciò fatto, si vede tosto, che $B\, l\, 10 \left(\frac{C + c}{2}\right) L \frac{A}{y}$ è il valor d' x nell'ipotesi della gravità costante, e che questo valore sostituito ad x negli altri due termini, esprimerà assai bene l'aumento dell'altezza prodotto dalla gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra. Quest' aumento nel nostro esempio è espresso da $\frac{((4013, 2)(2, 0833) + 490, 744)\, 490, 744}{3266330}$.

Ora $(4013, 2)(2, 0833)$ è $= 8360, 7$; e $8360, 7 +$

490 , 744 = 8851 , 444 ; il qual numero ha per logaritmo 3 . 9470120. A questo logaritmo aggiungo quello di 490 , 744; e trovo, che il logaritmo del numeratore della frazion precedente è = 6 . 6378671. Da questo sottraggo il logaritmo di 3266330 = 6 . 5140601 ; e mi resta 0 . 1238070; cui corrisponde il numero 1 , 32986, che esprime il cercato accrescimento dell' altezza; per cui questa vien ad essere 492 , 07336 in luogo di 492 , 09 valore trovato quì sopra. La differenza è di tese 0 , 01614; e non giunge per conseguenza ad un pollice e un quarto su 492 tese.

Nell' osservazion del Monbianco fu, pel num. 38,

$$B\, l\, 10 \left(\frac{C + c}{2}\right) L \frac{A}{y} = 2246 , 529 ; \; C = 1 , 1198 ; \; c = 1,$$

0054; e $C + c = 2 , 1252$. Calcolando con questi dati per trovare l' aumento dell' altezza avremo (4013 , 2) (2 , 1252) = 8528 , 8529; (4013 , 2) (2 , 1252) + 2246, 529 = 10776 , 3819. Il logaritmo di questo numero è 4 . 032473; al quale aggiungendo il logaritmo di 2246, 529, ne risulta 7 . 3339849 logaritmo del numeratore

nella frazione $\frac{(B(C + c) + x)\, x}{r}$. E finalmente, sottratto

da questo il logaritmo di r, ne rimane 0 . 8699248; cui corrisponde il numero 7 , 4118 aumento dell' altezza prodotto dalla gravità decrescente. L' altezza totale è dunque 2246 , 529 + 7 , 4118 = 2253 , 9408.

48. Calcoliam ora la formola nell' ipotesi rigorosa del calor decrescente in progressione aritmetica su tutta la lunghezza della colonna aerea da misurarsi; nel-

la qual ipotesi è $X = C - m x$. In questo caso l'equazion precedente è $\frac{(1 - \frac{2x}{r}) dx}{C - mx} = -\frac{B dy}{y}$; la quale agevolmente riducesi a quest' altra forma

$$\frac{dx}{C - mx} + \frac{2dx}{mr} - \frac{2Cdx}{mr(C - mx)} = -\frac{Bdy}{y}.$$

L' integrale di quest' equazione è

$$-\frac{1}{m} l(C - mx) + \frac{2C}{m^2 r} l(C - mx) + \frac{2x}{mr} = -Bly + Cost.$$

La costante determinata, come nel num. prec. colla condizione, che quando x è $= 0$, sia $g' y = g A$, vien ad essere $-(\frac{1}{m} - \frac{2C'}{m^2 r}) l C + B l A + \frac{2Bx}{r}$; onde risulta l' equazione

$$-(\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r}) l(C - mx) + \frac{2x}{mr} = Bl\frac{A}{y} - (\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r}) lC + \frac{2Bx}{r};$$

alla quale, colle convenienti riduzioni dei termini, si dà in fine la forma seguente

$$x - \frac{l\,10}{1 - mB}\left(\frac{mrB}{2} L\frac{A}{y} + (\frac{r}{2} - \frac{C}{m})(L(C - mx) - LC)\right) = 0$$

Sostituisco in questa formola i valori di B, m, $l\,10$; e la cangio in

$$x - 2,88061\left(327710,68\, L\frac{A}{y} + (1633165 - 20000C)(L(C - \frac{x}{20000}) - LC)\right) = 0$$

Or quest' equazione non è solubile nè assolutamente nè per approssimazione con alcun metodo diretto. Ma nei casi particolari si potrà nel seguente modo ottenere il prossimo valor dell' incognita.

Nella solita osservazione del monte Saleve fu $L \frac{A}{y} = 0 . 0510293$ e $C = 1 , 0544$; e da questi dati risulta $327710 , 68 \, L \frac{A}{y} = 16708 , 59$; e $1633165 - 20000 \, C = 1612077$. L' equazione si riduce per conseguenza ad

$$x - 2,88061 \left(16708,59 + 1612077 \left(L\left(1,0544 - \frac{x}{20000}\right) - L\,1,0544\right)\right) = 0$$

Al num. 38 s' è visto, che l' altezza calcolata per l' ipotesi della gravità costante è di tese 491 , 3616. Ora, dovendo l' altezza esser maggiore per la gravità decrescente, io comincio a supporla = 492, e posto questo valore in luogo d' x, ne ho per risultato $- 28 , 7$. Ma per la supposizione d' $x = 493$, il risultato è $+ 70 , 22$. L' altezza cercata sta dunque fra i limiti 492 , 493; ma dev' esser più vicina al primo che al secondo. E tale appunto è l' altezza, che abbiam trovata nel num. prec. colla formola del calor uniforme e medio aritmetico tra quelli delle due estremità della colonna aerea.

Fatta la stessa serie di calcoli per l' osservazion del Monbianco, si troverà che l' incognita è contenuta fra i limiti 2253 , 2254, quale l' abbiam trovata nel risultato della formola del calor medio uniforme.

Questa formola dunque, la quale è d' un calcolo assai più facile, può senz' alcun sensibile errore sostituirsi a quella del calor variabile in tutta l' altezza an-

che nel sistema della gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra.

49. Supposto finalmente, che il calor diminuisca in progressione armonica, è $X = \frac{C}{1 + m x}$; e quindi per la gravità in ragion inversa duplicata delle distanze nasce l' equazion differenziale

$(1 - \frac{2x}{r})(1 + m x) d x = - \frac{B C d y}{y}$. Fatta la moltiplicazion dei fattori ed integrata l' equazion differenziale, ne risulta $x - \frac{x^2}{r} + \frac{m x^2}{2} - \frac{2 m x^3}{3 r} = - B C l y + Cost.$ La costante determinata come nei num. prec. è $B C l A + \frac{2 B C x}{r}$. Aggiunta la costante e sostituiti i logaritmi delle tavole a quei di Nepero ne vien l' equazione

$$x - \frac{x^2}{r} + \frac{m x^2}{2} - \frac{2 m x^3}{3 r} = B C l\, 10\, L \frac{A}{y} + \frac{2 B C x}{r}; \text{ ovvero}$$

$$\frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2}{r} - \frac{m x^2}{2} + \frac{2 B C x}{r} - x + B C l\, 10\, L \frac{A}{y} = 0;$$

la qual si riduce ad

$$x^3 - 3 \frac{(m r - 2) x^2}{4 m} + 3 (\frac{2 B C - r}{2 m}) x + 3 \frac{B C r l\, 10}{2 m} L \frac{A}{y} = 0$$

I valori di B e di r son sempre i medesimi; e quel-

lo di m pel num. 24 è o, 00004666. Ma i valori di C, A, ed y nei soli casi particolari son determinati. In quello dell' osservazion solita del monte Saleve è $C =$ 1, 0544, e $L\frac{A}{y} = 0,0510293$. Sostituendo adunque questi numeri nell' equazion precedente, essa riducesi ad

$$x^3 - 2418406\,x^2 - 104766672648\,x + 5222550406 2579 = 0.$$

Or nell' ipotesi della gravità costante abbiam visto al num. 27, esser $x = 491, 57$ tese; onde segue, che per la gravità decrescente il valor suo sarà alquanto maggiore. In fatti, sostituendo successivamente in luogo d'x i numeri 492, 493, i risultati cangian di segno, e col cangiamento ci avvisano, esser l' incognita contenuta fra questi due limiti. Volendoli poi ristringere, ed avere in frazioni decimali il valor prossimo dell'incognita, il gran numero delle cifre, di cui son composti i coefficienti, renderebbe il calcolo assai laborioso. Per evitare un così fatto inconveniente gioverà il dare all' equazione quest' altra forma

$$x + \frac{m x^2}{2} = BCl\,10\,L\frac{A}{y} + \frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2}{r} + \frac{2 BC x}{r}.$$

Imperciocchè nella stessa ipotesi del calore, ma supposta la gravità costante, l'equazione pel num. 27 è $x + \frac{m x^2}{2} = BCl\,10\,L\frac{A}{y}$; onde segue, che i tre termini $\frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2 + 2 BC x}{r}$ corrispondono all' accrescimento d' altezza, che nasce dalla diminuzione della gravità.

Per render alquanto più semplice il calcolo di quest' accrescimento, osservo che mx è $= \frac{C-c}{c}$; e per conseguente $\frac{2mx^3}{3} = \frac{2(C-c)x^2}{3c}$, e $\frac{2mx^3}{3} + x^2 = \ldots$ $\frac{2(C-c)x^2 + 3cx^2}{3c} = (\frac{2C+c}{3c})\ x^2$. L' aumento intero è dunque $\frac{(\frac{2C+c}{3c})x^2 + 2BCx}{r}$; ovvero

$$\frac{\left((\frac{2C+c}{3c})x + 2BC\right)x}{r}.$$

Applicando questa formola al solito esempio del monte Saleve, abbiamo pel num. 27, $x = 491, 57$ nel caso della gravità costante; $C = 1,0544$, e $c = 1,0299$ pel num. 36 alla fine. Or da questi dati risulta

$$\frac{2C+c}{3c} = 1,0158, \text{ e } (\frac{2C+c}{3c})\ x + 2BC = 8962, 373.$$

Ciò posto, il numeratore della frazion precedente ha per logaritmo 6 . 64400845 ; ed il logaritmo del denominatore è 6 . 5140601 . Quel della frazione è dunque 0 . 12994835 ; al qual corrisponde il numero 1 , 3438 : cosicchè l'accrescimento per la progressione armonica supera di 14 millesimi di tesa o di un pollice quello, che sopra abbiam trovato per la progressione aritmetica.

E con un simile calcolo applicato all' osservazion del Monbianco troveremo, che l'aumento d'altezza pro-

dotto dalla diminuzione della gravità è di tese 7, 843 su 2249 corrispondenti alla gravità costante.

Da questi esempj si raccoglie facilmente, che l'aumento delle altezze prodotto dalla diminuzione della gravità anche pel calor decrescente in progressione armonica non è così piccolo come lo ha creduto il sig. Hennert; il quale nell'integrar la sua formola non ha avuto riguardo alcuno all'accrescimento di gravità prodotto nel mercurio del barometro superiore dalla supposizione d'$x = 0$, con cui nell'integrazione si determina la costante. Vedi il num. 24 della sua dissertazione da me già citata al num. 17.

50. Dopo la celebre osservazion del Richer sul ritardamento dei pendoli in vicinanza dell'equatore è stato generalmente verificato dai Fisici, esser la gravità variabile anche alla superficie della terra, e col crescer delle latitudini andar essa pure crescendo gradatamente. Or quindi avviene, che le densità dell'aria corrispondenti ad un'altezza uguale A' del barometro, e proporzionali ai pesi della colonna mercuriale non posson esser uguali a latitudini diverse; ma debbon farsi o maggiori o minori secondo che la gravità è per la variata latitudine o accresciuta o diminuita. Chiamata $\frac{1}{D}$ la densità dell'aria corrispondente al peso $g'A'$ nella latitudine, in cui la gravità è g', la densità, che chiamerò $\frac{1}{d}$ per un'altra latitudine, in cui la gravità sia g, sarà determinata dalla proporzione $g'A' : gA' = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$; e per

conseguenza avremo $\frac{1}{d} = \frac{g}{g' D}$, e $d = \frac{g' D}{g}$.

Osservo ora, che nel determinare il coefficiente $D A'$ con osservazioni fatte, toltone una sola, a gradi 46 e pochi minuti di latitudine ho supposto $g' = 1$; e ne conchiudo, che il coefficiente $A' d$ per ogni altra latitudine sarà $\frac{A' D}{g}$. Per trasportar le formole barometriche dalla latitudine 46° a qualunque altra, si cercherà dunque primieramente qual sia il valor di g per la latitudine, cui vuol farsi il trasporto; poi con questo valore si dividerà $D A'$ coefficiente delle formole calcolate pel grado 46.

51. Il sig. Laplace ha dimostrato al num. 42; lib. III della Meccanica celeste, che se la gravità all' equatore è G, ed a qualunque altra latitudine g, sarà

$g = \left(1 + \frac{0,004208 \, sin.^2 \, lat.}{0,789502}\right) G$. Io poi ho determinato il

coefficiente $D A' l$ 10 per mezzo di tre osservazioni fatte da me sul Lago di Como, di una del sig. De Luc (tutte alla latitudine 46° e pochi minuti) e d' un' altra del General Roy fatta alla latitudine 51° 30'. Or chiamata g' la gravità al grado 46 sarà

$$g' = \frac{(1 + (0,004208)(5174497))}{0,789502} G = (1 + 0,0027577638) G$$

Sarà dunque

$$g' : g = 1 + 0,0027577638 : 1 + 0,00532994 \, sin.^2 \, lat.$$

Si osservi, che nel calcolare il coefficiente io ho sup-

posto $g' = 1$; onde segue, che per questa supposizione è

$$g = \frac{1 + 0,00532994 \, sin.^2 lat.}{1 + 0,0027577638}\text{; ovvero}$$

$$g = \frac{1 + (0,00266497)(1 - cos.\, 2\, lat.)}{1 + 0,0027577638}$$ essendo noto per le formole trigonometriche, che $sin.^2\, a$ è $= \frac{1 - cos.\, 2a}{2}$

Dunque ne avrem finalmente

$$(F)\ \frac{1}{g} = \frac{1 + 0,0027577638}{1 + 0,00266497 - 0,00266497\, cos.\, 2\, lat.}.$$ Pongo ora $0,0027577638 = A$, e $0,00266497 = B$; ed ho $\frac{1}{g} =$

$$\frac{1 + A}{1 + B - B\, cos.\, 2\, lat.} = \frac{1 + A}{1 + B}\left(1 + \frac{B\, cos.\, 2\, lat.}{1 + B} + \frac{B^2 cos.^2 2\, lat.}{(1 + B)^2} + \frac{B^3 cos.^3 2\, lat.}{(1 + B)^3} + \text{ec.}\right);$$ nella qual formola basterà calcolare i due primi termini della serie, attesa l'estrema piccolezza degli altri. Ciò posto, sarà

$$(F')\ \frac{1}{g} = \frac{1 + A}{1 + B}\left(1 + \frac{B\, cos. 2\, lat.}{1 + B}\right).$$ Rimetto i numeri corrispondenti ad A, B; e trovo $\frac{1 + A}{1 + B} = 1,000092$; e

$\frac{B}{1 + B} = 0,002659$. Sarà dunque

$$\frac{1}{g} = 1,000092\,(1 + 0,002659\, cos.\, 2\, lat.)$$

Calcolando il coefficiente coll'osservazione del General Roy ho supposta costante la gravità a qualunque latitudine; ma per la formola precedente a gradi 51° 30'

è $\frac{1}{g} = \ldots\ 1,000092\,(1 + 0.002659)\,cos.\,103 = 0,999494.$

Per trasportar il coefficiente 9225, 4 da 51° 30' a 46° avrem dunque l'analogia 0,999494 : 1 = 9225, 4 al quarto, che sarà 9230, 104954. Or questo coefficiente combinato cogli altri quattro dà per la latitudine 46° il coefficiente medio 9241, 6; del quale si dovrà far uso, volendo, come ragion richiede, aver riguardo alla gravità variabile per le diverse latitudini. La differenza dei due coefficienti è per verità così piccola, che l'accrescimento delle altezze prodotto dal maggiore non giugne ad un diecimillesimo delle altezze date dal minore. Ma poichè un coefficiente non conduce a calcoli più complicati che l'altro, quello è ragionevolmente da preferirsi, ch'è più conforme alle vere leggi della gravità. Ciò posto, il valor di B, il quale pel primo coefficiente

era $= \frac{9240,7}{l\,10} = 4013,2$ si cangerà in $\frac{9241,6}{l\,10} = 4013,59$; e questo è il valore, di cui si farà uso applicando le formole delle misure delle altezze ai varj casi particolari.

52. Se il coefficiente si fosse determinato con osservazioni fatte alla latitudine 45°, il valore di $\frac{1}{g}$ sarebbe espresso da una formola più semplice della precedente (F). Imperocchè $sin.^2\,lat.$ è in questo caso $= \frac{1}{2}$; e per conseguente g' è $= (1 + 0,00266497)\,G$; dal qual va-

lore con un calcolo simile a quello, che poco sopra abbiam fatto per la latitudine 46°, si deduce

$$\frac{1}{g} = \frac{1 + 0,00266497}{1 + 0,00266497 - 0,00266497 \, cos. \, 2 \, lat.}$$

Quì dunque le quantità, che poc' anzi abbiam chiamate A, e B son eguali tra loro, e la formola (F') del grado 46 si cangia in quella della latitudine 45° ponendo B in luogo di A; per la qual sostituzione essa diviene

$$\frac{1}{g} = 1 + \frac{B \, cos. 2 \, lat.}{1 + B} = 1 + 0,002659 \, cos. \, 2 \, lat.$$

Secondo il sig. Laplace $\frac{1}{g}$ dovrebb' essere $= 1 + 0,002845 \, cos. \, 2 \, lat.$; ma la differenza tra il suo ed il mio risultato non giunge a due diecimillesimi; ed i lettori esaminando il mio calcolo, ne potranno scoprir gli errori se pur ve n' ha. Certo la differenza non può attribuirsi ai termini della serie, ch' io ho negligentati; poichè la lor somma non può mai arrivare ad un centomillesimo. (Vedi la Meccanica celeste; vol. IV; pag. 289 e seguenti)

Volendo far uso di quest' ultima formola, converrà ridurre il coefficiente 9241, 6 del grado 46 a quello del grado 45 dividendolo per $1 + 0,002659 \, cos. \, 92°$, cioè per 0, 999907. Si faccia la divisione, e si troverà il quoto 9242, 47 coefficiente del grado 45; e questo moltiplicato per $1 + 0,002659 \, cos. \, 2 \, lat.$ darà il coefficiente generale per tutte le latitudini.

Per gradi 46 abbiam visto pur ora, esser $B = 4013, 59$; ma per gradi 45 sarà $B = \frac{9242, 47}{l \, 10} = 4013, 96$.

Questo è dunque il numero, che in tutte le formole dei paragrafi precedenti dovrà sostituirsi a B nelle varie ipotesi del calore e della gravità per la latitudine di gradi 45. Vedrem poi nella parte III, che il coefficiente 9242,47 (1 + 0,002659 *cos.* 2 *lat.*) dà le altezze maggiori delle vere per le osservazioni di De Luc, ma minori per quelle di Shuckburg, Roy, e Ramond; e generalmente, che nessun valor costante di B (cioè di DA') potrà soddisfare ugualmente alle osservazioni del primo ed a quelle degli altri tre fisici pur or menzionati.

53. Per l'ipotesi del calor medio uniforme del numero 47 la mia formola è

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10\left(\frac{C+c}{2}\right) L\,\frac{A}{y} + \frac{B(C+c)\,x}{r}\,.$$

Ora, se $B\,l\,10$ è il coefficiente pel grado 45 di latitudine, la formola stessa applicata a qualunque altro grado diverrà

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10\,(1 + 0,002659\,cos.\,2\,lat.)\,\frac{C+c}{2}\,L\,\frac{A}{y} +$$

$$B\,(1 + 0,002659\,cos.\,2\,lat.)\left(\frac{C+c}{r}\right) x\,,\ \text{ovvero}$$

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10(1+0,002659\,cos.2\,lat.)\left(\frac{C+c}{2}\right)\left(L\,\frac{A}{y} + \frac{2\,x}{r\,l\,10}\right);$$

ove l'ultimo termine $+\dfrac{2\,x}{r\,l\,10}$ è lo stesso che $\dfrac{x}{r}\,.\ 0,868589$.

Sostituiscasi 18336metri a $B\,l$ 10; r ad x; a ad r; 1 + 0,00375t, ed 1 + 0,00375t' a C, e c; 0,002845 a 0 002659; (h), h ad A, y; che tali sono le quantità del sig

La Place corrispondenti alle mie, e la formola precedente si cangerà in quella, cui egli è giunto con un metodo ben diverso dal mio, cioè in

$$r\left(1-\frac{r}{a}\right)=18336^{\text{met.}}(1+0{,}002845\,cos.\,2\,lat.)\left(1+\frac{t+t'}{2}.\,0{,}00375\right)$$

$$\left(L\,\frac{(h)}{h}+\frac{r}{a}.\,0{,}868589\right)$$

la qual formola, divisi i due membri per $1-\frac{r}{a}$, ed avvertendo, che $\frac{1}{1-\frac{r}{a}}$ è prossimamente $=1+\frac{r}{a}$, si riduce finalmente ad

$$r=18336^{\text{met.}}(1+0{,}002845\,cos.\,2\,lat.)\left(1+\frac{t+t'}{2}.\,0{,}00375\right)$$

$$\left(\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(L\frac{(h)}{h}+\frac{r}{a}.\,0{,}868589\right)\right)$$

quale appunto si trova alla pag. 292. lin. 17. vol. IV della Meccanica celeste.

AGGIUNTE

alla Parte II della Memoria sulle livellazioni barometriche

(Alla fine del num. 32)

Nell' estratto della relazione del sig. Biot stampato negli Opuscoli al luogo citato, e del qual solo io ho potuto valermi, sono certamente erronei i numeri indicanti i gradi del termometro situato all' Osservatorio; e tutti debbon esser accresciuti d' una decina. In fatti il sig. Laplace alla pagina 265, tomo IV della Meccanica celeste dice, che quando il globo fu all' altezza di 6980 metri sopra il livello della Senna, il termometro centigrado era a $-9^\circ, 5$, ma che nel tempo stesso era all' Osservatorio a $+30^\circ, 75$. Ora $+30^\circ, 75$ del termometro centigrado equivalgono a $+24, 6$ di quello, che comunemente chiamasi di Réaumur; ma nella relazion degli Opuscoli si legge, che al partir del globo, cioè circa 3 ore e mezzo prima, il termometro dell' Osservatorio era a gradi 13, 2 Réaum. Qui è ma-

nifesto che i gradi dovevan essere 23 , 2; non 13 , 2; poichè in così breve tempo ben può il termometro aver variato di 1°, 4; non già di 11°, 4. E similmente quando il globo fu a 2000 tese d'altezza, ed il suo termometro era a + 8°, 4 Réaum., quello dell'Osservatorio sarà stato a + 24°, non a + 14°. La variazion del termometro nel tempo impiegato per salire a 2000 tese fu dunque all'Osservatorio 0°, 8: e quindi io credo che, quando il globo fu all'altezza di 1333 tese, ed il suo termometro a + 10°, 4, quello dell'Osservatorio sarà stato a 23°, 7.

La differenza di temperatura per 1333, 2000, e 3500 tese d'altezza furon dunque 13°, 3; 15°, 6; e 32°, 2. La prima dà esattamente un grado per 100 tese; la seconda 0°, 78; e la terza 0°, 92. Aggiunti questi tre risultati ai quindici precedenti, e divisa la somma per 18, si trova il risultato medio 0 , 9265; la cui differenza dall'unità non giugne ad 8 centesimi.

Quanto alle osservazioni del monte *Mole* si avverta, che l'altezza dal cav. Shuckburg assegnata a quel monte supera di 45 tese il risultato dei calcoli; ch' io con grand' attenzione ho esattamente eseguiti co' suoi dati medesimi, e senza introdurvi alcun cangiamento. Ma di questo parlerò poi più copiosamente nella terza parte; ove spiegherò varii modi di calcolar geometricamente le altezze; e ne farò l'applicazione alle misure del Fisico inglese. Dimostrerò allora, che troppo grande è anche l'altezza da lui attribuita al monte Saleve sopra la sua base; e che ben calcolata secondo i precisi suoi dati, essa conferma la regola del sig. Deluc anzichè contraddirla.

(Ai numeri 47, 48, 49)

Al num. 47 determinando la costante colla condizione, che, quando è $x = 0$, sia $g' y = g A$, l'ho trovata $= B\, l\, A + \frac{2 B x}{r}$. Or questa espressione, si dirà forse, contenendo la variabile x, non pare che possa chiamarsi costante. Io nol niego; ma, per togliere ogni difficoltà, osservo che anche sulle vette de' più alti monti la diminuzione della gravità in ragion duplicata delle distanze accresce di poche tese l'altezza data dal calcolo per la gravità costante. Quindi segue che dopo aver calcolata l'altezza per la gravità costante, il risultato potrà sostituirsi ad x nel termine $\frac{2 B x}{r}$, e così renderlo costante. Si chiami R il risultato suddetto; e l'equazione *(E)* del num. 47 diverrà $x - \frac{x^2}{r} = R + \frac{B(C + c) R}{r}$; ovvero $r x - x^2 = r R + B(C + c) R$.

Finalmente prendo i logaritmi, e mi viene $L\,(r - x) + L\, x = L\, R + L\,(r + B\,(C + c)\,)$.

Per l'esempio del monte Saleve quest'equazione è $L(3266330 - x) + L\, x = L\, 490,\, 744 + L\, 3274691 = 9\,.\,20602553$.

Or, dovendo l'altezza esser alquanto maggiore di 490, 744, io comincio a supporre $x = 492$; ed il primo membro dell'equazione mi risulta $= 9\,.\,20595976$

minor del secondo, ma ben di poco. All' opposto la supposizione d' $x = 492$, 1 mi dà per primo membro 9 . 20604592 alquanto maggior del secondo. Ma per le supposizioni d' $x = 492$, 08 ; $x = 492$, 07 il primo membro si cangia in 9 . 2060303527, ed in 9 . 206021554, val a dire, che per una supposizione è maggiore, ma per l' altra minor del secondo. Il vero valor dell' incognita sta dunque fra i limiti 492 , 07 , e 492 , 08 ; onde la differenza tra questo risultato e quello del num. 47 non giunge a due centesimi di tesa.

Dall' equazione $x - \frac{x^2}{r} = R + \frac{B(C+c)R}{r}$ si deduce che $\frac{R^2 + B(C+c)R}{r}$ esprime l' aumento dell' altezza prodotto dalla gravità decrescente, il quale al num. 47 ho detto esser espresso da $\frac{x^2 + B(C+c)x}{r}$; ove x è lo stesso che R. Ciò posto ognun vede, che l' una e l' altra costante egualmente conducono alla medesima formola d' accrescimento.

E per simil guisa, se nelle costanti dei numeri 48 , 49 porremo $\frac{2BR}{r}$ in luogo di $\frac{2Bx}{r}$, e con questo cangiamento solo ripeteremo i calcoli delle altezze, giungeremo a risultati eguali pel numero intiero delle tese, e sol diversi di qualche frazione. Quanto al num. 48, in cui trattasi del calor decrescente in progressione aritmetica, io avverto il lettore, che vi sono scorsi

alcuni piccioli errori nei numeri, i quali però non influiscono nel risultato, cioè nella determinazione dei limiti, fra i quali l' incognita è contenuta. Nell' equazion finale a 16708, 59 deve sostituirsi 16722, 86. Fatta questa correzione, se supporremo $x = 492$, troveremo, che l'equazion si riduce a $492 - 563,88 = -71,88$. Ma la supposizione d' $x = 493$ ci condurrà a $493 - 465,94 = +27,06$. I limiti dell'equazione son dunque 492, 493 quali gli avevam già trovati.

Sostituita R ad x nel termine $\frac{2Bx}{r}$ della costante, essa diverrà $-(\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r})\, l\,C + B\,l\,A + \frac{2BR}{r}$; e l'integrale dell'equazione sarà $-(\frac{1}{m} - \frac{2C}{m\, r})\, l\,(C - mx) + \frac{2x}{mr} = B\,l\,(\frac{A}{y}) - (\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r})\, l\,C + \frac{2BR}{r}$; ovvero $x - l\,10$

$$\left(\frac{m\,B\,r}{2}\, L\,\frac{A}{y} + (\frac{r}{2} - \frac{C}{m})\,(L\,(C - m\,x) - L\,C)\right) - m\,B\,R = 0.$$

Nel solito esempio del monte *Saleve* il valore di R pel num. 37 è 491, 36, onde viene $m\,B\,R = 98,5962976$, o più semplicemente 98,6. Sostituisco nell'equazione i valori di m, B, r; e la cangio in $x - l\,10$

$$\left(327710,89\, L\,\frac{A}{y} + (1633165 - 20000\,C)(L\,(C - \frac{x}{20000}) - L\,C)\right) - 98,6 = 0.$$

Finalmente, sostituiti i valori di $L\,\frac{A}{y}$ e di C; poi supposto $x = 492$, si trova $492 - 549,33 = -57,33$: ma colla supposizione d'$x = 493$ si giugne a $493 - 471,05 = + 21,95$. Anche col termine $\frac{2\,B\,R}{r}$ sostituito nella costante a $\frac{2\,B\,x}{r}$ si trovan dunque per l'incognita gli stessi limiti $492, 493$.

Pel calor decrescente in progressione armonica, quale si è supposto al num. 49, già si è osservato, che l'aumento dell'altezza nato dalla diminuzione della gravità è espresso da $\frac{2\,m\,x^3}{3\,r} + \frac{x^2 + 2\,B\,C\,x}{r}$; ove il termine $\frac{2\,B\,C\,x}{r}$ si cangia in $\frac{2\,B\,C\,R}{r}$ supponendo la costante $= B\,C\,l\,A + \frac{2\,B\,C\,R}{r}$. Ciò premesso, egli è chiaro, che alle due costanti corrisponde il medesimo accrescimento, cioè $\frac{2\,m\,R^3}{3\,r} + \frac{R^2 + 2\,B\,C\,R}{r}$.

Aggiungo, che i medesimi risultati si ottengono anche dalla supposizione, che y si cangi in A quando è $x = 0$. Imperciocchè in questo caso la costante pel num. 47 è $= B\,l\,A$; e l'equazione $\frac{2}{C + c}\,(\,x - \frac{x^2}{r}\,) =$

$B\,l\,(\frac{A}{y})$. Osservo ora, che g è la gravità del mercurio per la colonna A, ma g' per la colonna y; e ne conchiudo, che l'equazione cangiasi in $\frac{2}{C+c}(x-\frac{x^2}{r})=B\Big(l\,(\frac{A}{y})+l\,(\frac{g}{g'})\Big)=B\,l\,(\frac{A}{y})+\frac{2\,B\,x}{r}$; poichè al num. 47 si è dimostrato, che $l\,(\frac{g}{g'})$ è $=\frac{2\,x}{r}$. Il lettore può verificar facilmente, che facendo la stessa supposizione d'$y=A$ quando x è $=0$, e ponendo prima $l\,(\frac{A}{y})+l\,(\frac{g}{g'})$ in luogo di $l\,(\frac{A}{y})$; poi $\frac{2\,x}{r}$ in vece di $l\,(\frac{g}{g'})$ si arriva nei num. 48, 49 alle medesime equazioni finali.

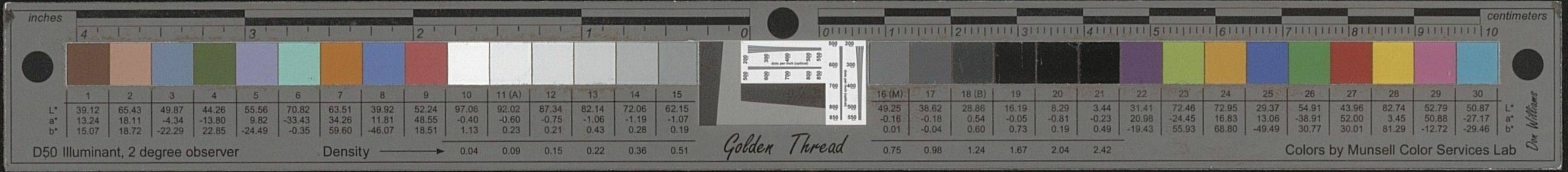
Conchiudiam finalmente, che la prima forma da me assegnata alla costante, benchè straordinaria, non è però d'un uso men sicuro per calcolar esattamente le altezze.

BECCARIA

LA PLACE

BIOT

VENINI



inches
centimeters
D50 Illuminant, 2 degree observer
Density
Golden Thread
Colors by Munsell Color Services Lab
Don Williams
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 (A) 12 13 14 15
L* 39.12 65.43 49.87 44.26 55.56 70.82 63.51 39.92 52.24 97.06 92.02 87.34 82.14 72.06 62.15
a* 13.24 18.11 -4.34 -13.80 9.82 -33.43 34.26 11.81 48.55 -0.40 -0.60 -0.75 -1.06 -1.19 -1.07
b* 15.07 18.72 -22.29 22.85 -24.49 -0.35 59.60 -46.07 18.51 1.13 0.23 0.21 0.43 0.28 0.19
0.04 0.09 0.15 0.22 0.36 0.51
16 (M) 17 18 (B) 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
49.25 38.62 28.86 16.19 8.29 3.44 31.41 72.46 72.95 29.37 54.91 43.96 82.74 52.79 50.87
-0.16 -0.18 0.54 -0.05 -0.81 -0.23 20.98 -24.45 16.83 13.06 -38.91 52.00 3.45 50.88 -27.17
0.01 -0.04 0.60 0.73 0.19 0.49 -19.43 55.93 68.80 -49.49 30.77 30.01 81.29 -12.72 -29.46
0.75 0.98 1.24 1.67 2.04 2.42